LA MATEMÁTICA DE LA BELLEZA

Matemática

3er AÑO

LA MATEMÁTICA DE LA BELLEZA

MATEMÁTICA

3er AÑO

COLECCIÓN BICENTENARIO

COLECCIÓN **BICENTENARIO**

Hugo Chávez Frías
Comandante Supremo de la Revolución Bolivariana

Nicolás Maduro Moros
Presidente de la República Bolivariana de Venezuela

Corrección, Diseño y Diagramación
EQUIPO EDITORIAL
COLECCIÓN BICENTENARIO

Coordinación de la Serie Matemática
Wladimir Serrano Gómez

Asesoría General Serie Matemática
Rosa Becerra Hernández
CastorDavid Mora

Grupo de Investigación y Difusión
en Educación Matemática

Autoras y Autores
Aldo Enrique Mariño
Alí Rojas Olaya
Ana Duarte Castillo
Andrés Moya Romero
Angel Miguel Álvarez
Castor David Mora
Darwin Silva Alayón
Dolores Gil García
Edgar Vásquez Hurtado
Hernán Paredes Ávila
Jorge Luis Blanco
Keelin Bustamante Paricaguan
Norberto Reaño Ondarroa
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez
Zuly Millán Boadas

Biografías
Walter Beyer

Revisión de Contenido
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez

Ilustraciones
Himmaru Ledezma Lucena
Julio Morales Mosquera
Morely Rivas Fonseca
Rafael Pacheco Rangel

República Bolivariana de Venezuela
© Ministerio del Poder Popular para la Educación

Tercera edición: Abril, 2014
Convenio y Coedición Interministerial
Ministerio del Poder Popular para la Cultura
Fundación Editorial El perro y la rana / Editorial Escuela

ISBN: 978-980-218-329-6
Depósito Legal: lf51620123701320
Tiraje: 450.000 ejemplares

Mensaje a las estudiantes y los estudiantes

¿Quién pensaría que la belleza humana tiene que ver con la Matemática? Existe un número fabuloso que se presenta una y otra vez en muchas de las proporciones del cuerpo, tanto de la mujer como del hombre: el número de oro. Su presencia es tan frecuente que antiguamente se pensó que Dios nos había creado con base en ese número. Increíblemente también se le encuentra en la naturaleza y algunos de sus fenómenos. La verdadera belleza puede verse desde la Matemática. Al mismo tiempo podemos advertir que aquellos conceptos que identifican a la belleza con patrones como el erróneo "90-60-90" representan una tergiversación y banalización de esta idea.

La Matemática está presente en nuestro contexto y en el mundo. Además de la belleza, muchos otros temas y situaciones pueden estudiarse y comprenderse desde esta disciplina, permitiendo los cambios y transformaciones necesarias en nuestra forma de pensar y actuar sobre los problemas que afectan a la comunidad o a la sociedad en general.

Por ejemplo: la delimitación de regiones rectangulares en un terreno, el cálculo del Índice de Masa Corporal (IMC), la distribución y uso digno de nuestro tiempo "libre", la descripción de la trayectoria que sigue una embarcación pesquera al cruzar un río, la distribución del gas comunal, la venta de gasolina o de pan en la localidad, el diseño y construcción de un cono para helado, el cálculo de la producción agrícola al variar el número de plantas por hectárea, los datos sobre la esperanza de vida en Venezuela y en el mundo, y tantos otros temas, se relacionan estrechamente con conceptos matemáticos como el número real y las operaciones entre ellos, el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides y el teorema de Thales, las razones trigonométricas, los vectores, los sistemas de ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas, las funciones, los intervalos, la estadística y las probabilidades.

Cada lección de este libro se corresponde con ese vínculo natural que hay entre la Matemática, su enseñanza y el contexto.

Sus páginas les acompañarán en el aprendizaje, en el estudio de ciertas situaciones reales, en la comprensión de las ideas matemáticas, y en su formación como ciudadanas y ciudadanos.

Además, en este libro hacemos honor a profesores y profesoras matemáticos que aún naciendo en otras tierras hicieron de nuestro país, su Patria.

Esperamos pues que las actividades matemáticas que se desarrollen en el contexto del aula sean sólo el principio de una forma de vivir, de interrelacionarse con la comunidad y el mundo, que conlleve el pensamiento crítico y la acción necesaria para contribuir de manera importante en la construcción de una sociedad justa y soberana.

Mensaje a las profesoras, los profesores y las familias

La **educación matemática** tiene un enorme potencial para estudiar el lado matemático de muchos de los fenómenos del mundo, así como de nuestra relación con éste. Tal potencial cobra mayor vigencia ante el devastador impacto del hombre y la mujer sobre los recursos naturales, el ambiente, la biodiversidad, y ante las grandes desigualdades que se han zanjado en el seno de la misma humanidad, en especial durante los últimos cien años. En tal contexto, las ideas matemáticas constituyen un punto de entrada importante para la descripción y comprensión de tales fenómenos, y más allá, representan un elemento para emprender las acciones y transformaciones necesarias.

Este enfoque de la **educación matemática** implica que la actividad de las y los estudiantes se caracterice por la investigación individual y colectiva, que involucren desde ella y con ella a otros miembros de la comunidad institucional y local, que comprometa a sus familiares en esta excelsa tarea. La profesora y el profesor de matemática son en esencia investigadores junto a sus estudiantes, el espacio del aula y su contexto se convierten en el escenario de indagaciones, conversaciones, deliberaciones, inferencias, deducciones, análisis, contrastación de ideas, métodos y resultados. Lo cual, naturalmente, implica formas más abiertas de comunicación e interacción en el contexto del aula. Además, invita a pensar en nuevas estrategias de evaluación que no se concentren exclusivamente en las "pruebas" y que valoren el error como un recurso didáctico, y no con el tradicional carácter punitivo con el que se le veía.

Es un libro que trasciende lo disciplinario, es decir, la Matemática escolar, y se relaciona estrechamente con otras disciplinas, con el contexto sociohistórico y con sus problemas, y en especial con la ética.

Así, desde cada una de las lecciones que abarca el libro de Matemática se busca romper con ciertas tradiciones que han signado parte de la educación matemática no sólo en nuestro país sino también en el ámbito internacional, como por ejemplo el énfasis en los algoritmos como el único contenido matemático a estudiar o la desvinculación de las ideas matemáticas con el contexto y con la realidad. Tendencias que han marcado negativamente la imagen de este campo de saberes en buena parte de las juventudes.

Les invitamos entonces a recorrer, junto a sus estudiantes, hijas, hijos o representados el maravilloso mundo de la **educación matemática** en contexto, pensada para la formación de la ciudadanía y el estudio a profundidad de las ideas matemáticas. Estamos seguros que ello contribuirá decisivamente a la formación de nuestras jóvenes y nuestros jóvenes.

Índice

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Lola de Fuenmayor Rivera (1889-1969)

Esta insigne docente nace bajo el nombre de María de los Dolores en la ciudad española de Sevilla el 2 de febrero de 1889, aunque se le conoció más por su apodo —Lola, como suele denominarse a las llamadas María Dolores- y por sus dos apellidos de casada. Era hija de los esposos José Rodríguez del Castillo y María Luisa Rodríguez. Quedó huérfana a muy corta edad y llega a nuestra Patria a los 3 años, siendo acogida por las hermanas Panchita y María Andrianza, dos insignes maestras venezolanas del Colegio Nacional de Niñas. En 1920 contrae matrimonio con el Dr. Asdrúbal Fuenmayor Rivera, unión de la cual nacen 5 hijos.

Estudia en el Colegio Nacional de Niñas y alcanza allí los títulos de Maestra de Primera y Segunda enseñanza, su título de Maestra lo obtuvo en 1907, así como el de Profesora Normal en 1910. En 1912 se gradúa en Enfermería y Asistencia Social bajo la dirección del doctor Francisco Antonio Rísquez. Más tarde logra el Título de Profesora de Teoría y Solfeo y Estudios Comerciales, entre otros.

Su labor docente fue sumamente amplia, recorriendo diversos niveles educativos: maestra de primaria, Profesora de secundaria y de normal. En 1910 inicia su brillante carrera docente dictando historia y geografía en el mismo Colegio Nacional de Niñas. Dictó clases en las dos Escuelas Normales que había en Caracas; en los colegios “San José de Tarbes”, “Santa Teresa”, “Providencia” y por supuesto en el Colegio “Santa María” fundado por ella.

Fue ganadora de los primeros concursos de oposición para optar a las cátedras de Dibujo y Geometría en la Escuela Normal de Hombres. Asimismo, dictó clases de Educación Física, de Educación Comercial y de Música (Teoría y Solfeo).

En 1938, funda en Caracas el afamado Colegio “Santa María”, ubicado en el casco central de la ciudad de Caracas, donde fungía de docente y de Directora. En sus inicios era un Colegio para señoritas, luego pasó a ser mixto, y se impartía la primaria, bachillerato, normal y educación comercial.

En él se dio cita lo más granado del profesorado caraqueño de ese entonces, como Rafael Vegas, Luis Villalba Villalba, Hugo Ruán, Boris Bossio Vivas, entre otros. Aunque diversas fuentes señalan a este colegio como si fuese reabierto por Lola Fuenmayor, lo cierto es que existió anteriormente en Caracas otro con el mismo nombre, cuyo fundador fue Agustín Aveledo, el cual había cerrado sus puertas en 1917. Fue en este primer Colegio “Santa María” en donde el egregio americano José Martí dejó oír su palabra orientadora.

Poco después, en 1941 fundó una sucursal del colegio en La Victoria, pero la experiencia tuvo corta vida. Es de señalar aquí que el prestigioso historiador venezolano Federico Brito Figueroa fue profesor de Historia de Venezuela en educación media en el colegio “Santa María” de La Victoria. Sin embargo, razones de índole política hacen que interrumpa su labor docente.

Posteriormente, en octubre de 1953, Lola de Fuenmayor crea la Universidad “Santa María”, segunda universidad privada existente en el país. En esta institución de educación superior fue Directora de Cultura.

En su momento, también formó parte de las comisiones designadas por el Consejo Técnico de Educación encargadas de la redacción de los programas de estudio.

Participó activamente por el reconocimiento de los derechos de la mujer, como el del sufragio femenino, luchas aupadas por diversas organizaciones, destacándose la Asociación Venezolana de Mujeres fundada en 1936. Se incorporó directamente a la actividad política. En 1958 fue Primer Vicepresidente del Movimiento Electoral Nacional Independiente (MENI), organización creada ese mismo año y que apoyó la candidatura del Contraalmirante Wolfgang Larrázabal, y que en sus estatutos declaraba que “el MENI es una agrupación nacional de carácter y contenido nacionalista y revolucionario, de lucha antiimperialista” (Magallanes, 1973, p. 498). En 1952 es postulada por el partido Unión Republicana Democrática (URD) a la diputación del Distrito Federal, siendo uno de los siete diputados que resultaron electos y la única mujer del grupo, elecciones desconocidas por el gobierno de facto de Marcos Pérez Jiménez y no pudo acceder a su curul.

Entre los reconocimientos y honores que se le han tributado están: el 5 de julio de 1911 la Medalla de Oro, otorgada por el Ministerio de Instrucción Pública a la mejor alumna del año; en 1943, la Medalla de Honor de la Instrucción Pública; en 1967 se le confirió la Orden “27 de Junio” en su Primera Clase. Además, actualmente hay un plantel que lleva su nombre.

Fallece en Caracas el 20 de febrero de 1969. Al momento de su muerte se desempeñaba como Concejal por el Distrito Federal, cargo edilicio que ganara en las elecciones de 1968.

1 LOS CONOS DE LOS HELADOS

Números inrracionales Conjunto $\mathbb{R}$

Envases para los helados

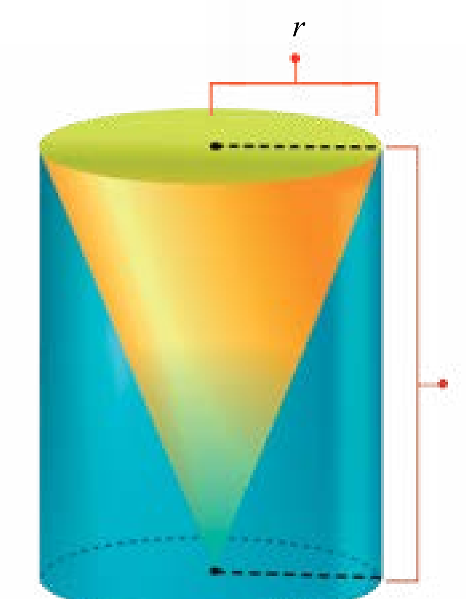
Un grupo de personas que desean construir conos que sirvan de envase para sus helados naturales (sin colorantes artificiales, ni sustancias conservantes), ¡Nunca imaginaron los conceptos matemáticos que surgirían durante su proceso de elaboración! Por ejemplo, al considerar las preguntas: ¿qué capacidad deben tener los conos?, es decir, ¿con qué radio y altura se deben construir? y, ¿cuál es la relación entre la capacidad del cono y la del cilindro de la misma altura y radio?

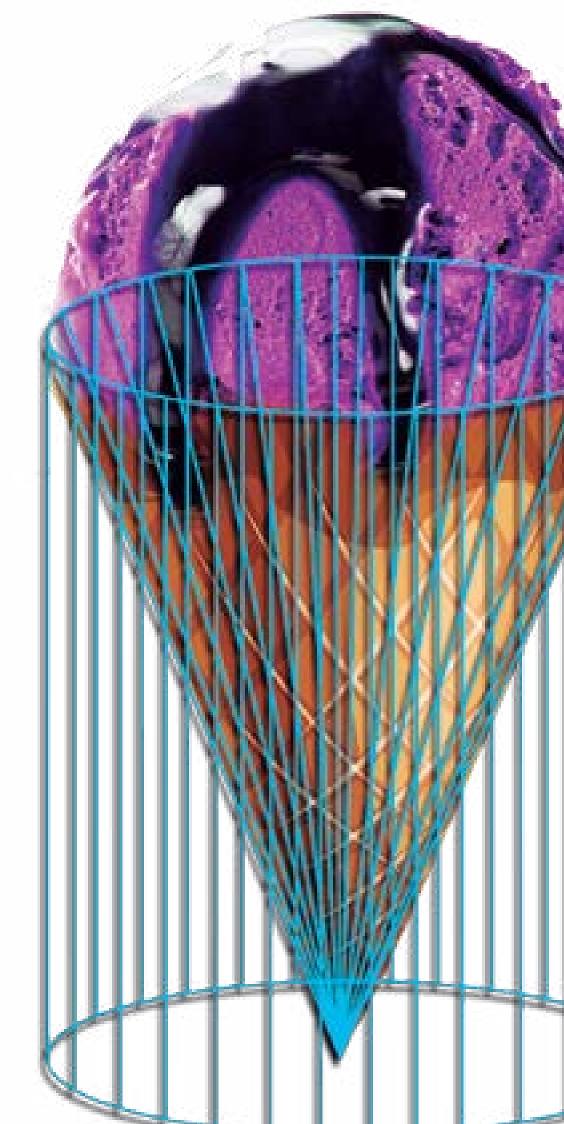
En esta lección estudiaremos las características de este envase en particular, así como su relación con los **números no racionales** (**irracionales**), justo aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros. Entonces, veremos que tales tipos de números no sólo se presentan en problemas clásicos, como la “duplicación del cubo”, sino que forman parte de la cotidianidad y del contexto. Las actividades que siguen tienen que ver con estas ideas. Para ello necesitaremos cartulina o papel que pueda aprovecharse (para el “reciclaje”), regla, compás, tijera, lápiz y calculadora.

El número π al comparar la capacidad del cono y del cilindro

Entre los números irracionales tenemos uno muy conocido, el número π *(pi)*, este número se presenta en un problema muy importante, el que establece la relación entre la capacidad de un cilindro y el de un cono de su misma altura y radio. Para comprobarlo les proponemos realizar la siguiente actividad:

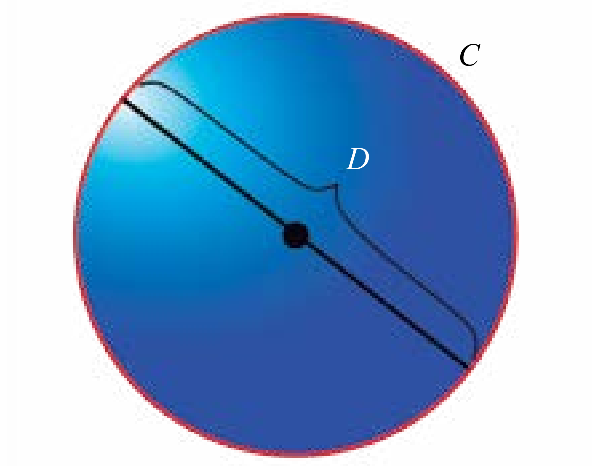
- Tomen un objeto con forma de cilindro, sin una de sus caras circulares, enrollen un cartón en forma de cono de manera que la punta del mismo toque el fondo del cilindro.
- Corten el cartón alrededor del borde del cilindro (el cono debe quedar con la misma altura que el cilindro).
- Llenen el cono hasta el borde con arena fina y vacíen el contenido en el cilindro, hagan esto cuantas veces sea necesario para llenar el cilindro.
- ¿Cuál es la relación entre el volumen delcilindro y el del cono?





Debieron obtener con este experimento que, el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro. Como ya estudiamos en primer año, la fórmula para el cálculo del volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$, indiquen entonces:

¿Cuál es la fórmula para el cálculo del volumen de un cono?



Recordemos que dada una circunferencia, su longitud (C) es π veces su diámetro (D), por lo tanto:

$$C = \pi D.$$

Despejando π, nos queda que:

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Incluso en una de las figuras geométricas elementales, tal es el caso de la circunferencia, la naturaleza nos muestra números tan especiales como los irracionales, hasta en la sencilla tarea de construir un cono para helado. A continuación les presentamos las primeras 150 cifras decimales de π:

$$\pi \approx 3,1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510$$
$$5820974944\ 5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170679$$
$$8214808651\ 3282306647\ 0938446095\ 5058223172\ 5359408128$$

El número π tiene una historia fascinante, pues ha ocupado a muchos profesionales y amantes de la Matemática a estudiar sus propiedades. Una de ellas fue, precisamente, encontrar una expresión que se le aproxime. Por ejemplo, en el *Papiro de Ahmes* o *Papiro Rhind*, 1.600 años antes de nuestra era, se da una buena aproximación de π, se le escribe como $\pi \approx \frac{2^8}{3^4}$.

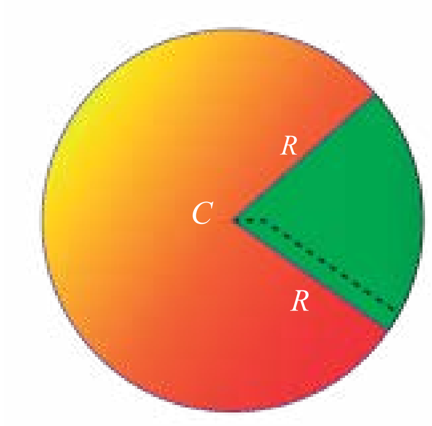
Verifiquen esto con su calculadora.

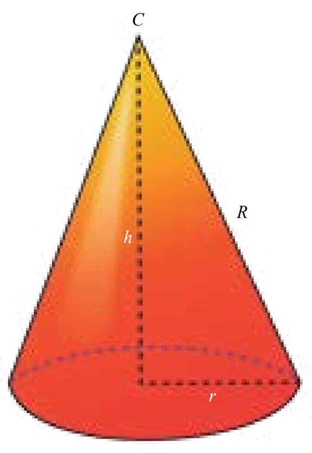
Actualmente, las computadoras han permitido obtener, con precisión y cierta rápidez, más de 10.000.000.000.000 de sus cifras decimales (es decir, más de diez billones de cifras).

Construyendo conos y calculando su capacidad

Para construir un cono trazamos una *circunferencia* en el papel o cartulina (recordemos que debemos emplear materiales que sirvan para el reciclaje), luego representamos dos *radios* tal como se muestra en la figura adjunta. Y ya estamos en condiciones de recortar el *sector circular*.

Tengan en cuenta que el radio de la circunferencia (R) no es igual que el radio del cono (r) que construimos.





- Organícense en pequeños grupos y construyan varios conos.
- Identifíquenlos, tomen nota de su radio (r) y altura (h), y calculen su capacidad. Pueden registrar estos datos en una tabla como la que sigue.

Cono	Altura (h)	Radio (r)	Capacidad (l ó ml): $V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$
A			
B			
C			
D			
E			

Empleen la calculadora y aproximen hasta la segunda cifra decimal.

Una observación: como sabemos, volumen y capacidad son conceptos distintos. El primero de ellos refiere al "lugar" que ocupa el objeto en el espacio, y el segundo, a lo que "cabe" en el recipiente. Por ejemplo, la capacidad del envase de yogurt Los Andes es el volumen del líquido que lo llena, el volumen del líquido (en este caso del yogurt) es de $900\ cm^3$, esto corresponde a la capacidad de ese mismo envase. Pero debemos tener cuidado, ya que dos envases pueden tener la misma capacidad, pero no el mismo volumen. Veamos esto último de forma más explícita, dos envases, uno grueso y el otro delgado, pueden tener la misma capacidad y diferentes volúmenes. Es decir a ambos envases le cabe la misma cantidad de yogurt, la capacidad de los envases es el volumen del yogurt que les cabe a cada envase, no el volumen de los dos envases.

Liceo Bolivariano Luis Graterol Bolívar
Cumaná, estado Sucre

Todos los cuerpos tienen un volumen, no importa el tamaño ni su forma. Sin embargo, no en todos los objetos podemos medir su capacidad, la podemos medir en aquellos que podemos llamar recipientes.

- ¿Pueden dar ejemplos de objetos a los que se les puede medir el volumen, pero no su capacidad?
- Adicionalmente, hay objetos que tienen las dos cualidades, volumen y capacidad. ¿Pueden dar ejemplos de esos objetos?
- Entonces, ¿tiene sentido hablar de la capacidad de un objeto sólido como una bola de billar, o un cubo de madera con letras, como los que usan las niñas y niños en el nivel de Educación Inicial?

En nuestro caso, aproximaremos la capacidad del cono construido con base en la fórmula (ecuación) del *volumen del cono*, en donde uno de los factores es el número π.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Recuerden que para calcular el volumen de un cono, debemos conocer el área de su base, es decir, el área del círculo que funge de base. La fórmula para calcular el *área del círculo* de radio r la estudiamos en 1er año, ésta es:

$$A_{\bigcirc}=\pi r^2$$

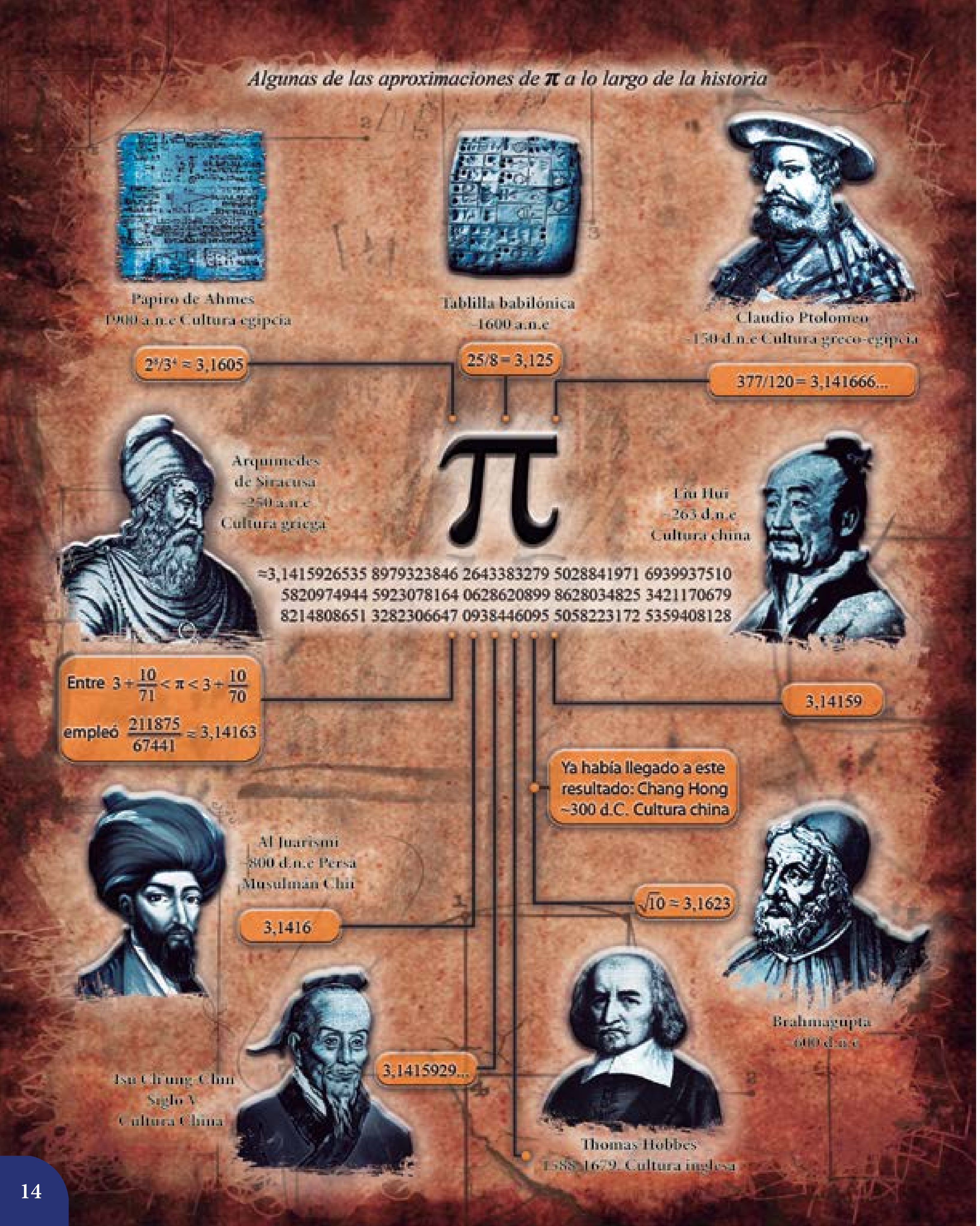
Notemos que ambas expresiones dependen del número π, el cual es un **número irracional**. ¿Qué significa esto?

> Un número **irracional** tiene infinitas cifras decimales pero no hay un período en éstas.

En cambio, un número racional puede tener una cantidad **finita** de cifras decimales, o bien, una cantidad **infinita** de cifras decimales pero con algún período. Por ejemplo, los números:

- $\frac{5}{12}=0,41\overset{\frown}{6}$
- $\frac{7}{18}=0,3\overset{\frown}{8}$
- $\frac{5}{11}=0,\overset{\frown}{45}$
- $\frac{11}{13}=0,\overset{\frown}{846153}$
- $\frac{13}{14}=0,92\overset{\frown}{857142}$
- $\frac{1}{10.000}=0,0001$

Son racionales, pues todos se pueden escribir como el cociente de dos números enteros.



¿Qué otros números irracionales existen?

Alguien pudiera pensar que los números irracionales son algo “excepcional”, pero no es así. De hecho, ¡existen muchos más números irracionales que números naturales, enteros y racionales! Además, resulta imposible contar los números irracionales. Algunos números irracionales que destacan por sus múltiples aplicaciones y presencia en diversos fenómenos de la naturaleza y en otras disciplinas, o bien, por su papel en el desarrollo de la Matemática en ciertos momentos de la historia, son:

El **número de Euler**: $e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\ldots$

El **número de oro** (se lee “phi”): $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398\ldots \approx 1{,}618$

La **raíz cuadrada de 2**: $\sqrt{2}$

La **raíz cúbica de 2**: $\sqrt[3]{2}$

¿Qué otros conocen? Investiguen sobre esto y conversen con sus compañeras y compañeros.

El número de oro se tratará con profundidad en las lecciones 2 y 9 de este libro.

Por otra parte, se conoce que si x es un número irracional, y a es un número racional no nulo ($a \neq 0$), entonces ax es irracional. Si b es un número racional cualquiera, entonces $x+b$ es irracional.

Así, números como los siguientes son irracionales:

- $\ldots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$
- $\ldots, \pi-4, \pi-3, \pi-2, \pi-1, \pi+1, \pi+2, \pi+3, \pi+4, \ldots$
- $\ldots, -4\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$
- $\ldots, \sqrt{2}-4, \sqrt{2}-3, \sqrt{2}-2, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+2, \sqrt{2}+3, \sqrt{2}+4, \ldots$
- $\ldots, e-4, e-3, e-2, e-1, e+1, e+2, e+3, e+4, \ldots$
- $\ldots, -4e, -3e, -2e, -e, e, 2e, 3e, 4e, \ldots$

Como vemos, todas las listas dadas son infinitas (los puntos suspensivos indican que la lista no tiene fin tanto a la derecha como a la izquierda).

El conjunto de los Números Reales $\mathbb{R}$

Con los números racionales y los números irracionales podemos definir un nuevo conjunto que contenga ambos tipos de números, éste se denomina conjunto de los Números Reales $\mathbb{R}$.

Si denotamos a los conjuntos de los números racionales e irracionales con los símbolos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, respectivamente, entonces:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Es decir, $\mathbb{R}$ es la unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

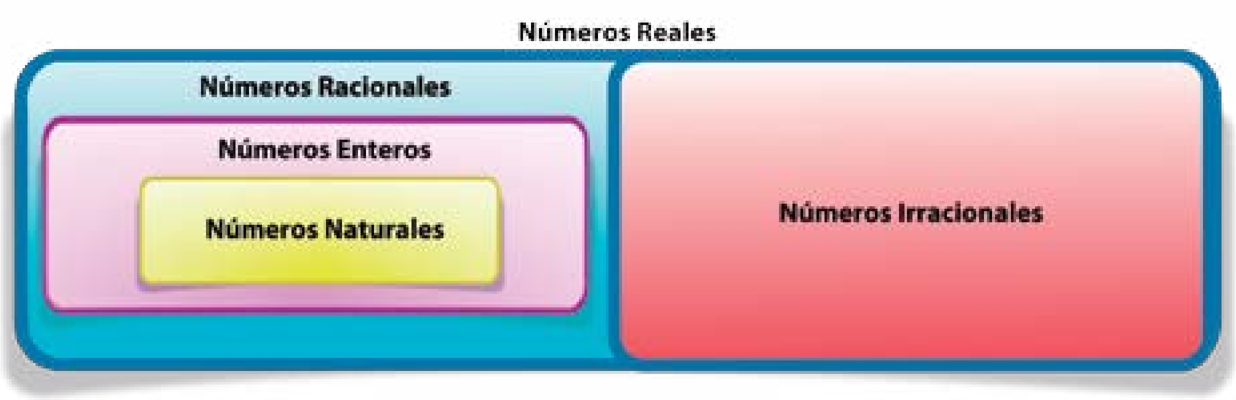
Los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ tienen la siguiente propiedad:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

Esto significa que la intersección de tales conjuntos es vacía (no existen números que sean tanto racionales como irracionales).

Este conjunto será importante en lo que resta del libro, para los cursos de Matemática posteriores, e incluso, para pensar y estudiar las diversas aplicaciones de la Matemática en la cotidianidad, en el contexto y en otras disciplinas.

Un diagrama que ilustra los conjuntos numéricos que hemos estudiado a lo largo del nivel de Educación Primaria y Media se presenta a continuación.



¿Cómo calcular la raíz cuadrada de un número?

Hay muchas maneras de calcular la raíz cuadrada de un número. La más idónea es utilizando la calculadora. La mayoría de éstas tienen la tecla (o comando) “raíz cuadrada”. Otra forma, basada en la aproximación la mostramos en seguidas.

Por ejemplo, si deseamos calcular la raíz cuadrada de 2, esto es:

$$\sqrt{2}$$

Tengamos presente que:

La raíz cuadrada del número x se define como $\sqrt{x} = y$ si, y sólo si, $x = y^2$

Aquí $x \geq 0$

Entonces, debemos obtener un número cuyo cuadrado sea igual a 2. Veamos:

Como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, entonces $1 < \sqrt{2} < 2$

Ahora nos aproximaremos un poco más:

Como $(1,4)^2 = 1,96$ y $(1,5)^2 = 2,25$, entonces $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

Y como $(1,41)^2 = 1,9881$ y $(1,5)^2 = 2,0164$, entonces:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Este proceso lo podemos repetir tantas veces como queramos y atendiendo al grado de aproximación que necesitemos.

Si empleamos la calculadora, obtendremos:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242097$$

En la lección que sigue les mostraremos cómo calcular la raíz de un número usando la calculadora.

> Dependiendo del tipo de cálculos que hagamos, decidiremos qué grado de aproximación seguir para los números reales.

El método de Bakhshali. Consiste en calcular una aproximación para $\sqrt{x}$, la cual aparece en un manuscrito antiguo (llamado *manuscrito de Bakhshali*, India). Veamos:

$$\sqrt{x} \approx \frac{n^4 + 6n^2x + x^2}{4n^3 + 4nx}$$

donde n es un número tal que n^2 es el cuadrado más cercano a x. Ilustremos la aplicación de este método para aproximar $\sqrt{2}$.

El cuadrado más cercano a 2 es el 1. Por lo tanto:

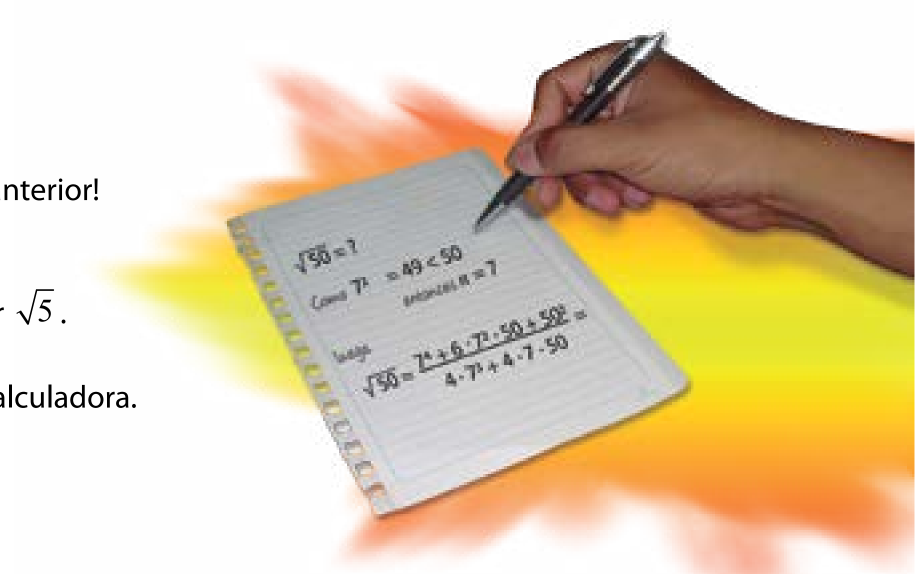
$$\sqrt{2} \approx \frac{1^4 + 6\cdot 1^2 \cdot 2 + 2^2}{4\cdot 1^3 + 4\cdot 1\cdot 2} = \frac{1+12+4}{4+8} = \frac{17}{12} = 1,41\widehat{6}$$

La cual es una buena aproximación. Pero si colocamos $n = 1,4$ obtenemos:

$$\sqrt{2} \approx \frac{1,4^4 + 6\cdot 1,4^2 \cdot 2 + 2^2}{4\cdot 1,4^3 + 4\cdot 1,4\cdot 2} = \frac{3,8416 + 23,52 + 4}{10,976 + 11,2} = \frac{31,3616}{22,176} = 1,41\widehat{421356}$$

¡Una aproximación aún mejor que la anterior!

- Apliquen este método para aproximar $\sqrt{5}$.
- E igual con el número $\sqrt{99}$.
- Comparen con el valor que arroja la calculadora.



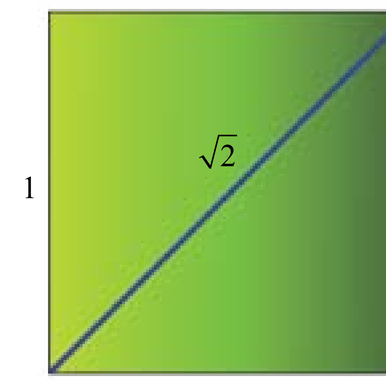
$\sqrt{2}$ es un número irracional

Si construimos un cuadrado de lado 1 y trazamos una de sus diagonales, la medida de esta diagonal es $\sqrt{2}$ (veamos el gráfico que sigue). Esto ya lo dedujeron los *Pitagóricos*, nombre con el que se conoció a los miembros de la *Escuela Pitagórica*, en la que se cultivaba la astronomía, la matemática, la música y la filosofía. En ese momento histórico, los únicos números que se conocían eran los racionales, es decir, números de la forma:

$$\frac{a}{b}$$

Donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ (a y b pertenecen al conjunto de los números enteros y b es distinto de cero).

Así que descubrir que había números que no podían escribirse de esta manera (es decir, los irracionales) significó una crisis para sus creencias y principios. Veamos la prueba de que $\sqrt{2}$ es un número irracional.



Para ello, procederemos tal como hicieron los griegos, empleando un método conocido como "reducción al absurdo". Supongamos lo contrario, que $\sqrt{2}$ es racional. En tal caso, podría escribirse que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

para ciertos enteros a y b, con $b \neq 0$. Supongamos, además, que $\frac{a}{b}$ ya ha sido simplificada, es decir, que el numerador y el denominador no tienen factores comunes. Ahora, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Multiplicando cada miembro de la igualdad por b^2, obtenemos:

$$2 \cdot b^2 = a^2$$

Esta expresión plantea que el número a^2 es par (ya que se escribe como el producto de 2 por un entero). Aquí nos apoyaremos en un hecho importante: si el cuadrado de un número es par, entonces tal número también es par.

Así, a debe ser par, y podemos escribirlo como:

$$a = 2 \cdot k$$

Además, $a^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$ Y sustituimos este valor en la ecuación $2 \cdot b^2 = a^2$:

$$2 \cdot b^2 = a^2 = 4 \cdot k^2 \text{, de donde: } 2b^2 = 4k^2$$

Dividiendo por 2 ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$b^2 = 2 \cdot k^2$$

Por lo tanto, el número b^2 es par también. En consecuencia, b es par.

Pero es absurdo que tanto a como b sean pares al mismo tiempo, de ese modo tendrían como factor común al 2, y habíamos supuesto que $\frac{a}{b}$ no tenían factores comunes.

Al hallar un absurdo, este método permite concluir que:

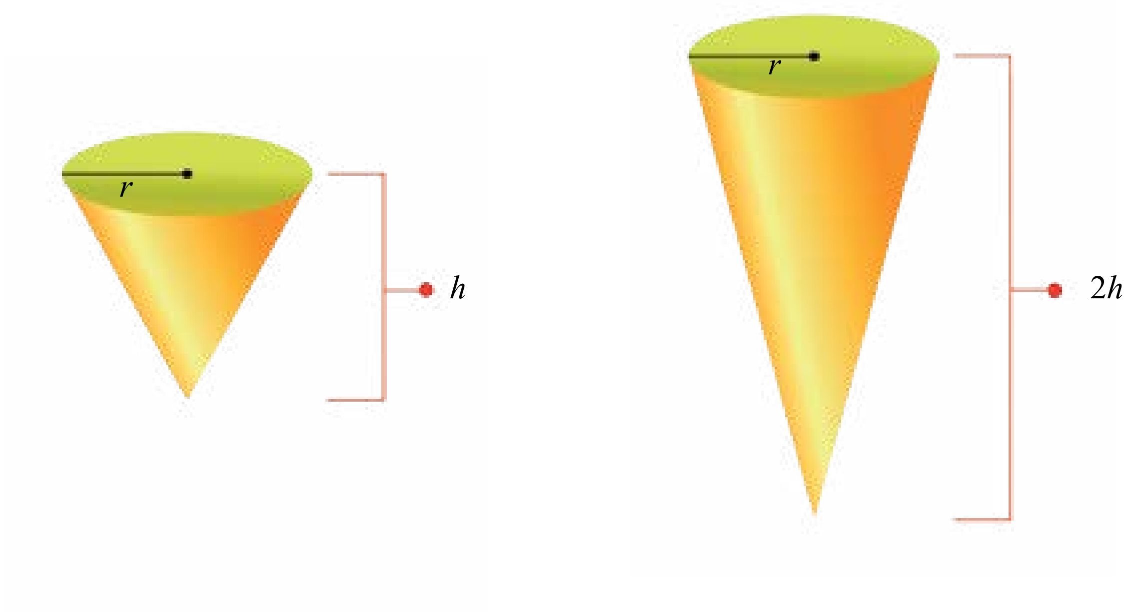
$\sqrt{2}$ no es racional.

Esta demostración es de suma importancia histórica y matemática. Revísenla con detalle junto a su profesora o profesor.

Famosa heladería del estado Mérida

Actividades

1 Un **envase de mayor capacidad**: la heladería decidió fabricar dos tipos de conos (veamos el gráfico que sigue). El precio del helado con el cono de mayor altura será tres veces mayor que el primero.



- ¿Cuál le conviene a la consumidora o al consumidor?
- ¿Cuál proporciona mayor ganancia a la empresa? ¿Por qué?

2 Seleccionen un producto cuyo envase sea cilíndrico o en forma de paralelepípedo. Además, este producto debe estar disponible en varios tamaños.

- Construyan una tabla con los datos sobre su capacidad, altura, radio o medida de sus lados (según sea un cilindro o un paralelepípedo).
- ¿Existe proporcionalidad entre el precio de los productos envasados y su capacidad?
- ¿Qué números irracionales se presentan en sus cálculos?

3 Los números que siguen, ¿son racionales o irracionales?

- $0{,}24681012141618202224 26\ldots$
- $1{,}3579111315171921232527\ldots$
- $0{,}101001000100001000001\ldots$
- $B = 0{,}12345678910111213...$
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{5^2}$
- $\sqrt{0}$
- $\sqrt{1}$

4. Aproximen a milésimas los siguientes números reales (empleen la calculadora):

$$\pi$$
$$e$$
$$\sqrt{10}$$

5. Apliquen el método de *Bakhshali* para aproximar $\sqrt{20}$, $\sqrt{82}$ y $\sqrt{181}$.

6. Investiguen en qué otras situaciones del contexto se presentan números irracionales. Comenten con su grupo.

Los números irracionales y la peste en Atenas

El que sigue es uno de los problemas clásicos de la matemática y posee un valor histórico importante.

Una leyenda cuenta que una peste azotó la ciudad de Atenas (en Grecia), motivo por el cual le preguntaron al dios Apolo cómo podrían acabar con la peste. Éste les contestó que debían duplicar el volumen del altar, que tenía forma de cubo de lado con medida x.

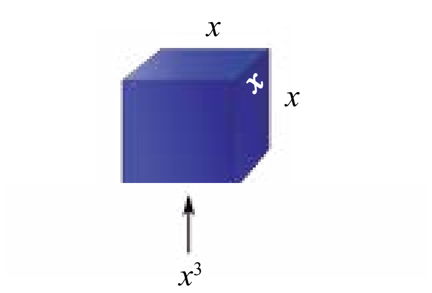
Para ello, duplicaron la medida de los lados, es decir, construyeron un cubo de lado $2x$. Pero, sorprendentemente, la peste se acentuó aún más. Observemos que los atenienses, según esta leyenda, cometieron un error.

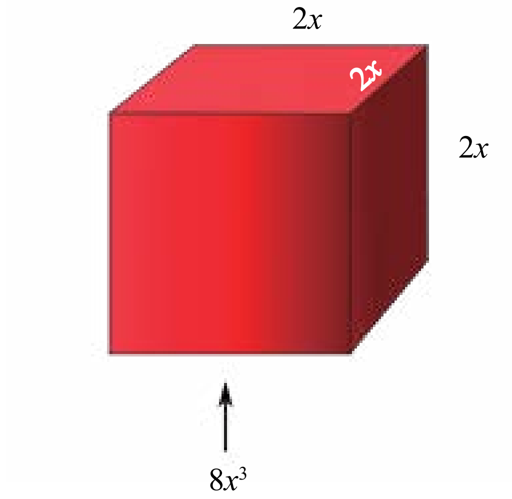
El volumen de un cubo cuyo lado mide x es x^3.

Pero si se duplica la medida de sus lados, entonces el volumen del otro cubo es:

$$(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$$

Así que el volumen del segundo cubo no es el doble del primero, sino ocho veces éste.





¿Cuál debe ser entonces la medida de los lados del segundo cubo para que su volumen sea el doble del primero?

Veamos. Necesitamos que se verifique la ecuación:

$$(ax)^3 = 2x^3$$

Donde ax representa la medida del segundo cubo, la cual se puede ver como el producto de un número real a por x. En consecuencia, podemos escribir $a^3x^3 = 2x^3$. La cual es equivalente a:

$$a^3 = 2$$

Aquí dividimos por x^3 cada miembro de la igualdad. Por tanto, este número a tiene la forma:

$$a = \sqrt[3]{2}$$

***a* es la raíz cúbica de 2** y es un número irracional imposible de escribir como el cociente de dos números enteros. Una aproximación decimal de este número irracional es:

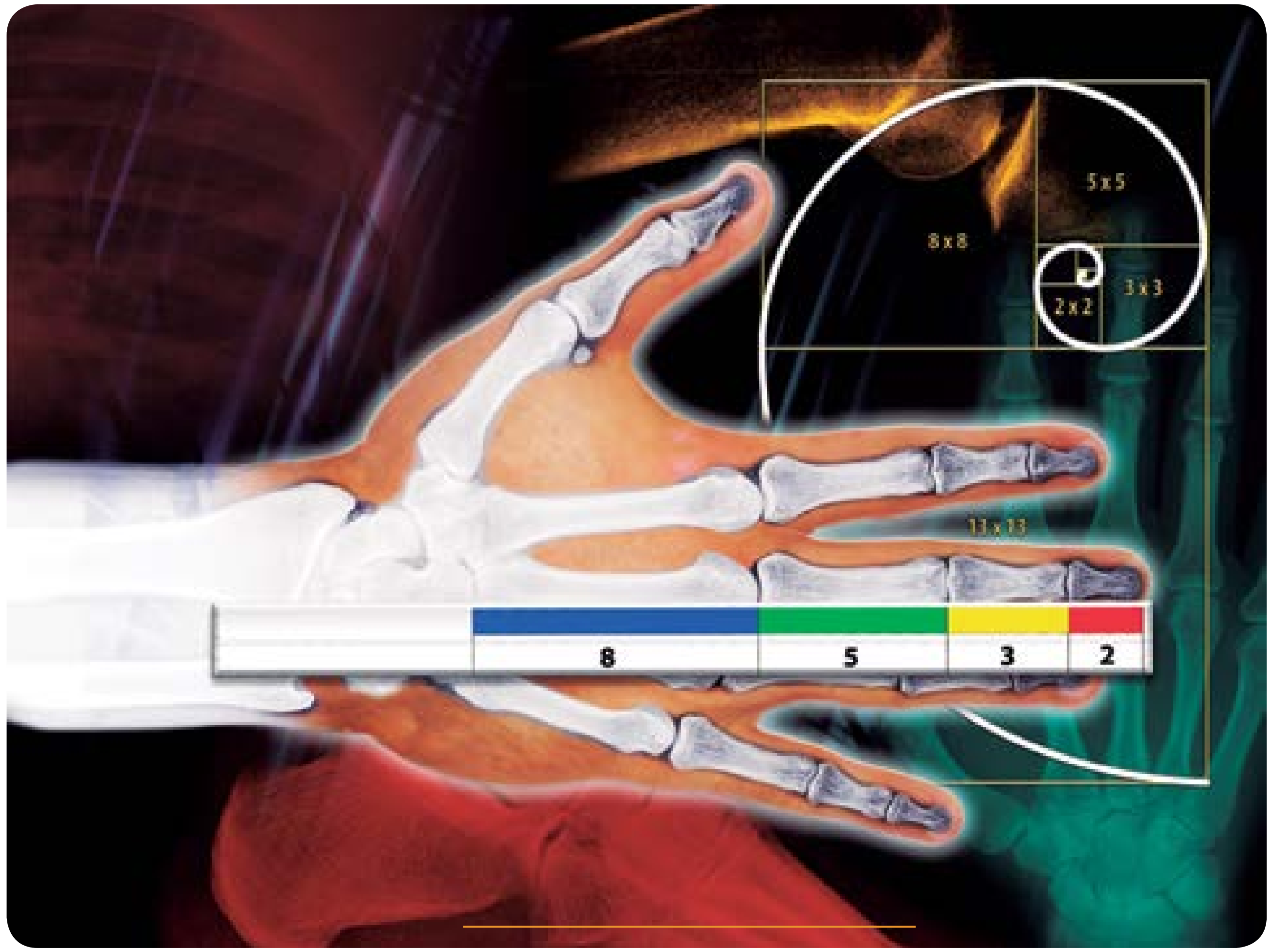
$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599210498948731647672106072782$$

que puede obtenerse con una calculadora o paquete de cálculo. Este número, por definición, cumple que elevado a la potencia 3, se obtiene 2. Sin embargo, si consideramos una aproximación de $\sqrt[3]{2}$, entonces su cubo será aproximado a 2.

2

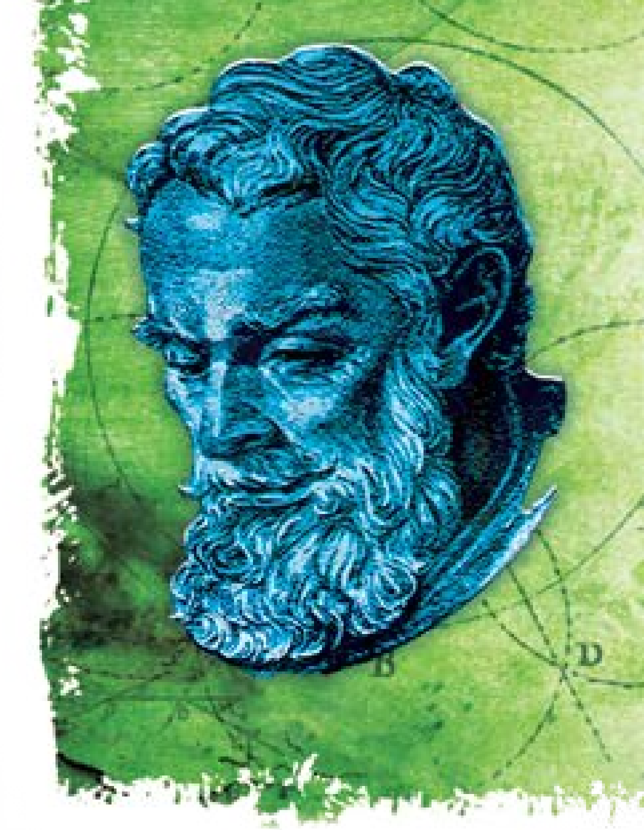
DIBUJANDO CON LOS ANTIGUOS

Operaciones en $\mathbb{R}$. Propiedades de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ es denso, ordenado y no acotado). Recta numérica. Racionalización



La regla no graduada y el compás

El estudio de los números reales, que iniciamos en la lección anterior, nos permite ahora pensar en la **construcción de un número real** en la recta numérica, es decir, en emplear la regla y el compás para representar un número real en la recta numérica. Aunque aquí debemos hacer una observación: los instrumentos geométricos clásicos (aquellos que fueron empleados en los *Elementos de Euclides* hace más de 2.000 años) son la regla no graduada (sin marcas para indicar las unidades de medida) y el compás. La regla que emplearemos no puede usarse para medir sino solamente para trazar segmentos de recta, y el compás servirá para trazar arcos de circunferencia y circunferencias.



En lo que sigue usaremos tales instrumentos geométricos de la manera como lo hicieron grandes matemáticos (dedicados a la Geometría) como **Euclides, Arquímedes, Tsu Ch'ung-Chin**, e incluso, de amantes de la matemática como el filósofo Hobbes. Así que dibujaremos y construiremos junto a estos grandes personajes de la historia de la matemática, es decir, junto a estos antiguos.

De inmediato surgen dos preguntas importantes:

- ¿Todos los números reales se pueden construir con regla no graduada y compás?
- Si ese es el caso, ¿cómo los construimos?

Números reales tan importantes como el número de oro (o razón áurea) pueden construirse. El número de oro representa una de las formas de juzgar la belleza de la mujer y del hombre, distinta a las visiones estereotipadas que promueven algunos medios de comunicación en la modernidad: en la que ambos, mujer y hombre, se visualizan como objetos de concurso y de banalización, e incluso, permite juzgar la belleza de muchos otros seres vivos, de ciertas construcciones arquitectónicas, de algunas obras plásticas y musicales, así como evaluar el diseño de unos escalones, ¡pues sí!, hay escalones que se nos hacen más difíciles de subir, en cambio, otros no y ello tiene que ver con el hecho de que su diseño se ajuste o no al número de oro.

En esta lección construiremos, con regla y compás, el número de oro en la recta Real y además el rectángulo dorado. Y con ello, queremos aportar una idea matemática que permitirá repensar el concepto de belleza que tenemos. Por otra parte, las construcciones que estudiaremos se emplean en una diversidad de situaciones, como por ejemplo: en la construcción de una vivienda, al edificar paredes paralelas, perpendiculares, al trazar rectángulos para las puertas y ventanas, al diseñar una escalinata, al ubicar el centro de un círculo en trabajos de mampostería, al representar la región geométrica que abarca algún terreno, en la elaboración de piezas y mecanismos de precisión, como tornillos, engranajes, resortes, cerraduras, en el diseño de la pantalla para un foco de luz y en tantos otros casos.

Escalera Yaritagua
Barrio Julián Blanco
Petare, edo. Miranda

El número de oro

Si dividimos la estatura entre la altura del ombligo, o las longitudes de falanges consecutivas (la longitud mayor debe ser el numerador de tal cociente), el largo de la ceja entre el largo del ojo, el alto de la cabeza entre su ancho, o el largo de un escalón entre su altura, y en tantos otros ejemplos se presenta, aproximadamente, un número fabuloso:

El **número de oro** (que representaremos con la letra griega *phi*: φ)

Este número se conocía desde hace más de 2000 años. Y como se presenta en muchas de las proporciones del cuerpo humano, tanto de la mujer como del hombre, se consideró que éste había sido el patrón con el que Dios nos creó. Así, también se le denomina **proporción divina** o **razón áurea**.

De hecho, este número también se presenta en muchos otros seres vivos. Posteriormente, este número se usó en la arquitectura, pintura, música e ingeniería, con la idea de trasladar la belleza a sus creaciones y obras. Veamos un ejemplo.

Los datos que siguen se tomaron de un grupo de jóvenes que viven en las montañas del Municipio Montes (Estado Sucre). Nos concentramos en calcular la proporción entre la estatura y la altura del ombligo (los nombres que exponemos son etiquetas).

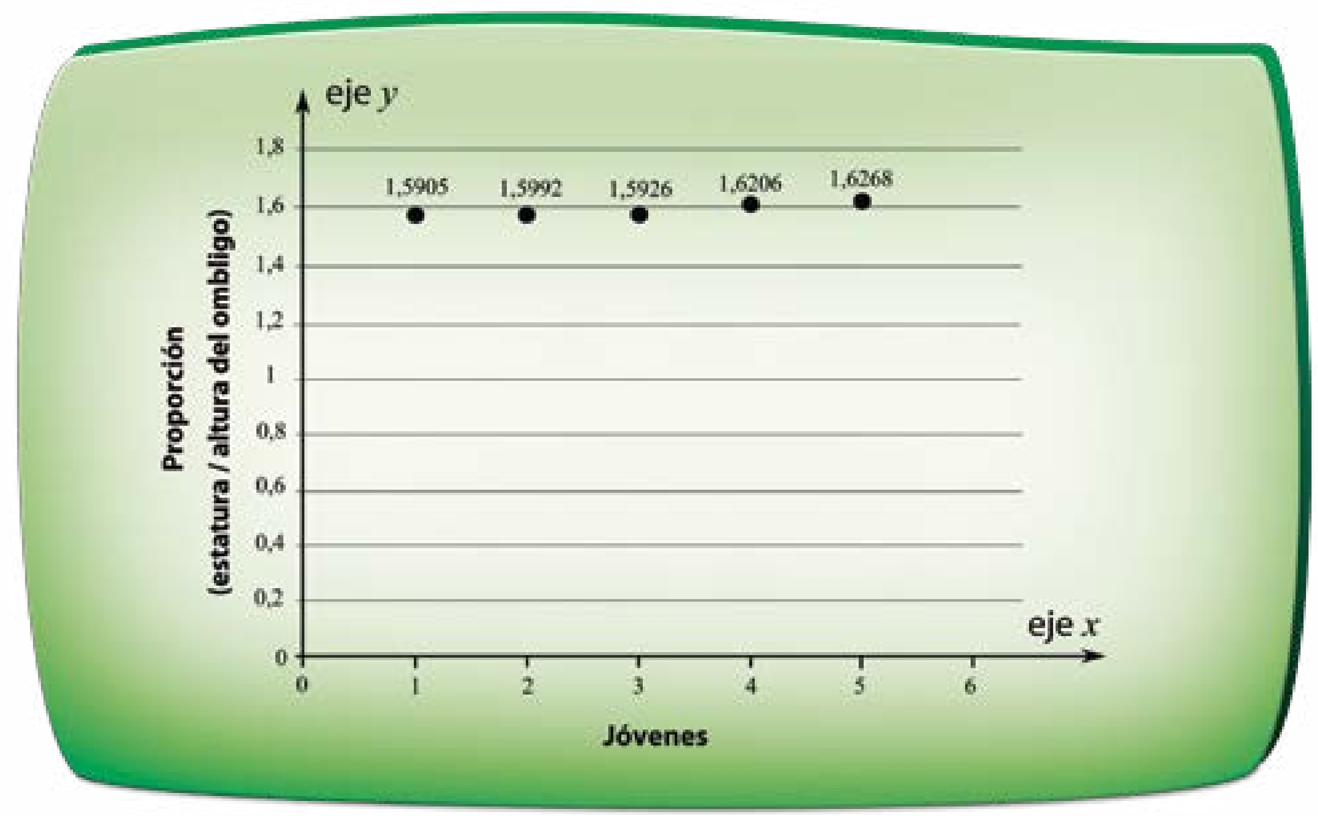
La proporción áurea en un grupo de jóvenes (municipio Montes, estado Sucre)

	Nombre	Estatura (e)	Altura del ombligo (o)	$\frac{e}{o}$
1	María	160	100,6	1,5905
2	Kai	162	101,3	1,5992
3	Carlos	165	103,6	1,5926
4	Carmen	164	101,2	1,6206
5	Juan	170	104,5	1,6268

Nota: las columnas dos y tres presentan datos en centímetros.
Los datos en la última columna se aproximaron a cuatro cifras decimales

Adicionalmente, hemos representado estos datos en un gráfico.

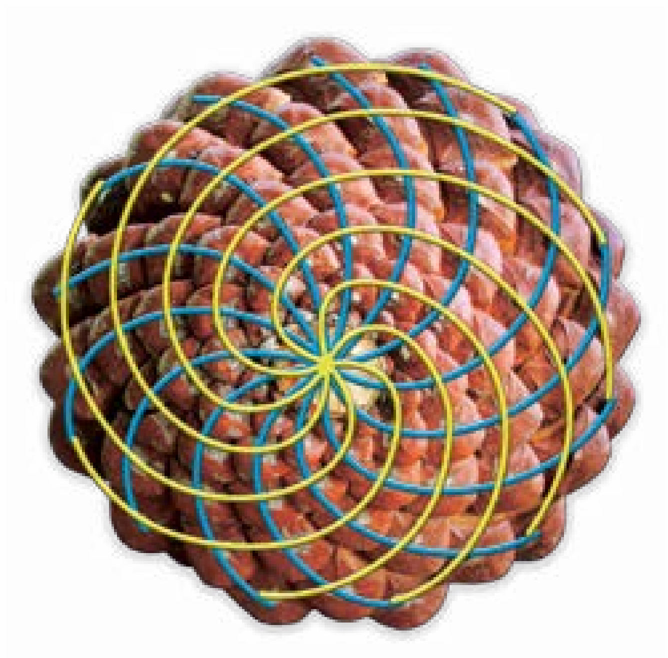
La proporción estatura / altura del ombligo en un grupo de jóvenes



Observamos entonces que la diferencia entre estas proporciones es pequeña, es decir, todas se aproximan a cierto número: ¡al **número de oro**! Su expresión es la que sigue:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398... \approx 1,618$$

Justo un medio de la suma de uno y raíz cuadrada de cinco que es aproximado a uno con seiscientas dieciocho milésimas (si tomamos solamente tres cifras decimales). Resulta curioso que, tal como comentamos al inicio de esta lección, este número se presenta para muchas otras proporciones del cuerpo humano, en la elaboración de algunos instrumentos de cuerda (como el violín), en obras pictóricas como la Gioconda, arquitectónicas (como el Partenón de Atenas y la Villa Savoye), al dividir el número de espirales presentes en la flor del Girasol, etc.



Espirales presentes en una piña tropical vistos desde la parte superior

En la figura, podemos observar el número de espirales, en un sentido y en el otro, en esta piña tropical que se muestra es 13 y 8, respectivamente.

Luego:

$$\frac{13}{8} = 1,625 \approx \varphi$$

Su diferencia con φ es aproximadamente una centésima.

Ahora bien, **existen números reales que se pueden construir con regla y compás y otros que no.** Las secciones que siguen se ocupan de estas ideas. Para ellas necesitaremos regla y compás. Este compás puede ser el que se consigue en las librerías, o bien, un simple pabilo o hilo atado cerca de la punta de un lápiz.

El número de oro se emplea como patrón para la construcción de los violines. Investiguen en qué otros instrumentos se usa este número

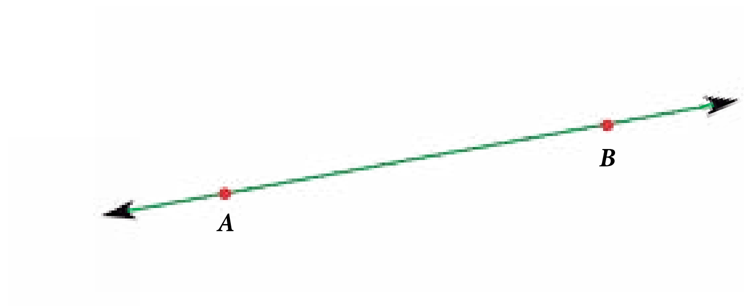
¿Qué números son construibles?

Un número real b es construible si podemos construir un segmento de longitud b a partir de otro segmento de longitud 1 empleando sólo regla y compás.

Debemos tener presente que existe una serie de construcciones básicas permitidas, las cuales son:

- Trazar una recta por dos puntos dados.
- Trazar una circunferencia con centro y radio conocidos.
- Trazar una paralela a una recta.
- Trazar una perpendicular a una recta.
- Trazar la mediatriz de un segmento (es decir, encontrar su punto medio).

Ilustremos y ejemplifiquemos cada una de estas construcciones básicas.



Construcción 1

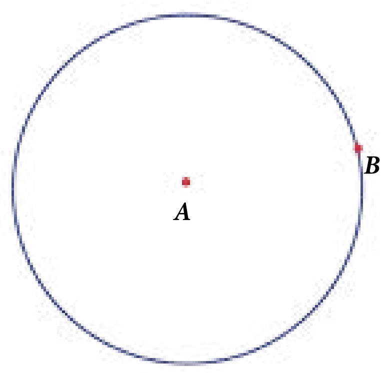
Recta que pasa por dos puntos.

Dados dos puntos podemos trazar una recta que pasa por ellos.

Construcción 2

Trazado de una circunferencia.

Dados dos puntos podemos trazar una circunferencia de centro A y radio AB.

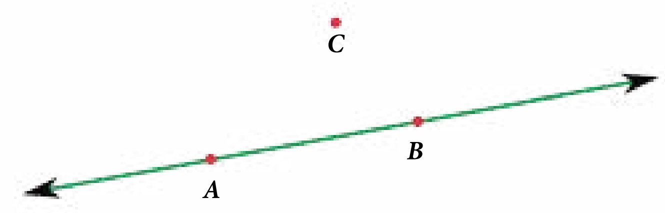


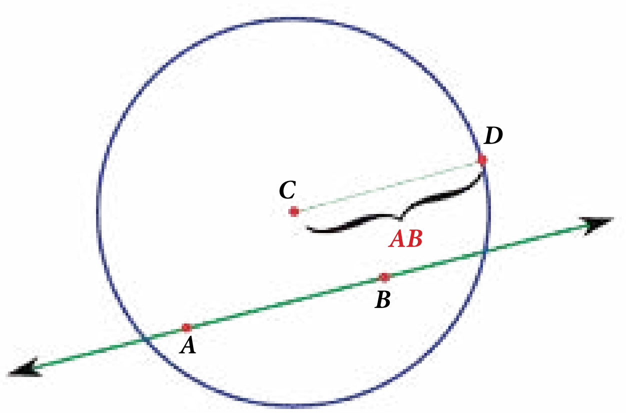
¿Y cómo trazamos paralelas, perpendiculares y mediatrices? Para ello, sugerimos a todos y todas que sigan los pasos indicados y hagan estas construcciones en sus cuadernos de notas.

Construcción 3

Trazado de rectas paralelas.

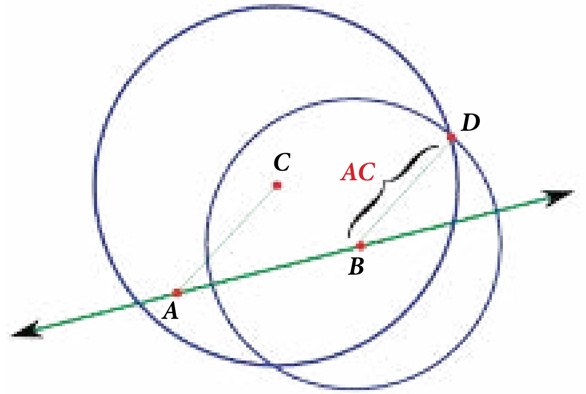
Consideremos una recta que pasa por A y B, y dado un punto C fuera de esta recta.

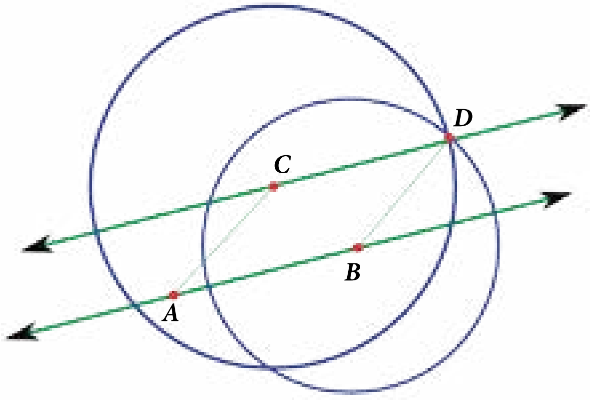




Con el compás hacemos abertura AB. Luego trazamos la circunferencia de centro C y radio AB.

Con el compás hacemos abertura AC. Luego trazamos la circunferencia de centro B y radio AC.



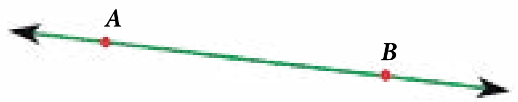


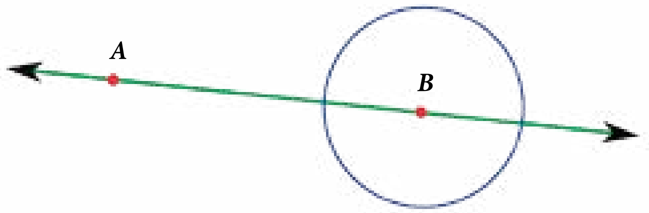
Finalmente, trazamos la recta que pasa por los puntos C y D. Así, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas).

Construcción 4

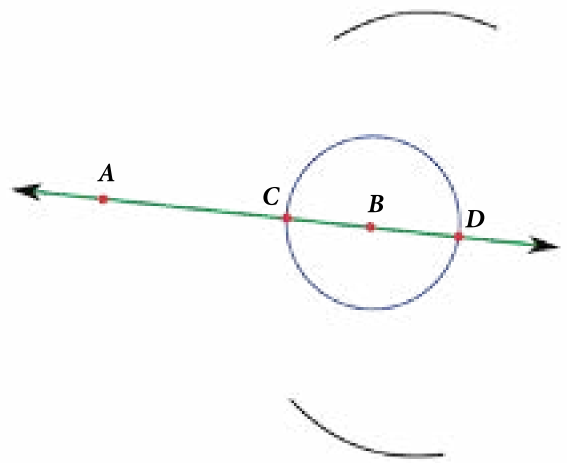
Trazado de rectas perpendiculares.

Consideremos una recta que pasa por los puntos A y B. Trazaremos una perpendicular a ésta por el punto B.

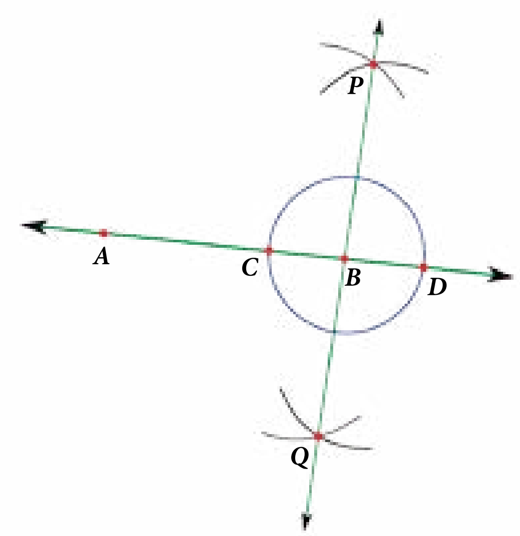




Con el compás hacemos centro en B y trazamos una circunferencia con cualquier radio.



Ahora hacemos centro en D y trazamos, con un radio mayor a BD, los arcos indicados (también pueden trazar la circunferencia).



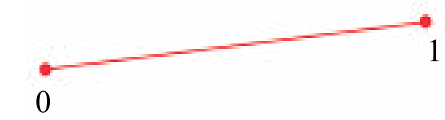
Con el mismo radio tomado antes, hacemos centro en C y cortamos los otros dos arcos mostrados en la figura. La recta buscada es justo la que pasa por los puntos P y Q.

Ahora, si queremos trazar la mediatriz de un segmento $\overline{CD}$ (es decir, la recta perpendicular a $\overline{CD}$ que pasa por el punto medio de $\overline{CD}$) sólo debemos modificar levemente el procedimiento mostrado antes.

- ¿Cómo lo haríamos?
- Socialicen esto con sus compañeras y compañeros.

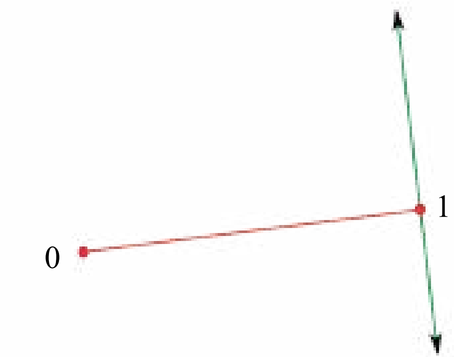
Construyamos a $\sqrt{2}$

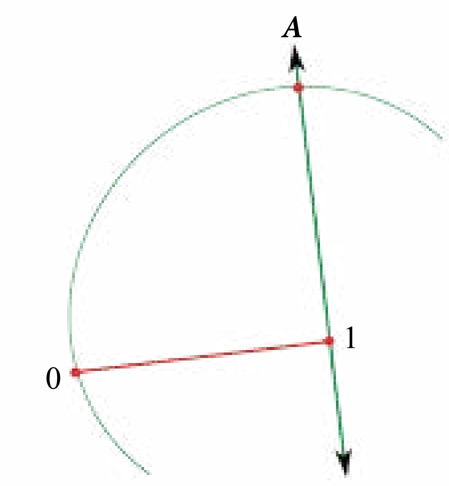
Una de las construcciones más sencillas es la de la raíz cuadrada de dos. Con apoyo en las construcciones básicas que hemos estudiado ello puede hacerse. Las gráficas que siguen ilustran este proceso.



Partimos de un segmento de longitud 1.

Trazamos una recta perpendicular al segmento dado que pase por el punto señalado con 1.





Hacemos centro en 1 y trazamos un arco que corte la perpendicular en A.

Con esto último notemos que el triángulo $\Delta 01A$ es rectángulo y sus catetos miden 1.

¿Pero cuál es la medida de su hipotenusa? Para ello podemos utilizar el Teorema de Pitágoras para expresar la relación entre el cuadrado de la medida de sus lados.

En consecuencia:

$$(0A)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

Y calculando la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad $(0A)^2 = 2$, tenemos que:

$$\sqrt{(0A)^2} = \sqrt{2}$$

Pero el lado izquierdo de esta última igualdad puede simplificarse de la manera que sigue:

$\sqrt{(0A)^2} = \sqrt[2]{(0A)^2}$ — Aquí sólo escribimos el índice de la raíz

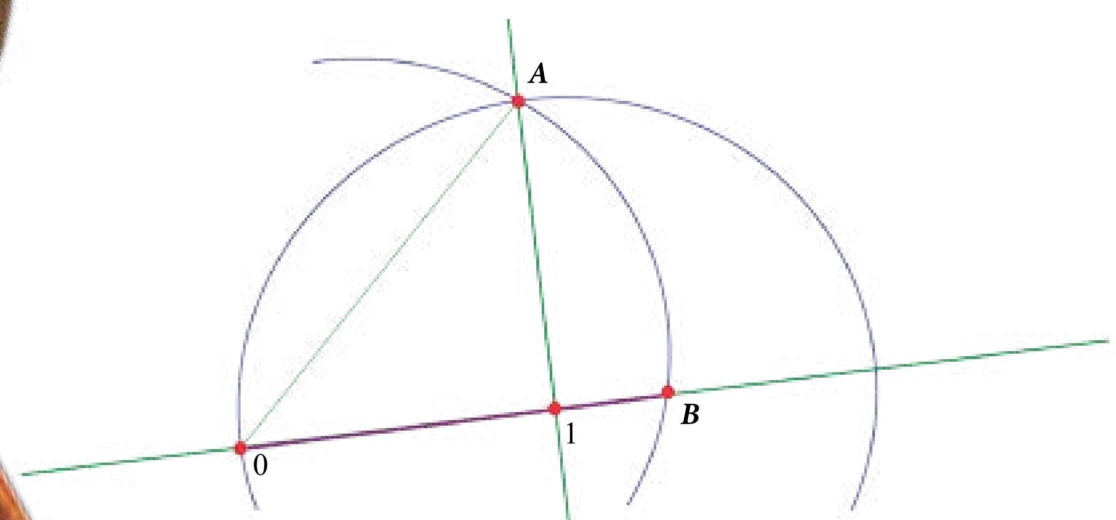
$= (0A)^{\frac{2}{2}}$ — Ahora dividimos el exponente de la cantidad subradical entre el índice de la raíz. Este cociente es el exponente de OA

$= 0A^1$ — Simplificamos la fracción $\frac{2}{2}$

$= 0A$ — Y omitimos el 1 como exponente de OA, pues se sobreentiende

Por tanto: $0A = \sqrt{2}$

Esto nos da la idea de trazar un arco de centro 0 y radio $0A = \sqrt{2}$ de manera que corte la recta que contiene al segmento inicial. Veamos:



Construcción del número $\sqrt{2}$

Así, el segmento $\overline{0B}$ tiene medida $\sqrt{2}$.

¡ Hemos construido $\sqrt{2}$!

Construyamos el número de oro

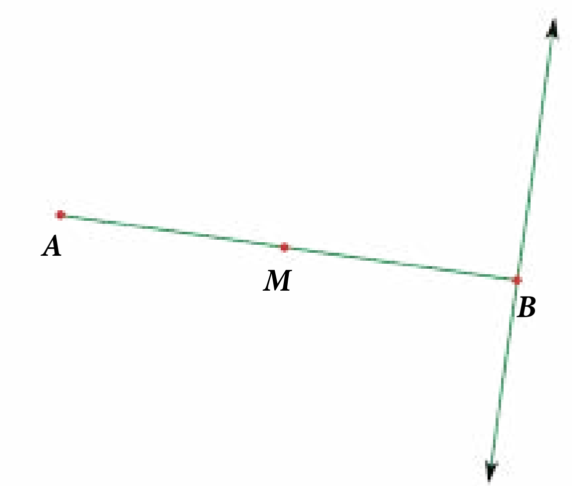
¡Ese fabuloso número de oro puede construirse! Sí, justo el número que representa la belleza humana (de la mujer y del hombre). Recordemos aquí que concepciones estereotipadas y tergiversadas como el 90-60-90, la cual no se corresponde con la belleza y tampoco con el número de oro. En cambio, el número de oro está presente en todas las mujeres y hombres, independientemente de su contextura, estatura y características fisonómicas.

Así que seguimos acompañando a algunos de esos grandes matemáticos: como Euclides y Arquímedes. A continuación mostramos el procedimiento para construir el número de oro. Para ello les proponemos estudien esta construcción, con ayuda de su profesora o profesor.

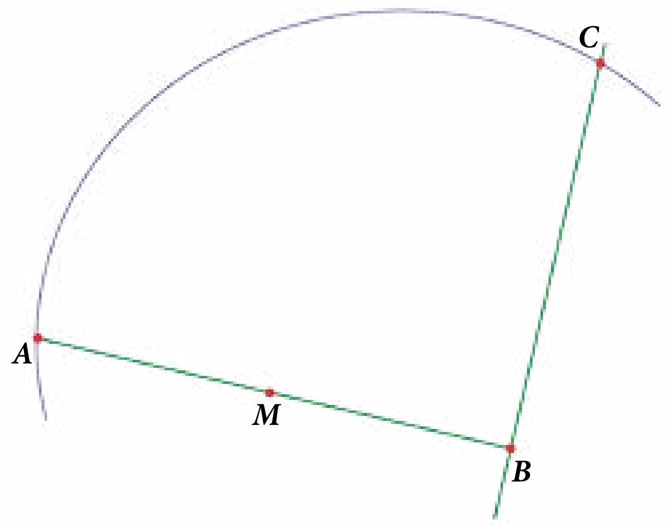
Construcción del número de oro

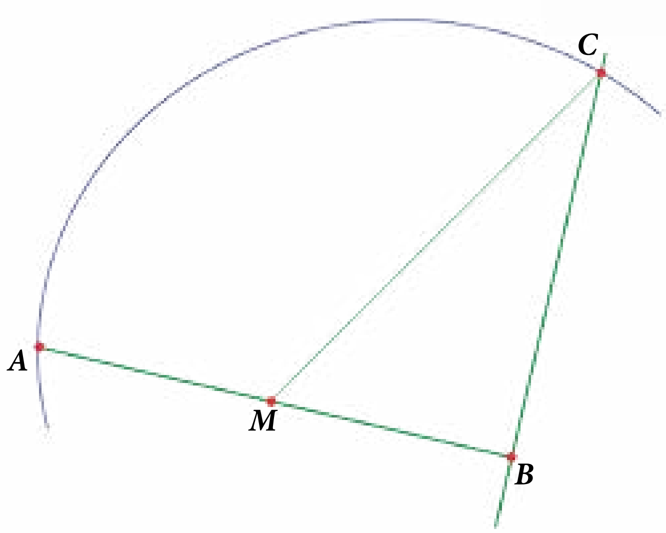
Partimos de un segmento $\overline{AB}$ de longitud 1.

Ubicamos el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Y además, trazamos la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por el punto B (estos pasos de la construcción se dejan a las y los estudiantes).



Con el compás llevamos la medida AB sobre la recta perpendicular que trazamos. Esto se hace trazando el arco de circunferencia de centro B y radio AB. Así, $AB = BC$ (pues ambos son radios de esta circunferencia).





Luego trazamos el segmento $\overline{MC}$.

Observemos aquí que el segmento $\overline{MC}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo ΔMBC. Por tanto, de acuerdo con el **Teorema de Pitágoras**:

$$(MC)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$

Calculando la raíz cuadrada a ambos lados de esta igualdad tenemos que (de acuerdo con una de las propiedades que listamos al final de esta lección):

$$\sqrt{(MC)^2} = MC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

Con lo cual:

$$MC = \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$ Calculando las potencias indicadas

$$= \sqrt{\frac{5}{4}}$$ Sumando las fracciones

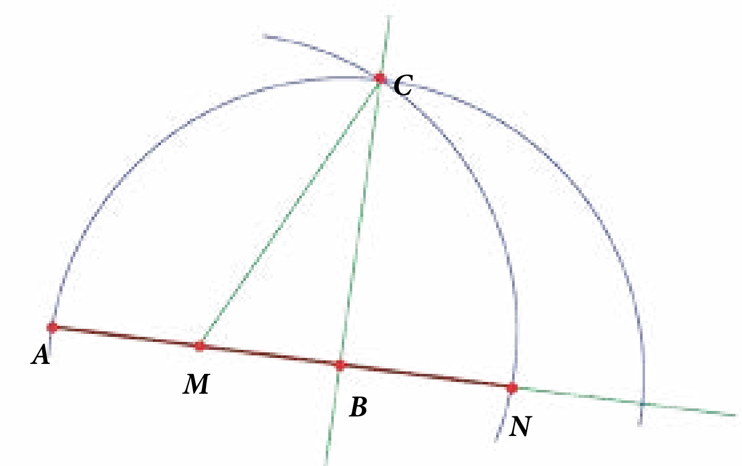
$$= \sqrt{\frac{5}{2^2}}$$ Expresando a 4 como el producto de sus factores primos

$$= \sqrt{\frac{5}{2^2}}$$ Apoyándonos en una de las propiedades de la radicación: "raíz de un cociente" (**ver al final de la lección**)

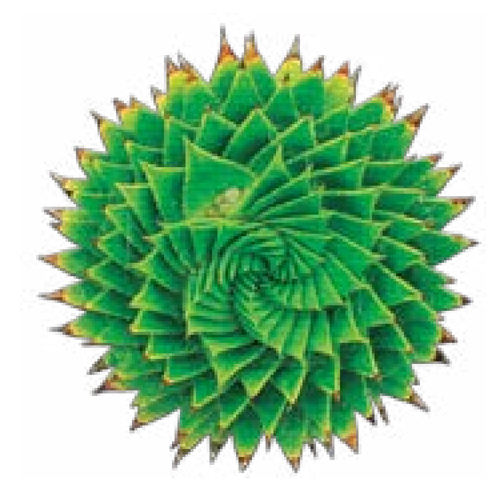
$$= \frac{\sqrt{5}}{2^{\frac{2}{2}}}$$ Aquí empleamos otra propiedad: "extracción de un factor de una raíz" (**ver también al final**)

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}$$ Como el exponente es igual a 1 puede omitirse

Finalmente, $AM + MC = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¡Precisamente el número de oro! Esta expresión nos da la idea de trazar el arco de circunferencia de centro M y radio MC. Veamos:



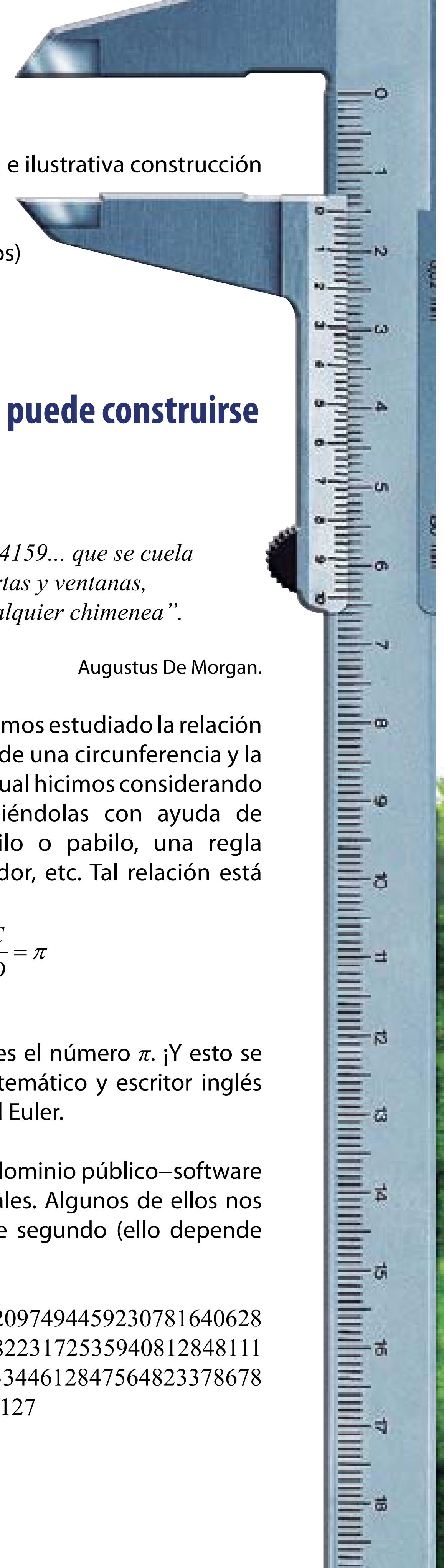
La construcción del ***número de oro***



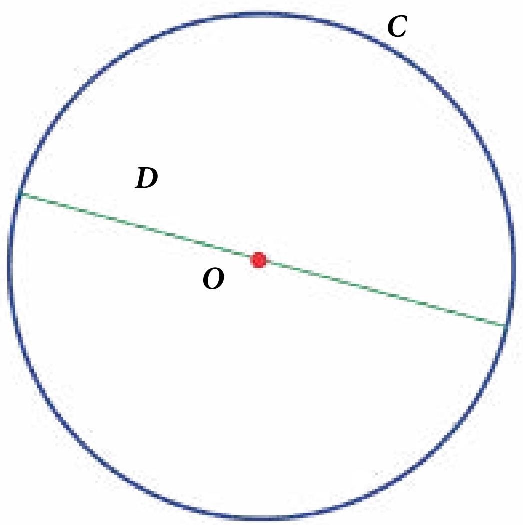
El ***número de oro*** está presente en algunas proporciones de especies vegetales

Con esto, el segmento AN representa al número de oro. Una bella e ilustrativa construcción de un número real.

De hecho, existen muchos otros números reales (más aún, infinitos) que también pueden construirse.



El número π "Pi" no puede construirse con regla y compás



"... este misterioso 3,14159... que se cuela por todas las puertas y ventanas, que se desliza por cualquier chimenea".

Augustus De Morgan.

En años anteriores hemos estudiado la relación que existe entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro, lo cual hicimos considerando varias circunferencias, midiéndolas con ayuda de instrumentos como un hilo o pabilo, una regla graduada, vernier o calibrador, etc. Tal relación está dada por la ecuación:

$$\frac{C}{D} = \pi$$

La longitud de la circunferencia entre la longitud del diámetro es el número π. ¡Y esto se cumple para cualquier circunferencia! Notación introducida por el matemático y escritor inglés William Jones en 1706; y popularizada por el matemático suizo Leonhard Euler.

Pi es un número irracional. Hoy día los programas de cálculo (de dominio público–software libre) determinan cientos, miles y cientos de miles de sus cifras decimales. Algunos de ellos nos informan de 300 de sus cifras decimales en menos de una décima de segundo (ello depende también de las características del computador). Por ejemplo:

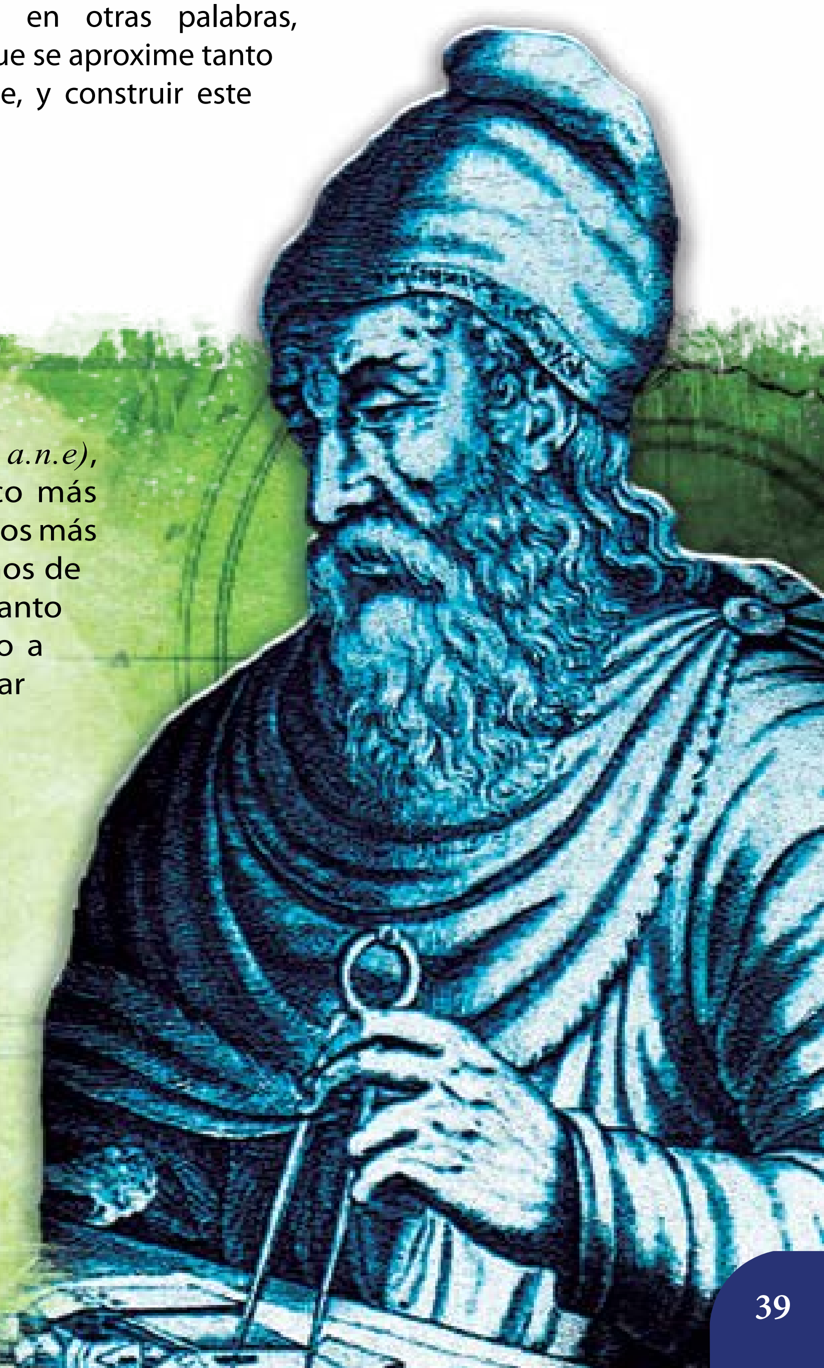
$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628
620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111
745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678
316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127

Antes de seguir, conversen con sus compañeras y compañeros las siguientes cuestiones:

- ¿Qué significa que π sea irracional?
- ¿Cuántas cifras decimales tiene π?

El número π no puede construirse con regla y compás. Además, existen muchos otros números reales (infinitos para ser precisos) que no pueden construirse con regla y compás. Es decir, sabemos que existen, pero no se les puede construir.

Lo que sí puede hacerse con estos números no construibles es construir aproximaciones racionales, en otras palabras, podemos considerar un número racional que se aproxime tanto como queramos al número no construible, y construir este número racional.



Arquímedes (287 *a.n.e* – 212 *a.n.e*), considerado el científico y matemático más importante de la Edad Antigua y uno de los más grandes de toda la historia, usó polígonos de 96 lados inscritos y circunscritos y llegó tanto a una buena aproximación de ***Pi*** como a idear un laborioso algoritmo para calcular ***Pi*** con cualquier precisión.

La aproximación de *Pi* debida a Arquímedes es:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{10}{70}$$

cuya expresión decimal es la que sigue:

$$3,140845... < \pi < 3,142857...$$

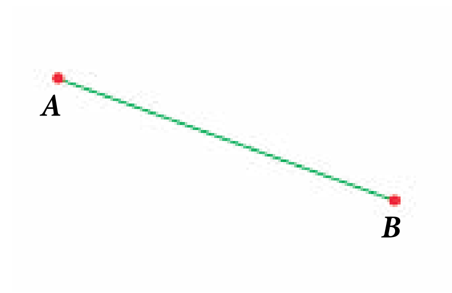
- En las construcciones que siguen deben tener a la mano regla y compás. Incluso, podrían apoyarse en una escuadra (considerando la cantidad de pasos que estas involucran).

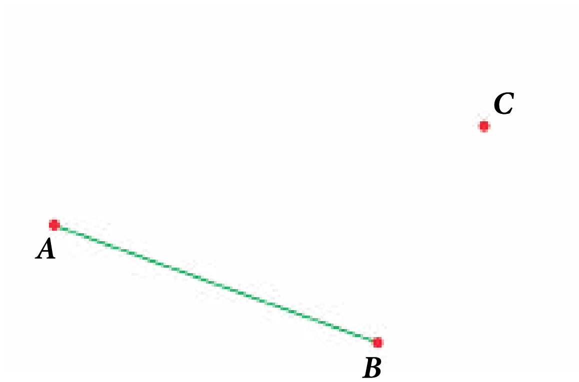
- Con ayuda de su profesor o profesora deben rehacer estas construcciones en sus cuadernos de notas.

Pero hay una construcción que se necesita conocer para abordar las lecturas sobre las aproximaciones de π, tiene que ver con la pregunta **¿cómo dividir un segmento en n segmentos congruentes**?

División de un segmento en n segmentos congruentes

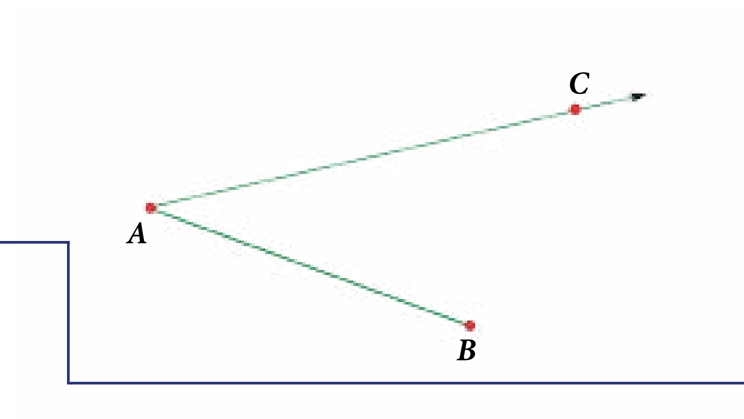
Consideremos un segmento $\overline{AB}$ y escojamos dividirlo en 3 segmentos congruentes (es decir, tres segmentos que tengan la misma medida). Nota: n puede ser cualquier número natural.

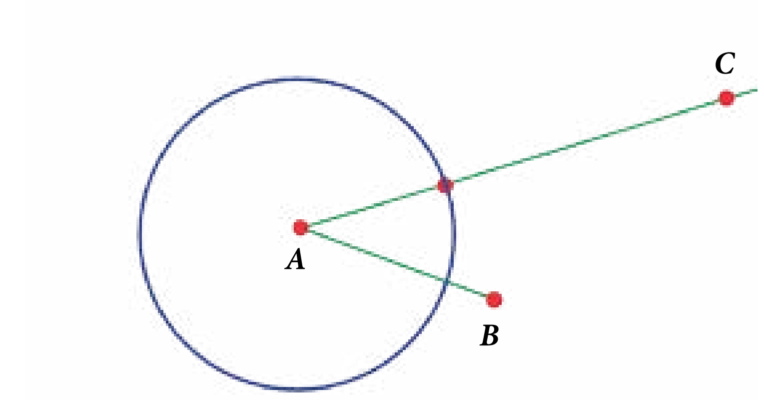




Seleccionemos un punto C cualquiera (que no se encuentre sobre la recta que pasa por A y B).

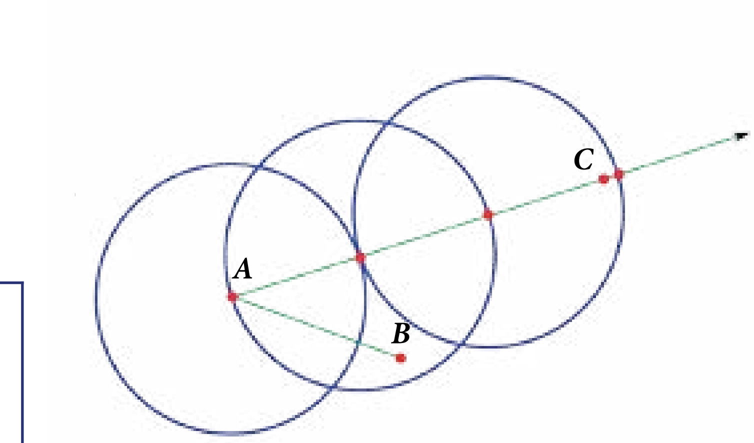
Trazamos el rayo de origen A y que pasa por C.

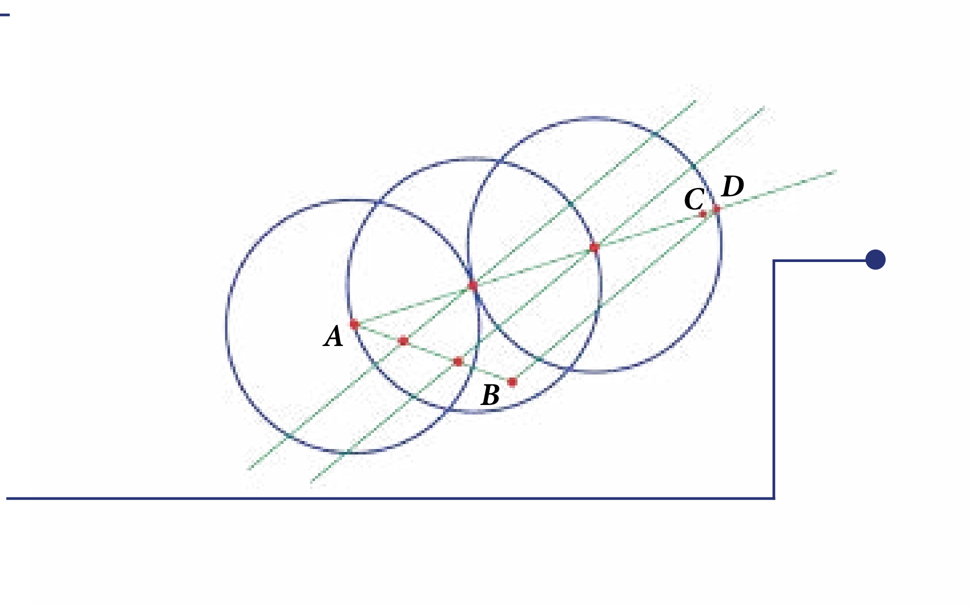




Ahora, con el compás hacemos centro en A y trazamos una circunferencia (o un arco) que corte al rayo (con el radio que queramos).

Ahora repetimos este proceso tal como mostramos a continuación:





Hasta aquí logramos ubicar en el rayo $\overrightarrow{AC}$ tres segmentos congruentes. Finalmente, proyectaremos estos segmentos en el segmento $\overline{AB}$. Para ello tracemos el segmento $\overline{BD}$ y las paralelas indicadas. De esta manera hemos dividido al segmento $\overline{AB}$ en tres segmentos congruentes.

¡Una bella y clásica construcción! Con esto ya podemos revisar las ideas de **Tsu Ch'ung-Chin** y de **Thomas Hobbes**.

Una aproximación de π realizada por Tsu Ch'ung-Chin

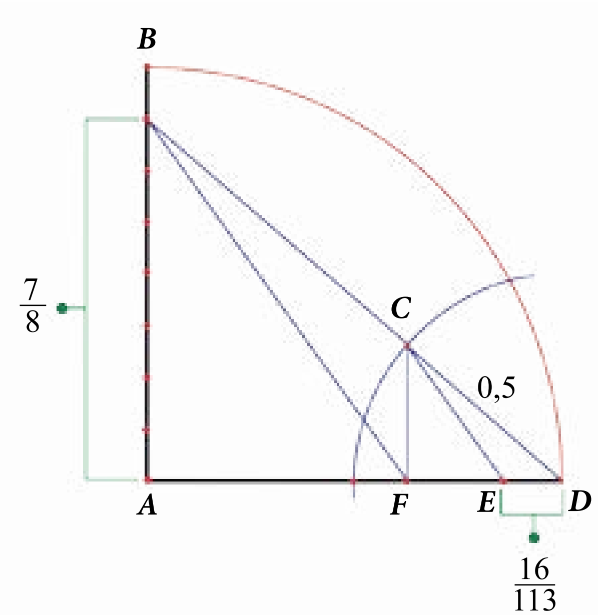
Tsu Ch'ung-Chin, famoso astrónomo chino del siglo V ideó un método con regla y compás que aporta una buena aproximación de ***Pi***:

Tsu trazó un cuadrante de radio 1. Luego dividió el segmento vertical en 8 partes y ubicó el punto B de manera que $\overline{AB}$ sea 7/8 del radio (veamos el gráfico que sigue). Trazó el segmento $\overline{BD}$, el punto medio de $\overline{AD}$ y el arco con centro en D, que pasa por el punto medio de $\overline{AD}$. Este arco corta a $\overline{BD}$ en C.

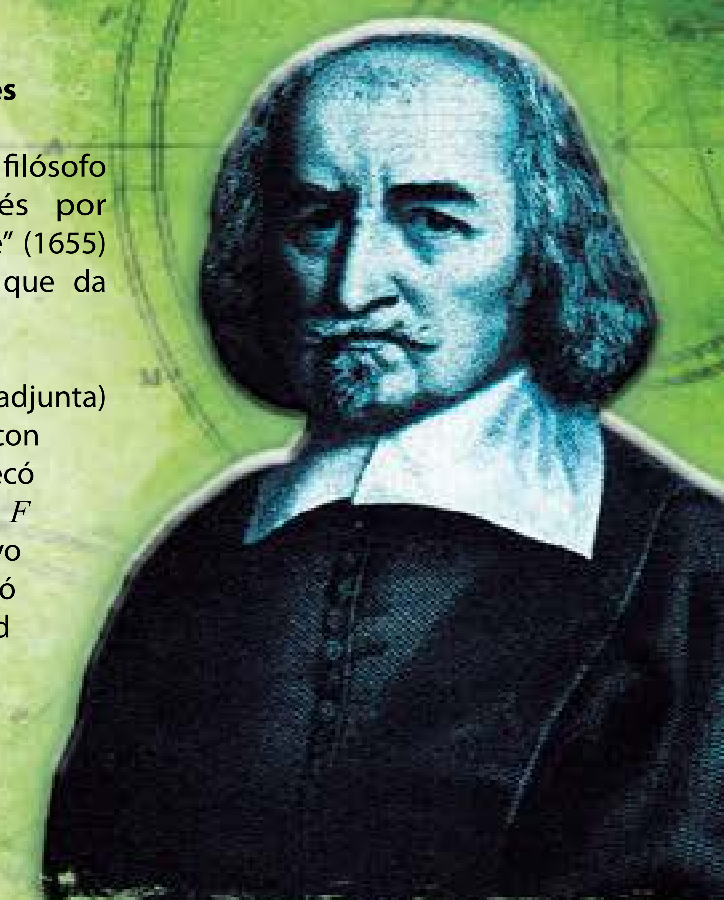
Luego, trazó la paralela a $\overline{AB}$ que pasa por el punto C. El corte de ésta con $\overline{AD}$ es F. Después trazó $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ (que es paralelo a $\overline{BF}$).

Probó además que $\overline{ED}$ es igual que 16/113; es decir, 0,1415929...

Por último, dibujando un segmento de longitud tres veces la del radio y sumándole $\overline{ED}$, el segmento resultante mide 3,1415929... (¡que difiere de π en menos de una millonésima! Es decir, la diferencia entre este número construido con regla y compás y π es menor a 0,000001).



Son muchos los matemáticos que han ideado métodos para aproximar el número *Pi*, además de los citados en estas dos notas históricas podemos mencionar a: **Isaac Newton**, **Gottfried Leibniz** y **Srinivasa Ramanujan**.



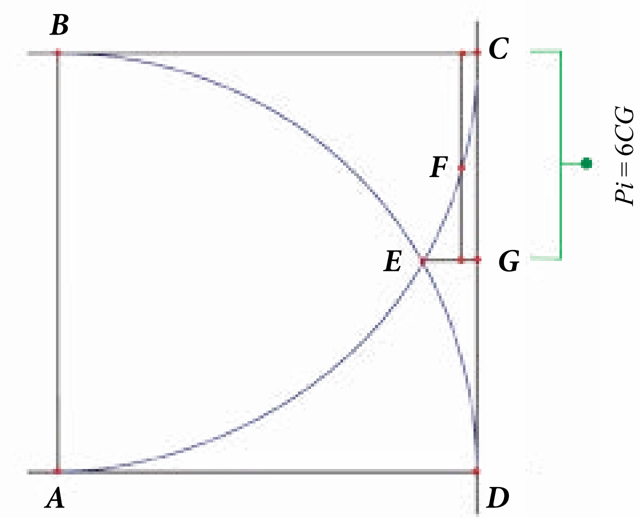
Una aproximación de π debida a Thomas Hobbes

Thomas Hobbes (1588-1679), famoso filósofo inglés que desarrolló un creciente interés por la Matemática, expuso en su trabajo "De corpore" (1655) un método geométrico (con regla y compás) que da una buena aproximación de ***Pi***.

En un cuadrado de lado 1 (ver figura adjunta) trazó los arcos de circunferencia de radio 1 con centro en A y B, respectivamente. Luego, bisecó el arco $\overset{\frown}{EC}$ (este punto lo etiquetamos con F). Por F trazó un segmento paralelo al segmento $\overline{AB}$ cuyo punto medio sea precisamente F. Finalmente trazó el segmento $\overline{EG}$. Hobbes sostenía que la longitud del arco

$$\overset{\frown}{EC}$$

es igual que la del segmento $\overline{CG}$ [¿Es esto cierto?] Y como la circunferencia contiene 12 veces al arco $\overset{\frown}{EC}$, ***Pi*** es 6 veces la longitud del segmento $\overline{CG}$.



Hasta aquí hemos estudiado que existen números reales que pueden construirse con regla y compás y otros que no. Además, estos números reales que no pueden construirse pueden aproximarse a través de números racionales. En especial, mostramos el caso de dos aproximaciones del misterioso número π .

Un ejemplo de otro número que no puede construirse con regla y compás es precisamente $\sqrt[3]{2}$ el cual está relacionado con el histórico problema de la "duplicación del cubo".

Actividades

1 ¿Cuáles de los números reales expuestos en la lección sobre los conos de helados pueden construirse y cuáles no?

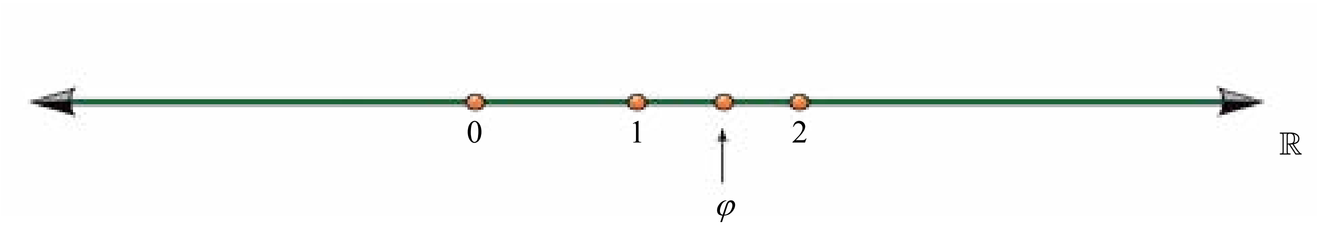
2 Investiguen o ideen un método para construir con regla y compás los siguientes números reales: $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ y $\sqrt{\frac{5}{4}}$.

3 Luego de construir a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ¿Cómo puede construirse a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$?

4 Organicen una exposición en el liceo con sus construcciones. E incluso, propongan problemas a sus compañeras y compañeros.

Operaciones en $\mathbb{Q}$ y sus leyes o propiedades

Las secciones anteriores nos han dado una idea geométrica de un número real y de las operaciones con números reales. Un número real positivo puede representarse a través de la longitud de un segmento. Así, al sumar las longitudes de dos segmentos estamos sumando números reales, al dividir un segmento en n partes estamos dividiendo un número real entre n, etc. un número real también se puede representar como un punto de la recta, tal como estudiamos en la primera lección de este libro.



En esta recta real hemos representado al número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La adición y la multiplicación de números reales dan como resultado números reales, verificándose las siguientes leyes:

Para la adición:

Ley conmutativa	Para cualesquiera números reales a y b se tiene que: $a+b=b+a$
Ley asociativa	Para cualesquiera números reales a, b y c se verifica: $a+(b+c) = (a+b)+c$
Existencia del elemento neutro	Existe un número 0, tal que: $a+0=0+a=a$
Existencia del elemento inverso aditivo	Para todo número real a, existe un número $(-a)$, tal que: $a+(-a)=(-a)+a=0$

Para la multiplicación:

Ley conmutativa	Para cualesquiera números reales a y b se cumple: $a \cdot b = b \cdot a$
Ley asociativa	Para cualesquiera números reales a, b y c se tiene que: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existencia del elemento neutro multiplicativo	Existe un número, que llamaremos 1, además único, tal que: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ Para todo número real a
Existencia del elemento inverso multiplicativo	Para todo número real $a \neq 0$, existe el número a^{-1}, que verifica: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Para la adición y la multiplicación:

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	Para cualesquiera números reales a, b y c se tiene que: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Como podemos observar, estas leyes son las mismas que verifican la adición y la multiplicación de números racionales $\mathbb{Q}$.

Sin embargo, recordemos que en el conjunto de los números naturales, por ejemplo, se verifican las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, y existe un neutro aditivo (el 0). Pero en $\mathbb{N}$ no existe inverso aditivo para cualquier número natural (el 1, por mostrar un caso, no tiene inverso aditivo en $\mathbb{N}$. Tomemos en cuenta que -1 está en $\mathbb{Z}$). El único número natural que tiene inverso aditivo es el 0. También se cumplen, en el caso de la multiplicación de números naturales, las propiedades conmutativa, asociativa y la existencia de neutro multiplicativo (el 1). Además, la multiplicación es distributiva con respecto a la adición de números naturales.

- ¿Qué propiedades cumplen la adición y la multiplicación de números enteros (es decir, en el conjunto $\mathbb{Z}$)?

- ¿Qué propiedades no se cumplen en $\mathbb{Z}$? Aporten ejemplos de éstas y conversen con sus compañeras y compañeros.

Propiedades del conjunto $\mathbb{R}$

Las propiedades que comentamos a continuación nos permiten tener una visión más amplia del conjunto de los números reales y de las operaciones allí definidas.

Densidad: Como sabemos entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales. Esta propiedad se conoce como la densidad del conjunto $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, si consideramos los números racionales 0 y 1, una manera de visualizar que la proposición anterior es verdadera consiste en calcular la *semisuma* de estos números (la semisuma es un medio de la suma de los números dados), es decir:

$$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

Ahora reiteramos este proceso considerando a los números 0 y $\frac{1}{2}$. Así,

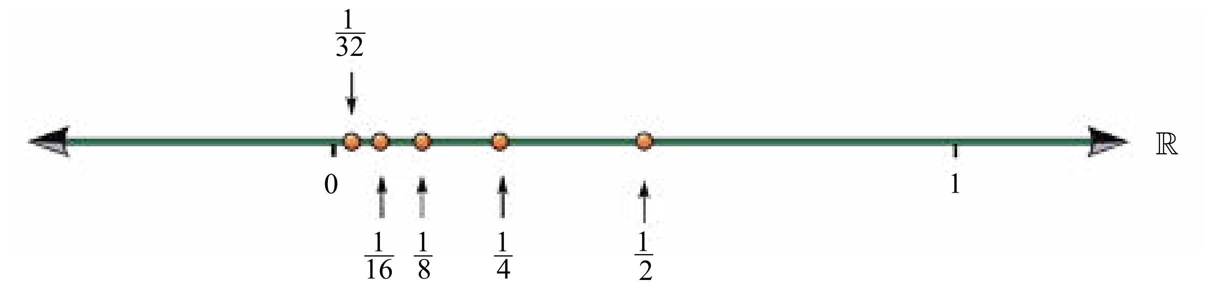
$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

Y tomando a 0 y $\frac{1}{4}$:

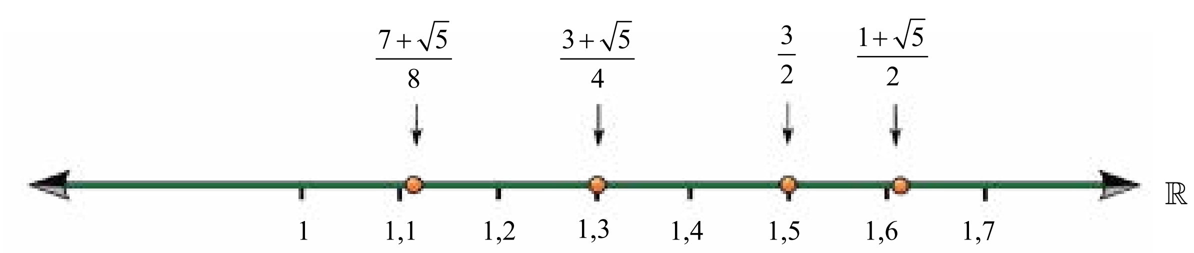
$$\frac{0+\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

Este proceso lo podemos seguir hasta el infinito, pero en él observamos que todas las semisumas obtenidas están comprendidas entre 0 y 1 (todas serán positivas y menores a 1). Ello nos da la idea de que entre 0 y 1 existen infinitos números racionales.

Lo cual hemos representado en la recta que sigue. Fijémonos en que incluimos en el gráfico otros números además de los calculados antes.



La densidad del conjunto $\mathbb{Q}$ es también una propiedad del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. **Entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números reales**. Tomemos por caso los números 1 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Entre ellos hay números reales como: $\frac{7+\sqrt{5}}{8}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{1600}{1006}$ (compruébenlo y observemos el gráfico adjunto). Pero en realidad hay muchos otros, de hecho, hay infinitos.



- Les pedimos entonces que aporten muchos otros ejemplos de números reales (tanto racionales como irracionales) comprendidos entre 1 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Además, represéntenlos en la recta real y conversen sus respuestas con sus compañeras y compañeros.

Orden: Por otra parte, el conjunto $\mathbb{R}$ es totalmente ordenado. Es decir, para cualesquiera números reales a y b se cumple sólo una de las tres condiciones que siguen:

$$a<b$$
$$a=b$$
$$a>b$$

Al representar dos números reales en la recta tendremos que el que se encuentra a la izquierda del otro será precisamente el menor de ellos. Idea que hemos venido empleando en las representaciones anteriores.

$\mathbb{R}$ **es no acotado**: No existe un número real mayor a todos los demás números reales, ni existe uno que sea menor a todos los demás, por esta razón se dice que el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene "cota" superior ni inferior. Así, $\mathbb{R}$ es no acotado.

En cambio, el conjunto:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \ x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \right\}$$

Sí es acotado pues existen números reales que son mayores o iguales que todos los elementos de tal conjunto. Justo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es una de esas cotas superiores. El 2 también es una cota superior de este conjunto. ¿Qué otras cotas superiores tiene este conjunto? ¿Tiene cotas inferiores, es decir, existe algún número real que sea menor o igual a todos los elementos de ese conjunto?

Actividades

1 Dividan un segmento, empleando regla no graduada y compás, en 5 partes congruentes entre sí.

2 Construyan con regla y compás un rectángulo dorado, es decir, un rectángulo en el que la proporción entre las medidas de su lado mayor y el menor sea el número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3 Aporten una lista de números racionales que pertenezcan al conjunto $\left\{ x \in \mathbb{Q}^+ : \ x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ y represéntenlos en la recta real.

4 Den al menos 10 ejemplos de números irracionales comprendidos entre 0 y 1. Apóyense en la calculadora y represéntenlos en la recta real.

5 ¿Cuántos números racionales hay entre 0 y 1? ¿Y cuántos irracionales hay entre 0 y 1? Conversen estas ideas con su profesora o profesor.

6 ¿Es el conjunto $\left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \right\}$ acotado? Represéntenlo en la recta real y justifiquen su respuesta.

7 Den ejemplos de (a) conjuntos acotados inferiormente, (b) conjuntos acotados superiormente y (c) conjuntos no acotados. Y represéntenlos en la recta real.

8 Midan varios escalones (cerca de sus casas, en alguna edificación, en su institución, etc.), tanto su alto como su ancho. Registren estos datos en una tabla y calculen estas proporciones. ¿Se acercan al número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$? ¿Por cuál de éstos es más fácil subir?

9 **Calculen varias de las proporciones del cuerpo humano que indicamos al comienzo de la lección.**

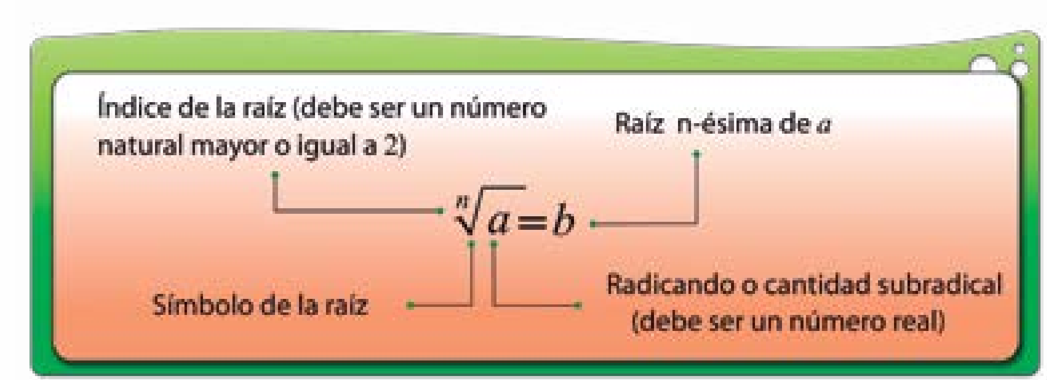
¿Se acercan al número de oro?

Conversen los resultados con su profesora o profesor, así como los conceptos tergiversados de la belleza que se promueven desde algunos medios de comunicación.

Caracol nautilus

Propiedades de la radicación de números reales

La raíz n-ésima (se lee "enésima") de un número real se denota con la expresión $\sqrt[n]{a} = b$, en la cual:



La radicación y algunas de sus propiedades la empleamos en la construcción de $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Veamos ahora una lista más amplia de estas propiedades (les proponemos construir y debatir ejemplos en todos los casos):

Propiedades de la radicación de números reales

La raíz n-ésima de a^m	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
La raíz n-ésima del producto ab es igual al producto de la raíz n-ésima de a por la raíz n-ésima de b.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
La raíz n-ésima del cociente $\frac{a}{b}$ es igual a la raíz n-ésima de a dividida por la raíz n-ésima de b.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Para calcular la raíz de una raíz, se multiplican los índices de las raíces y se conserva la cantidad subradical.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
¿Cómo simplificar un radical? Para ello dividimos el índice de la raíz y los exponentes de la cantidad subradical por un mismo número.	Por ejemplo: $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[\frac{4}{2}]{5^{\frac{2}{2}}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$
¿Cómo amplificar radicales? También podemos multiplicar el índice y los exponentes de la cantidad subradical por un mismo número.	Por ejemplo: $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4\cdot3]{5^{2\cdot3}} = \sqrt[12]{5^6}$
¿Cómo introducir un factor en una raíz? Para ello al incluir el factor, debemos elevarlo a un exponente igual al índice de la raíz.	$c \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{c^n \cdot a}$
¿Cómo extraer un factor en una raíz? Supongamos que el factor es de la forma a^p. Dividimos p entre n (entre el índice de la raíz). Si el cociente es c y el resto es r, entonces puede extraerse el factor a^c y el factor a^r queda como cantidad subradical.	$\sqrt[n]{a^p} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$ Donde c y r son el cociente y resto, respectivamente, de dividir p entre n

¿Cómo reducir radicales de un mismo índice? (1) Calculamos el mcm de los índices, éste será el índice común que buscamos, (2) Se divide este número entre cada uno de los índices de las raíces dadas, y lo colocamos como exponente a cada factor de la cantidad subradical

Por ejemplo: expresemos a $\sqrt[3]{5}$ y a $\sqrt{2}$ como radicales del mismo índice. Para ello calculamos el mínimo común múltiplo de 3 y de 2 (de los índices de estas raíces); así mcm (3,2) = 6. Entonces:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^{\frac{6}{3}}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

Y, por otra parte, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

De esta manera, hemos expresado a los radicales $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{2}$ como radicales del mismo índice:

$\sqrt[6]{25}$ y $\sqrt[6]{8}$ respectivamente

Además, la potenciación en $\mathbb{R}$ guarda las mismas propiedades que la potenciación en $\mathbb{Q}$. Pero qué sucede si elevamos una raíz a una potencia. Veamos:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k = a^{\frac{m}{n}\cdot k} = a^{\frac{mk}{n}} = \sqrt[n]{a^{mk}} \text{. Así que } \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$$

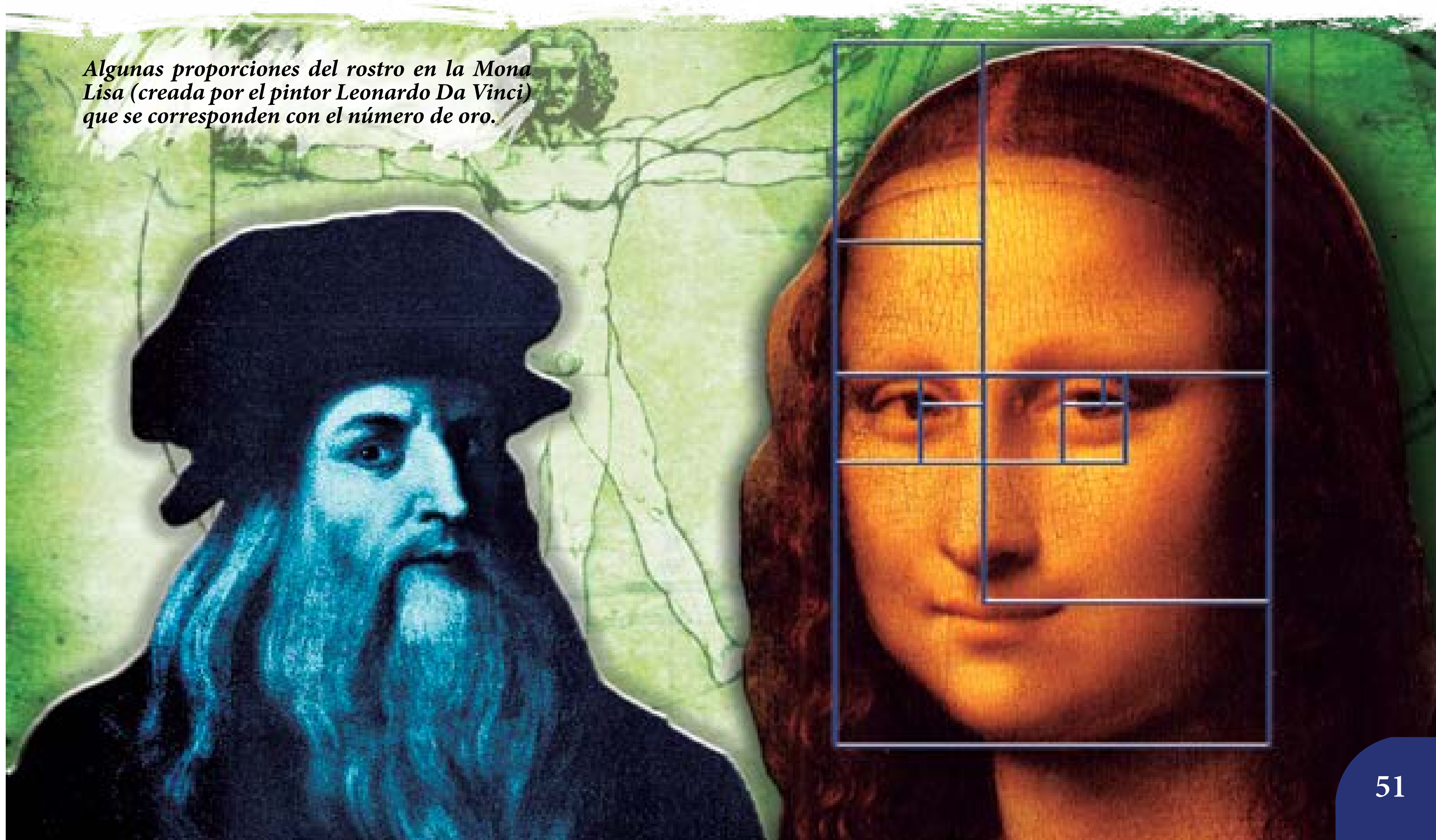
Racionalización

En ocasiones es conveniente simplificar el numerador o el denominador de una expresión de manera que no aparezcan en ella radicales (raíces). Este proceso se conoce como **racionalización**. Por ejemplo, consideremos la expresión $\frac{2}{\sqrt{5}}$. ¿Cómo racionalizamos el denominador? Para ello, debemos multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$. (Notemos que no alteramos la igualdad, ya que $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$). Por tanto:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Expresión que ya no tiene radicales en el denominador.

- Conversen con sus compañeras y compañeros sobre otros problemas similares.
- ¿Cómo racionalizar una expresión de la forma $\frac{4}{1+\sqrt{2}}$?



Algunas proporciones del rostro en la Mona Lisa (creada por el pintor Leonardo Da Vinci) que se corresponden con el número de oro.

3

UNA HERRAMIENTA PARA EL TRABAJO

Teorema de Pitágoras

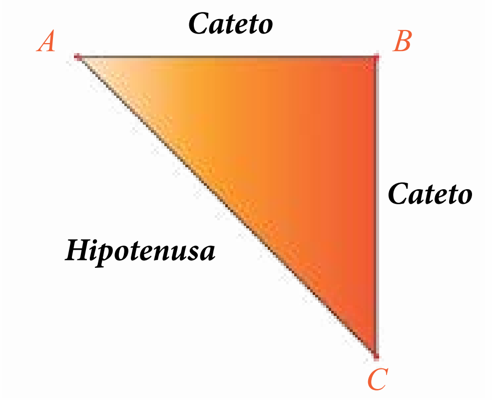
El trabajo creador y el triángulo rectángulo

Los albañiles, herreros y carpinteros son algunos de los profesionales que diariamente trabajan con la matemática. El uso continuo de los instrumentos de medición es para estos profesionales algo cotidiano; el manejo de las técnicas de medir entrelazadas al conocimiento de algunas propiedades matemáticas permite el desarrollo de su profesión. El trabajo de estos profesionales puede servir como un elemento de liberación dentro de la sociedad, para ello es necesario que se sientan identificados y comprometidos con la construcción de una sociedad justa y equitativa. Así que, los profesionales no solamente deben estar preparados desde el punto de vista técnico, sino también en el ético y moral.

Dentro de los aspectos técnicos de la herrería, albañilería y carpintería una figura matemática que juega un papel trascendental es el triángulo; el conocimiento de sus propiedades permite estudiar las demás figuras poligonales. En especial, las propiedades del **triángulo rectángulo** representan una fuente importante para muchas aplicaciones de la matemática. En esta lección estudiaremos algunas de ellas.

Para este estudio, debemos recordar que:

> Un triángulo es rectángulo si y sólo si la medida de uno de sus ángulos es igual a $90°$ (llamado ángulo recto).

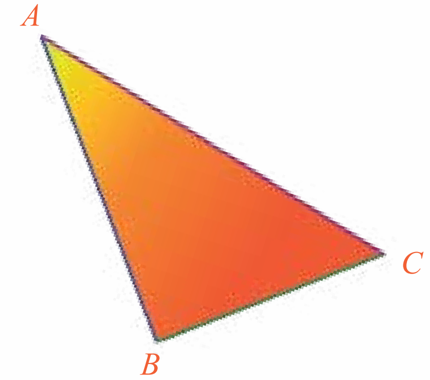


En el triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan **catetos** y el lado que se opone al ángulo recto se denomina **hipotenusa**.

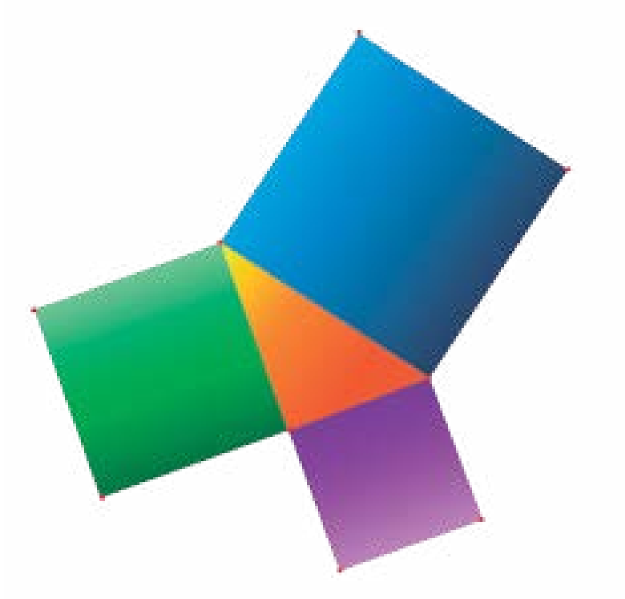
Descubriendo algunas propiedades del triángulo rectángulo

Primero, junto a sus compañeras y compañeros, dibujen un triángulo rectángulo de medidas cualesquiera.

Figura 1: un triángulo rectángulo



Ahora dibujen en cada uno de sus lados un cuadrado, tal como mostramos en la *figura 2.*



Cuadrados construidos sobre los catetos e hipotenusa
Figura 2

Calculen y sumen el área de todos los cuadrados que construyeron en los catetos, y compárenlos con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. ¿Qué resultado obtuvieron? Comparen su resultado con el de sus compañeras y compañeros. ¿Ocurre lo mismo para otros triángulos rectángulos?

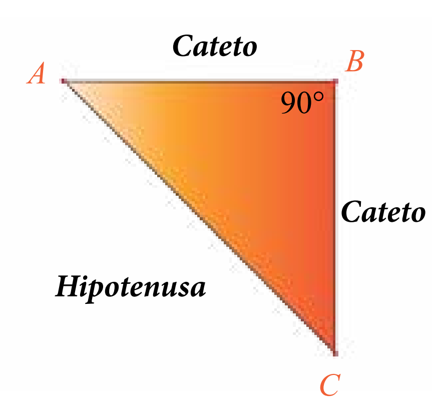
Esta importante conclusión a la que acaban de llegar es el famoso **teorema de Pitágoras**, cuyo enunciado es:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos:

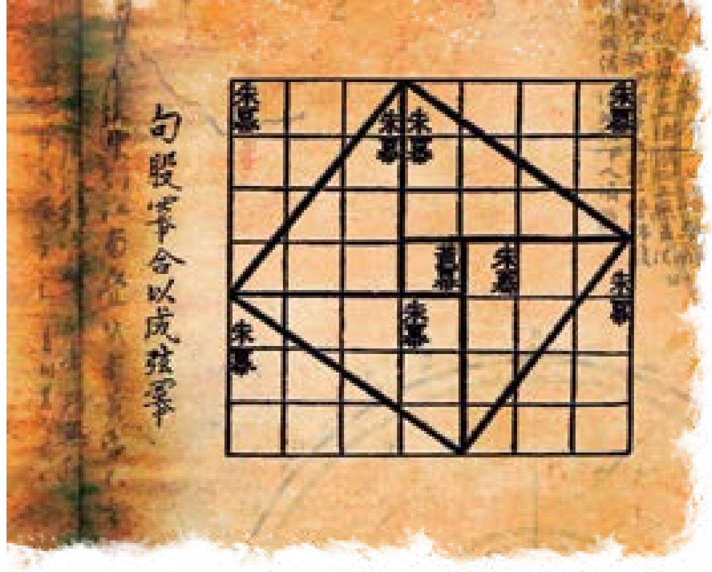
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad esto \quad es \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

Es decir:

$$Hipotenusa = \sqrt{(primer \ \ cateto)^2 + (segundo \ \ cateto)^2}$$

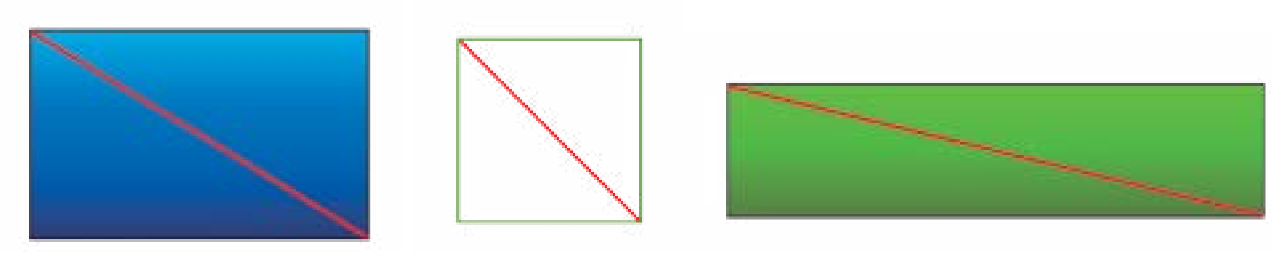


El cual ya hemos empleado en las primeras lecciones de este libro.



Por lo tanto el **teorema de Pitágoras** se puede emplear en el cálculo de áreas de terrenos o regiones con las características mencionadas anteriormente, también es empleado para calcular la medida de cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo a partir de la medida de los otros dos lados. He allí algunos de los usos de este importante teorema.

Debemos recordar que al trazar una de las diagonales de un rectángulo, éste queda dividido en dos triángulos rectángulos, cada diagonal de dicho rectángulo es la hipotenusa de los triángulos correspondientes. Veamos las diagonales, en lineas rojas, que se muestran en los siguientes rectángulos:



¿Cómo aplicar el teorema de Pitágoras?

Supongan que un herrero va a construir una reja de forma rectangular cuya altura b es igual a $1\ m$ y cuyo ancho c es de $2\ m$, a la misma debe colocarle unos tubos diagonales. Allí entra en juego el **teorema de Pitágoras**, el herrero no necesita medir la diagonal para recortar los tubos que va a colocar, solamente se apoya en las siguientes ideas:

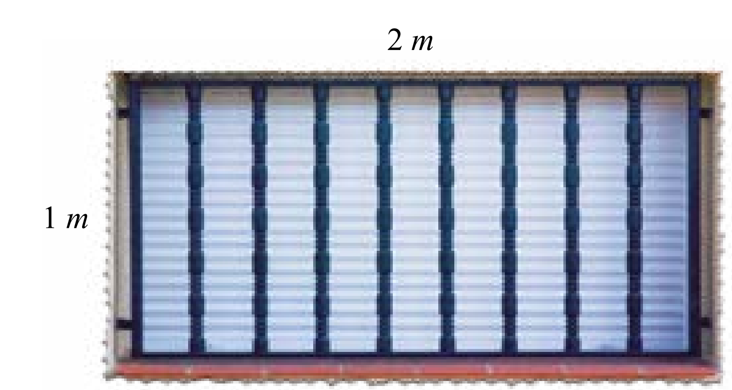


Figura 3

Los lados de la reja son los catetos del triángulo rectángulo que se va a formar al colocar las diagonales, así tenemos las medidas de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad esto \quad es \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

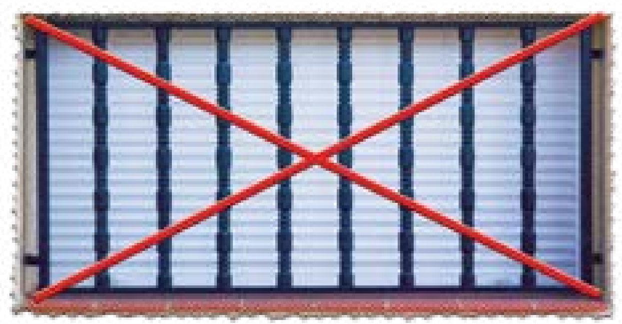
En este caso a representa la medida de la diagonal; b y c representan los catetos. Luego, sustituimos en:

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ los valores de b y c:

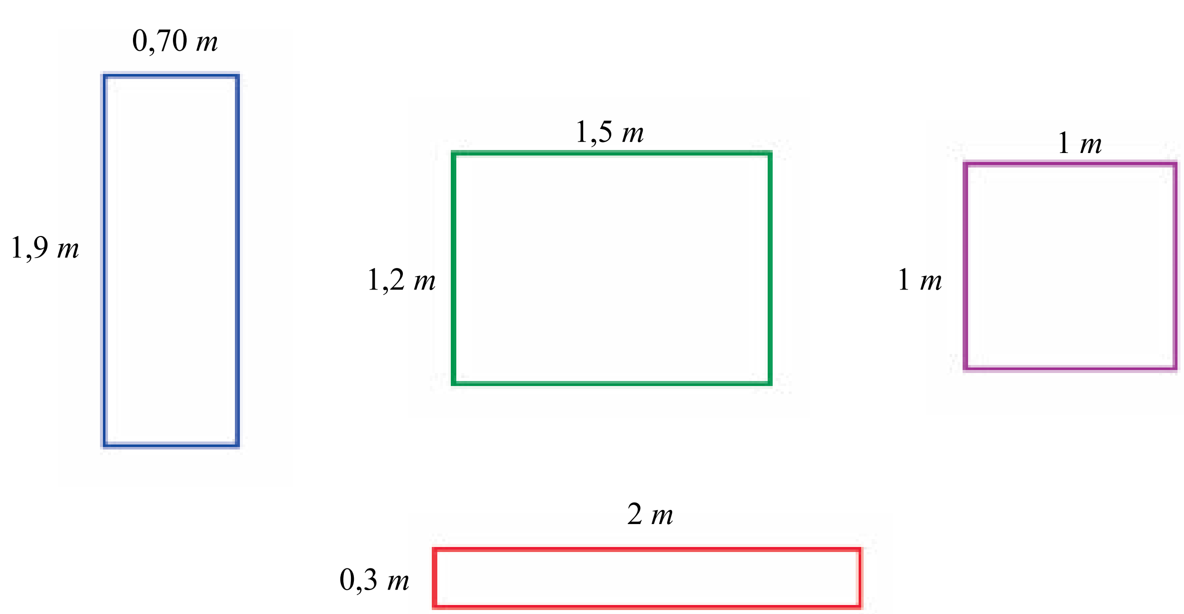
$$a^2 = 1^2 + 2^2 \quad esto\ \ es \quad a = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

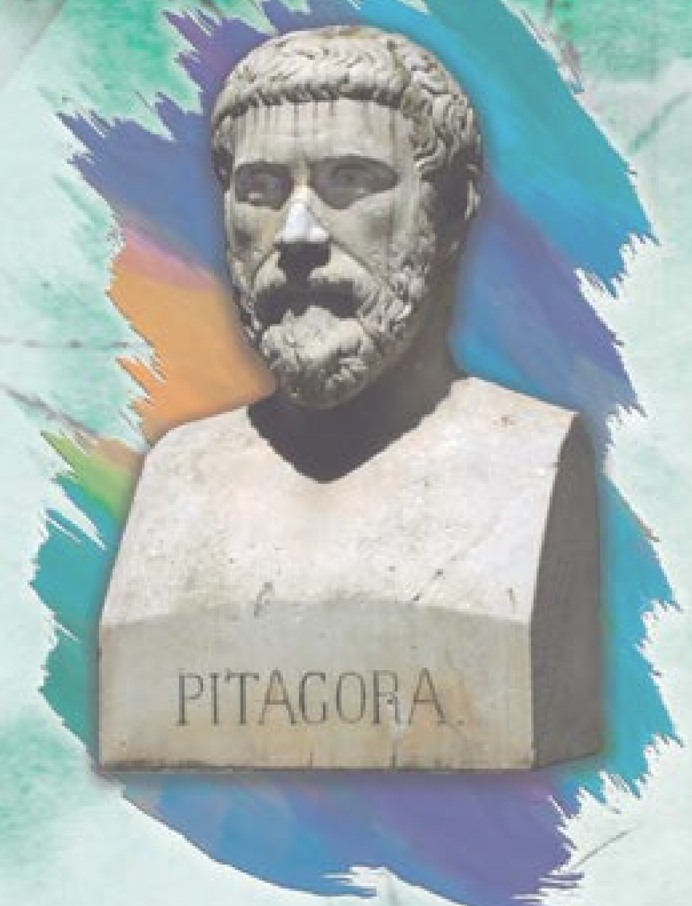
$$a = \sqrt{1+4} \rightarrow a = \sqrt{5} \rightarrow a \approx 2,23$$

El herrero debe cortar los tubos que van en las diagonales con una medida de 2,23 m de longitud, y eso lo sabe gracias a la aplicación del **teorema de Pitágoras.**



Realicemos ahora la siguiente actividad, como la realizaría el herrero y determinen las medidas de los tubos que se colocarían (las diagonales) en los siguientes marcos:





Junto a sus compañeras y compañeros calculen las medidas de las diagonales de las puertas, y ventanas del aula aplicando el teorema de Pitágoras.

La medida de los catetos utilizando el teorema de Pitágoras

Queremos encontrar la medida de uno de los catetos (primer cateto) del triángulo de la *figura 1*, sabiendo las medidas de la hipotenusa y del otro cateto (segundo cateto), Veamos:

AB y BC son las medidas de los catetos y AC la medida de la hipotenusa. Por tanto, si queremos calcular la medida del cateto AB, tenemos que:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 \quad esto\ \ es \quad AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

Con lo cual:

$$primer\ Cateto = \sqrt{(Hipotenusa)^2 - (segundo\ Cateto)^2}$$

De forma similar, si necesitamos encontrar la medida del segundo cateto sabiendo las medidas de la hipotenusa y el primer cateto, tenemos que:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 \quad esto\ \ es \quad BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

Por lo tanto, tendremos que:

$$segundo\ Cateto = \sqrt{(Hipotenusa)^2 - (primer\ Cateto)^2}$$

- Revisemos por un momento lo realizado, ¿qué observan en las dos fórmulas empleadas para la medida de los catetos?
- ¿Es posible obtener estas ecuaciones a partir del Teorema de Pitágoras? Conversen con sus compañeras y compañeros la manera de obtener estos resultados.

Pero, no sólo los herreros hacen uso de este teorema tan famoso, veamos otra situación. Un carpintero debe construir una puerta de forma rectangular.

La persona que le encomendó el trabajo solamente le dio la medida de la diagonal ($3\ m$) y la de uno de los lados de la puerta ($1{,}3\ m$).

El carpintero realiza este trabajo de acuerdo a su experiencia y conocimientos prácticos adquiridos, pero ¿sabrá que esta construcción se hace de manera más sencilla si conoce el Teorema de Pitágoras?

Veamos cómo lo podemos ayudar, él sabe que tiene la medida de la diagonal y nosotros sabemos que ésta representa la hipotenusa de los triángulos que se forman en la puerta, que tiene forma de rectángulo, por tanto podemos realizar la siguiente formulación:

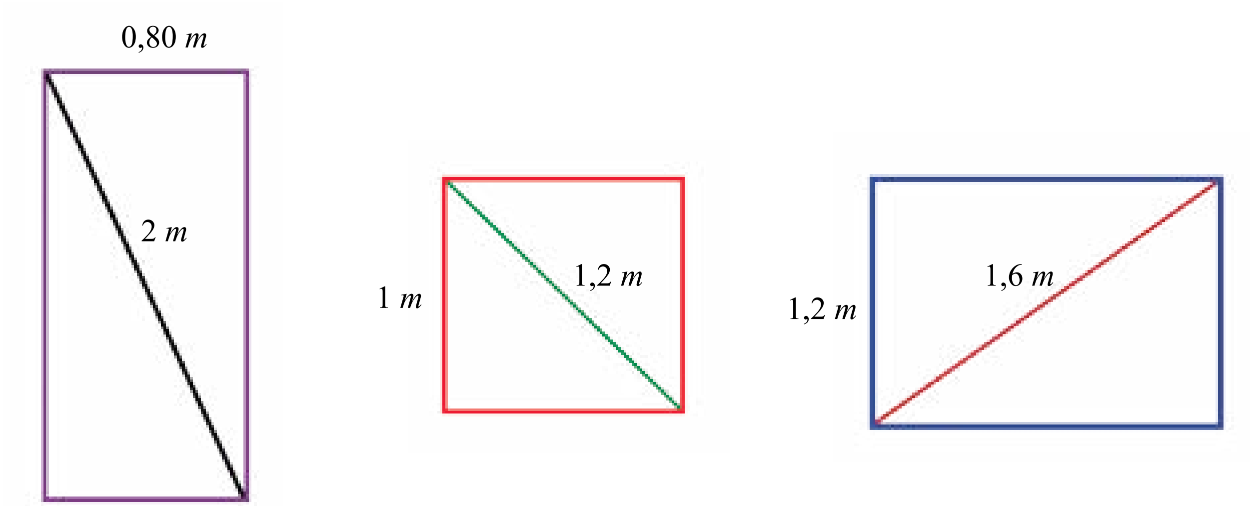
$$primer\ Cateto = \sqrt{(Hipotenusa)^2 - (segundo\ Cateto)^2}$$

Decimos que x es el lado desconocido, en nuestro caso el primer cateto, y realizamos la sustitución correspondiente.

$$x = \sqrt{3^2 - (1{,}3)^2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{9 - 1{,}69}$$
$$x = \sqrt{6{,}31} \quad \rightarrow \quad x \approx 2{,}51$$

De esta manera, el carpintero deduce matemáticamente que el lado desconocido de la puerta tiene como medida: $2{,}51\ m$ aproximadamente.

Pensemos ahora en las puertas y ventanas que el carpintero debe construir y en cómo lo ayudaremos a calcular el lado desconocido de los marcos respectivos, sabiendo que la medida de la diagonal y uno de sus lados son las que se muestran a continuación.



Utilicemos la calculadora

Para realizar cálculos más rápido, tanto los herreros como los carpinteros pueden utilizar una calculadora. Revisemos algunos ejercicios que les permitirán hacer cálculos de forma más eficiente.

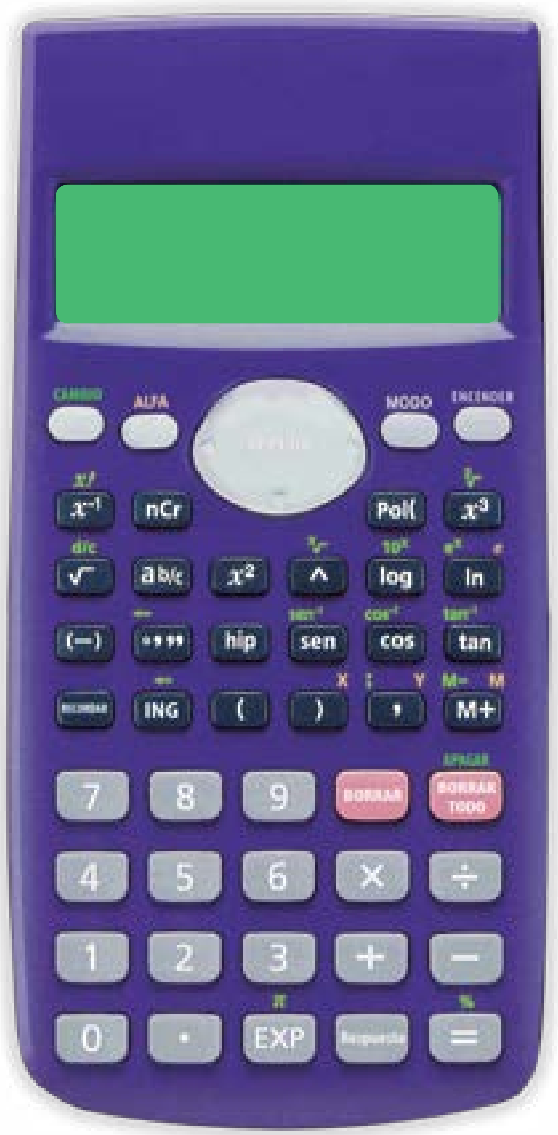
El cuadrado de un número

Revisemos un ejemplo de un algoritmo que nos permitirá elevar un número al cuadrado utilizando la calculadora.

Para obtener la potencia 7^2 deben presionar:

- La tecla con el número 7
- La tecla con el símbolo x^2
- El signo de igualdad =
- Esto te dará como resultado 49

Otro algoritmo muy utilizado nos permitirá obtener la raíz cuadrada de un número, veamos:



La raíz cuadrada de un número

¿Qué número se aproxima a $\sqrt{54}$?

- Presionamos la tecla con el símbolo $\sqrt{\ }$
- Digitamos el número
- Y ahora el signo de igualdad
- Esto daría como resultado el número 7.3484692...

En este caso, ésta es una aproximación al número irracional $\sqrt{54}$. ¿Recuerdan en qué casos el resultado es exacto?

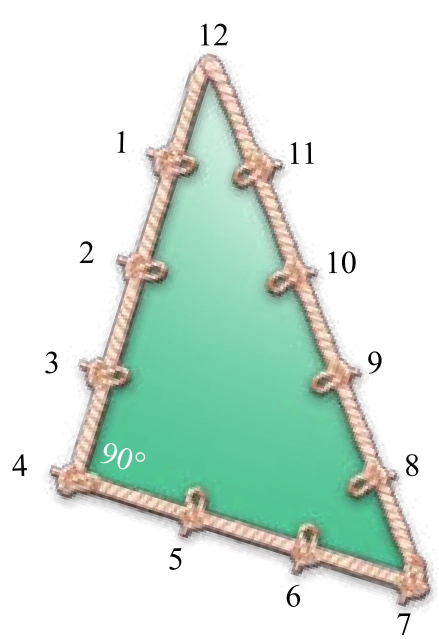
Existen calculadoras de diferentes tipos y modelos, esto significa que pueden tener nomenclaturas distintas, por ello deben consultar al manual de instrucciones que traen las mismas, o bien, a sus profesoras o profesores de matemática; ellos están en disposición y capacidad de guiarlos en cuanto al manejo detallado de la calculadora.

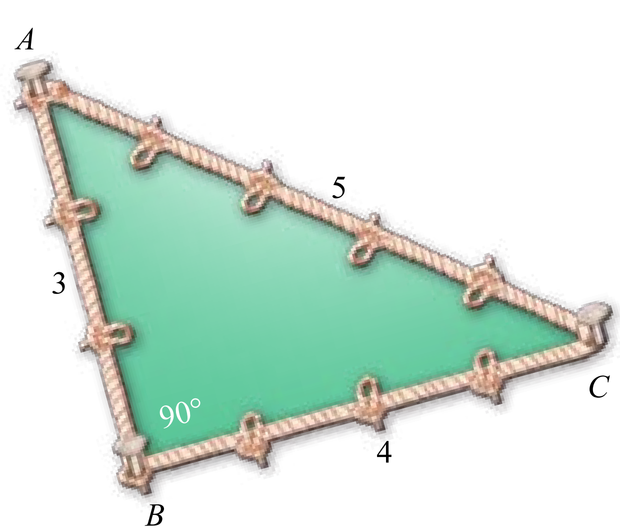
Realicemos la siguiente actividad donde también se emplea el teorema de Pitágoras

Junto a sus compañeras y compañeros tomen una cuerda o cordel.

Con un marcador divídanla en doce partes iguales. En cada marca hagan un pequeño nudo, teniendo cuidado de mantener las doce partes de la misma longitud.

Utilizando la cuerda formen un triángulo rectángulo de manera que las medidas de sus catetos sean 4 y 3 unidades, respectivamente.





La medida de la hipotenusa debe ser igual a 5 unidades.

Verifiquemos este resultado utilizando el **teorema de Pitágoras**. En efecto:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

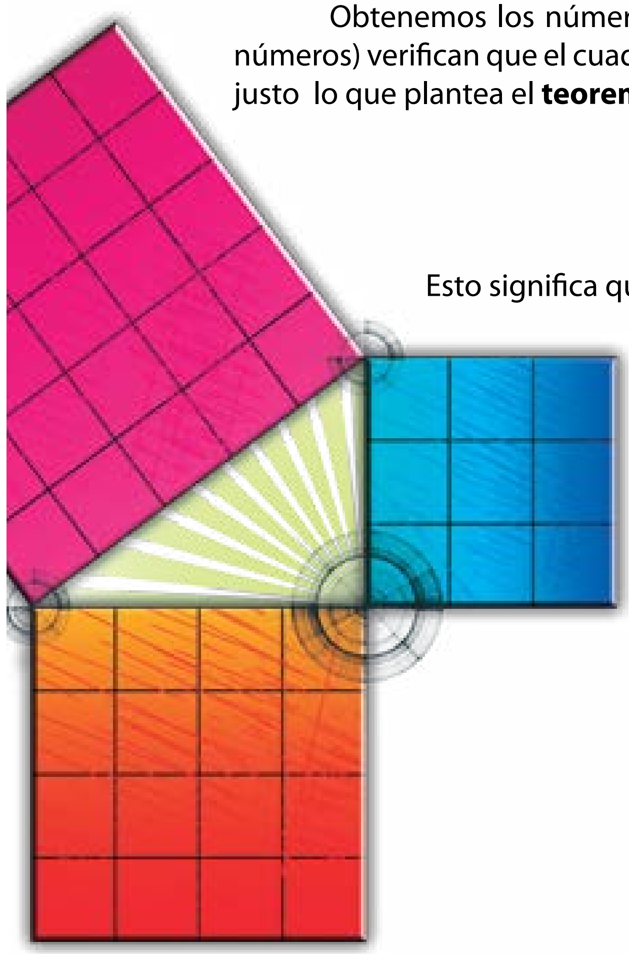
El método que terminamos de utilizar era empleado por los egipcios en la medición de las tierras inundadas por el río Nilo. A la combinación de los números:

$$3, 4 \text{ y } 5$$

se le denomina **terna pitagórica**. De hecho, supongamos que no tenemos a la mano una escuadra, conociendo la propiedad anterior, sólo basta con representar un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5, y estaremos seguros que será rectángulo. Así, por ejemplo, podríamos trazar segmentos o rectas perpendiculares disponiendo únicamente de una regla (sin escuadra, ni compás).

¿Qué pasaría si multiplicamos estos tres números por dos?

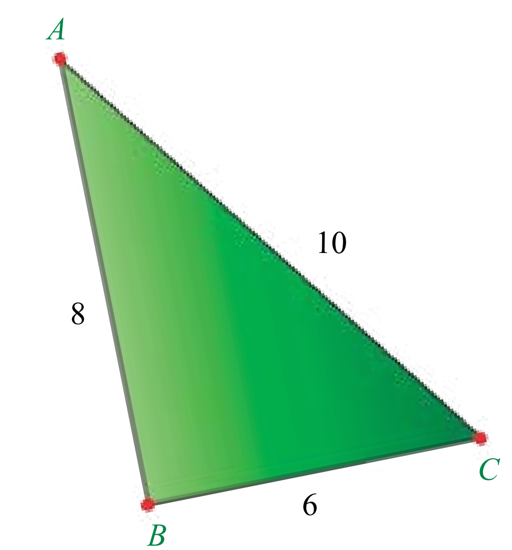
$$2 \cdot 5 = 10$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 4 = 8$$



Obtenemos los números 10, 6 y 8. Y de nuevo algo ocurre, estos números (esta terna de números) verifican que el cuadrado del número mayor es la suma de los cuadrados de los otros dos, justo lo que plantea el **teorema de Pitágoras**:

$$10^2 = 6^2 + 8^2$$

Esto significa que los números 10, 6 y 8 son también una **terna pitagórica**.



Actividades

1 Copien en sus cuadernos los siguientes ejercicios y utilizando una calculadora verifiquen si los siguientes grupos de números son **ternas pitagóricas**:

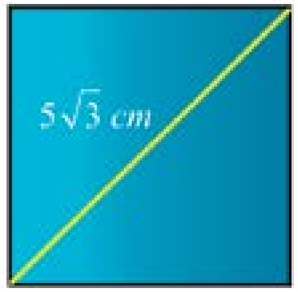
$20,\ 12\ y\ 16$	$40,\ 24\ y\ 32$
$25,\ 15\ y\ 20$	$45,\ 27\ y\ 36$
$30,\ 18\ y\ 24$	$50,\ 30\ y\ 40$
$35,\ 21\ y\ 28$	$66,\ 33\ y\ 44$

2 Utilizando pabilo o un cordel, clavos y un martillo, construyan en terrenos del patio del liceo triángulos rectángulos de distintas medidas. Utilicen un metro o cinta métrica para medir. En unos medirán los catetos y en otros medirán la hipotenusa y un cateto. Deduzcan las medidas desconocidas aplicando el teorema de Pitágoras. Luego midan los lados desconocidos haciendo uso de la cinta métrica y contrástenla con la medida que calcularon antes.

3 ¿En cuánto difieren las medidas resultantes de las obtenidas al aplicar el **teorema de Pitágoras**? Si la diferencia es muy grande, debatan con sus compañeras y compañeros cuál pudo ser el error cometido. Además, ¿existen algunas ternas (de las que han representado) que sean pitagóricas?

4 Investiguen en cuáles otras actividades productivas se puede utilizar el **teorema de Pitágoras**, por ejemplo, al colocar un estante de madera en la pared utilizando un pie de amigo. ¿Qué tipo de triángulo se formará entre la tabla, el pie de amigo y el segmento que se forma entre el extremo del pie de amigo y el extremo de la tabla?

5 Si la diagonal de un cuadrado mide $5\sqrt{3}\ cm$, ¿cuál es el área y el perímetro del mismo?



6 En esta lección hemos expuesto algunas ternas pitagóricas, ahora les proponemos reflexionar sobre las siguientes preguntas:

- ¿Qué ejemplos pueden dar? La lista de ternas, ¿es finita o infinita?
- ¿Cómo nos convencemos de ello?

4 LA PESCA ARTESANAL

Vectores. Operaciones. Magnitud vectorial y Magnitud escalar

La pesca artesanal y los vectores

El pescador tradicional venezolano realiza un tipo de pesca conocida como *pesca artesanal*. Ésta es practicada por pequeñas embarcaciones en las zonas costeras de nuestro país, a no más de 12 *millas náuticas* de distancia, o bien, en los ríos, lagos, lagunas y caños de toda nuestra geografía. Antes de seguir con este tema, investiguen qué es una *milla náutica*.

Este tipo de pesca busca abastecer el consumo local de distintas especies de peces, mariscos, moluscos y crustáceos. En cambio, la pesca de arrastre, la cual consiste fundamentalmente en el empleo de una red lastrada que barre el fondo de la mar capturando todo lo que encuentra a su paso, es una modalidad de pesca que resulta destructiva para el ecosistema marino; pues siendo extremadamente selectiva (se escoge principalmente al camarón) se desperdician enormes cantidades de especies comestibles, que luego son lanzadas al mar como desperdicio.

En este sentido, con el fin de preservar la biodiversidad marina y evitar la depredación indiscriminada de especies, el Estado Venezolano prohibió (desde 14 de marzo de 2009) la pesca de arrastre (Ley de Pesca y Acuicultura, Gaceta Oficial 5877 del 14-03-2008).

En esta lección estudiaremos la relación entre la pesca artesanal y los vectores.

La idea de vector

En la vida cotidiana realizamos un sinfín de actividades que requieren una representación e interpretación matemática.

Por ejemplo, la ruta que sigue un pescador en el río Orinoco para pescar artesanalmente puede representarse matemáticamente mediante los **vectores** (*gráfico 1*).

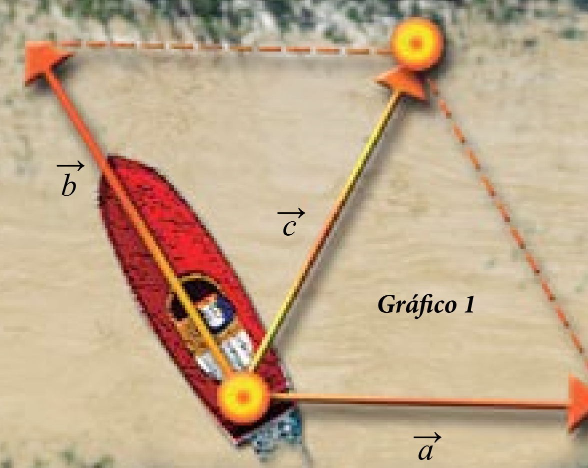


Gráfico 1

Igual sucede con la actividad que realiza el mecánico para sacar el motor de un carro, en el beisbol cuando el bateador quiere colocar con su bate la pelota en la zona del jardín izquierdo, y en tantos otros ejemplos.

Gráfico 2

Investiguen en cuáles otras situaciones de la vida cotidiana intervienen los vectores e ilustren lo investigado y sus ideas con gráficos como hicimos antes.

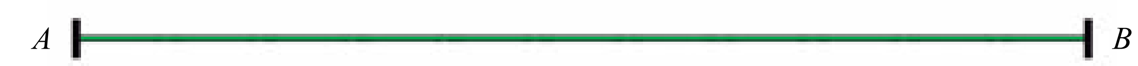
Revisemos el recorrido que deben realizar algunos de los pescadores artesanales del río Orinoco, y estudiemos con ello el concepto de vector. Recuerden que iniciamos el estudio de los vectores en el libro de segundo año.

Consideremos dos ciudades cercanas, a ambas orillas del río Orinoco como Cabruta (edo. Guárico) y Caicara (edo. Bolívar) y estimemos la distancia desde un punto en Cabruta, por ejemplo desde el sur este en la salida de las chalanas, con otro en Caicara, por ejemplo en el barrio Jusepa II. El mapa adjunto (*gráfico* 3) da una idea de la ubicación de estas ciudades.

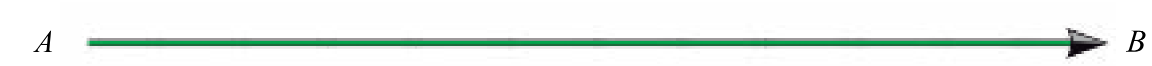
Gráfico 3

La distancia entre estas ciudades es de 9 *km* aproximadamente. Investiguen si es distinto ir de Caicara a Cabruta que de Cabruta a Caicara. Recuerden que en segundo año estudiamos que la distancia y el sentido son conceptos distintos.

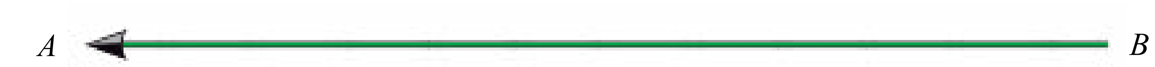
Notemos que:



Distancia entre A y B. La distancia la expresamos sólo con un número, es decir, es una cantidad escalar.



Recorrido desde A hasta B. El desplazamiento no se puede determinar sólo con un número, por lo tanto es una cantidad vectorial.



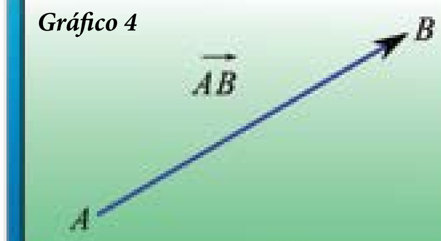
Recorrido desde B hasta A. Este desplazamiento también es una cantidad vectorial.

Un vector es un segmento de recta orientado y dirigido que tiene un origen, también llamado punto de aplicación (en el *gráfico* 4 este punto es A), y el extremo o llegada es el punto B.

Las propiedades de los vectores son:

Representación gráfica del vector $\overrightarrow{AB}$

Gráfico 4



	El **módulo** es la longitud o tamaño del vector (en este caso la distancia entre los puntos A y B)
	La **dirección** del vector es la recta que contiene al vector (en este caso la recta que pasa por A y B)
	El **sentido** del vector es el que se establece desde el origen en A al extremo B

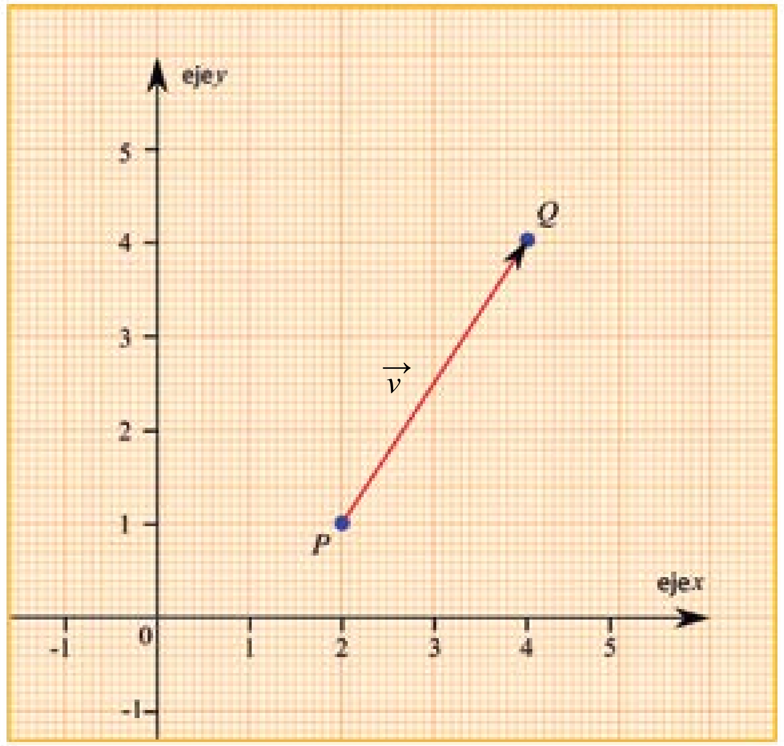
Como hemos visto, el desplazamiento o recorrido desde un punto a otro puede representarse con un vector. Los puntos de partida y de llegada se corresponden con los puntos origen y extremo, respectivamente. La distancia entre Cabruta y Caicara ($9\ km$) es el módulo de ese vector.

La dirección es la recta que pasa por estos puntos geográficos y su sentido dependerá de cuál sea nuestro punto de partida (origen). Es decir, podríamos desplazarnos en sentido Cabruta-Caicara o en sentido Caicara-Cabruta.

Los vectores en el plano cartesiano

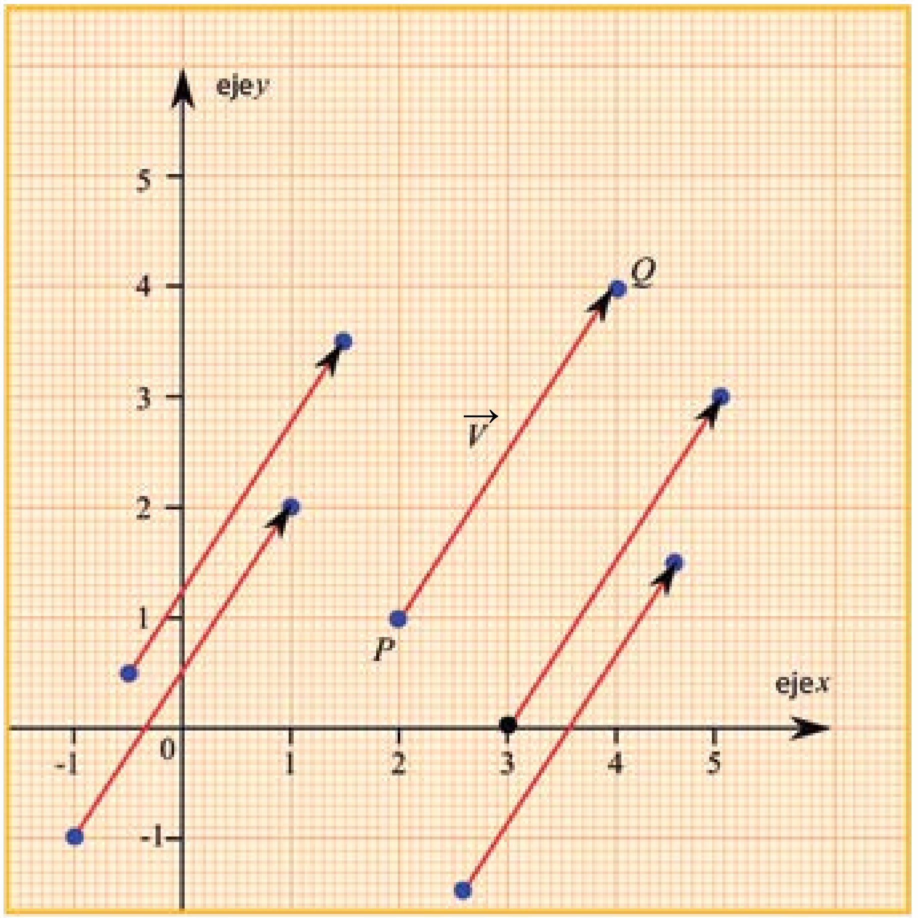
El vector también se puede representar en el *plano cartesiano* apoyándonos en las coordenadas que lo definen, tanto las del punto de origen como las del punto extremo.

Expongamos un par de ejemplos.



Representación geométrica del vector $\vec{v}$ en el plano cartesiano
Gráfico 5

El vector representado en el *gráfico* 5 tiene como punto origen a $P(2,1)$ y como punto de llegada a $Q(4,4)$ y se denomina vector fijo $\overrightarrow{PQ}$. Además, todo vector que tenga el mismo módulo, dirección y sentido que el **vector fijo** $\overrightarrow{PQ}$ es denominado **vector equipolente a** $\overrightarrow{PQ}$, es decir, son vectores que comparten las mismas propiedades. El conjunto de todos los vectores equipolentes al vector $\overrightarrow{PQ}$ se denomina **vector libre** $\vec{v}$. En este conjunto se encuentran todos los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{PQ}$. El *gráfico* 6 muestra algunos vectores equipolentes a $\overrightarrow{PQ}$.



Algunos vectores equipolentes a $\vec{v}$
Gráfico 6

Si representamos un vector en el plano cartesiano estamos en condiciones de expresar su módulo. De hecho el módulo de un vector es precisamente la longitud del segmento que va del punto origen al punto extremo. El **módulo de un vector** se escribe:

$$|\vec{P}|$$

Veamos ahora cómo podemos determinar el módulo de un vector $\vec{P}$ cuyas coordenadas son $(3,4)$. Observemos que aquí nos informan las coordenadas del vector $\vec{P}$, pero no nos dan información de sus puntos origen y extremo. En tal caso, procedemos a representar un vector equipolente a éste, justo uno que tenga como punto origen al origen del Sistema de Coordenadas Cartesiano, el punto $(0,0)$, y como extremo al punto $(3,4)$. Esta idea se fundamenta en que estos vectores comparten las mismas propiedades (dirección, sentido y módulo).

Sabemos, por el **teorema de Pitágoras**, que:

$$|\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Veamos en el *gráfico* 7, cuáles son los valores de x e y, lo que nos permitirá realizar los cálculos apropiados.

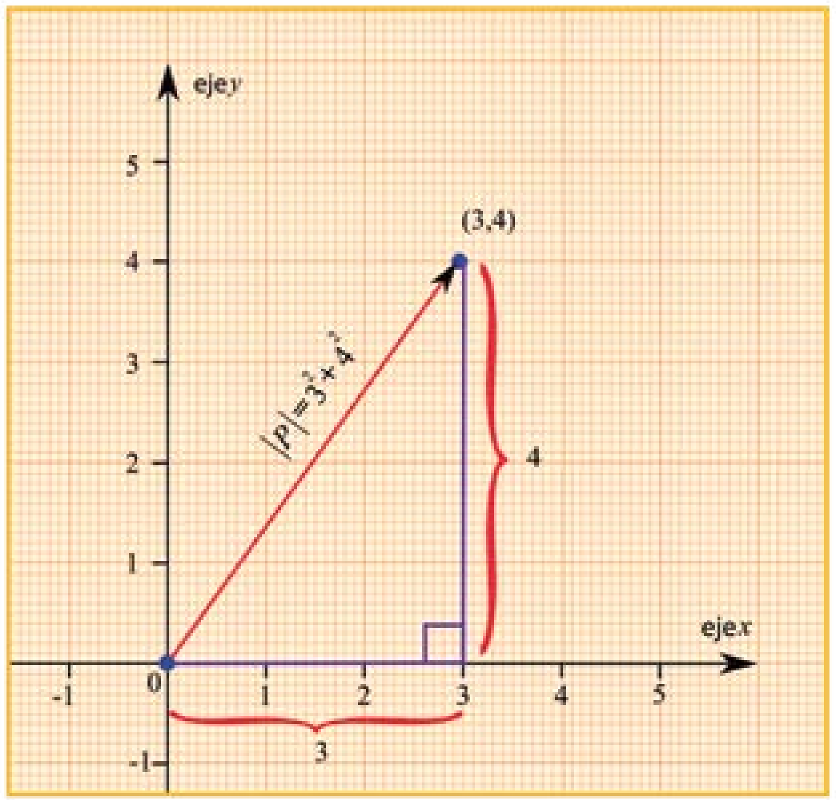


Gráfico 7

Entonces:

$$|\vec{P}|=\sqrt{3^2+4^2}$$
$$|\vec{P}|=\sqrt{9+16}$$
$$|\vec{P}|=\sqrt{25}$$
$$|\vec{P}|=5$$

Aquí usamos la idea de la radicación, calculamos los cuadrados de 3 y de 4, los sumamos, y por último, calculamos la raíz cuadrada de 25.

En consecuencia, el módulo del vector P es 5.

Veamos un segundo ejemplo. Sea el vector $\overrightarrow{AB}$, donde las coordenadas del punto A son $(5,6)$ y las de B son $(9,4)$. Hallemos su módulo. Observemos que en este caso sí nos informan de las coordenadas de los puntos origen y extremo del vector. Así, podemos sustituir estas coordenadas en la ecuación:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Aquí, x_1 y y_1 son la primera y la segunda coordenada del punto A, respectivamente. De forma similar, x_2 y y_2 son la primera y la segunda coordenada del punto B.

La idea gráfica de este problema también se basa en el **teorema de Pitágoras** (ver *gráfico 8*). Noten cuáles son las medidas de los lados del triángulo rectángulo que hemos trazado.

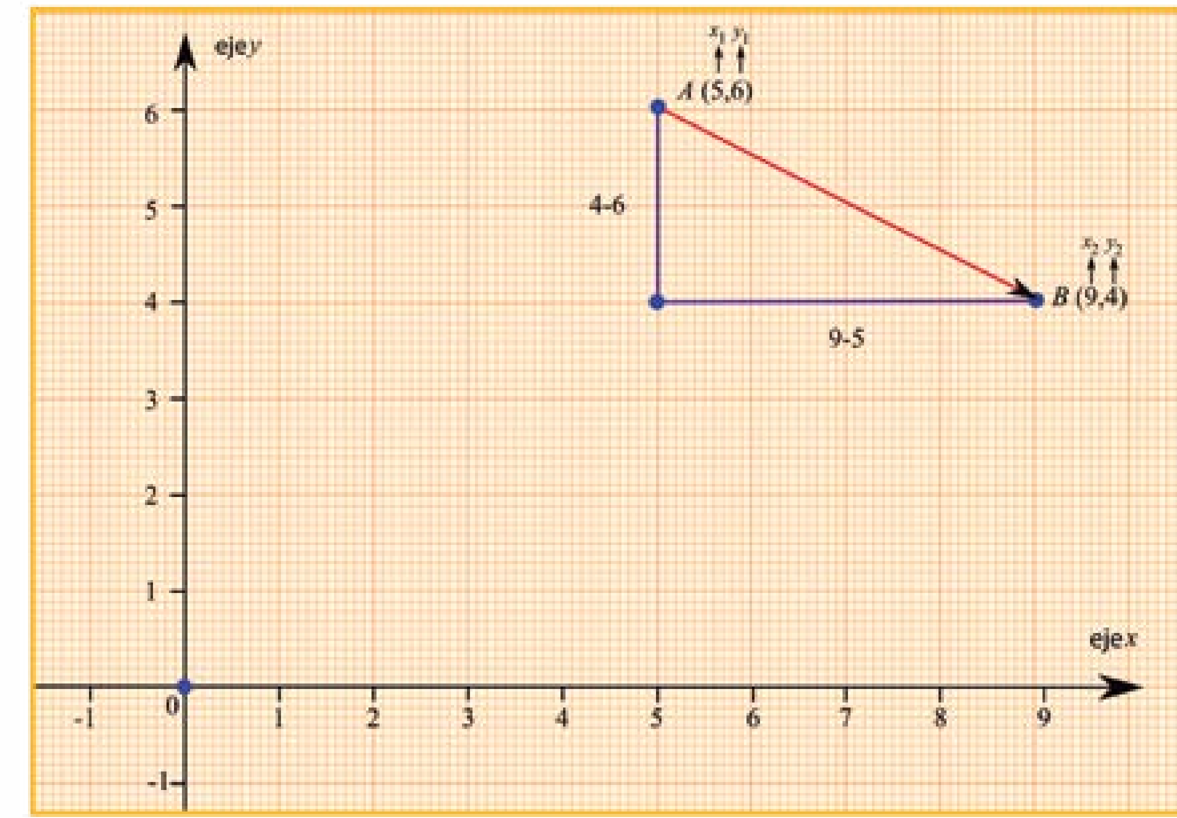
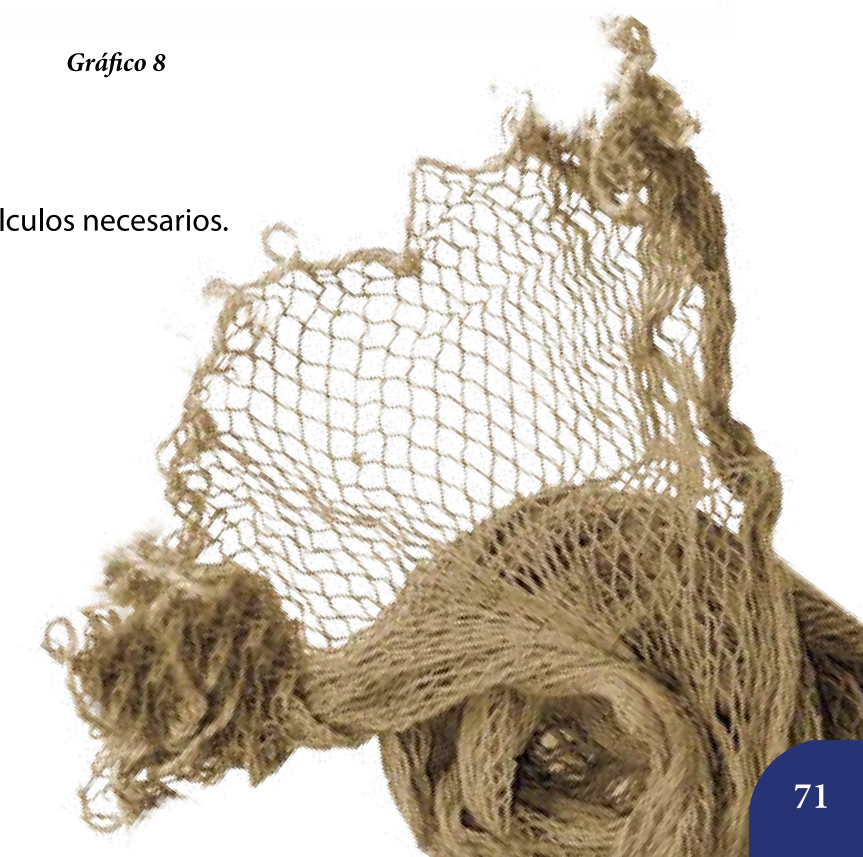


Gráfico 8



Ahora, sólo nos resta hacer los cálculos necesarios.

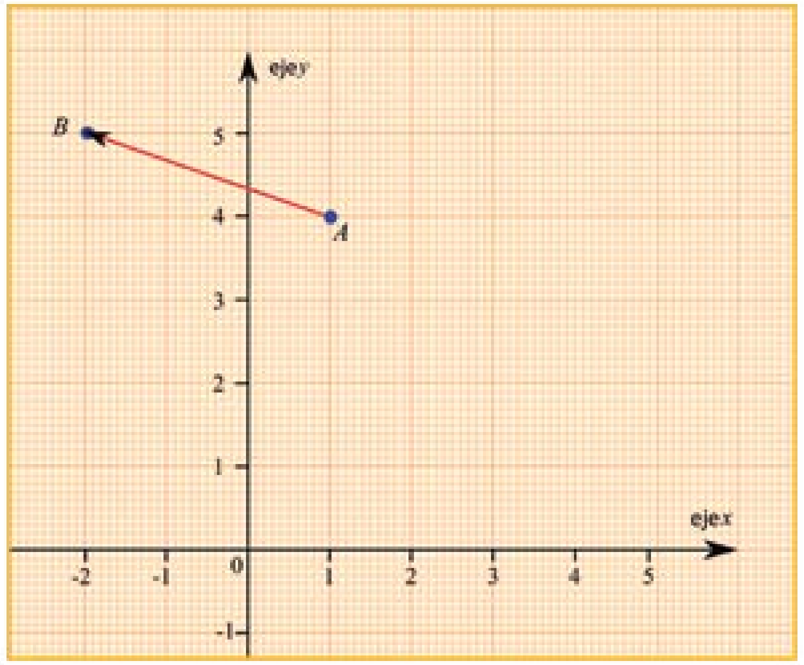
Veamos:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(9-5)^2+(4-6)^2}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+4}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{20}$$

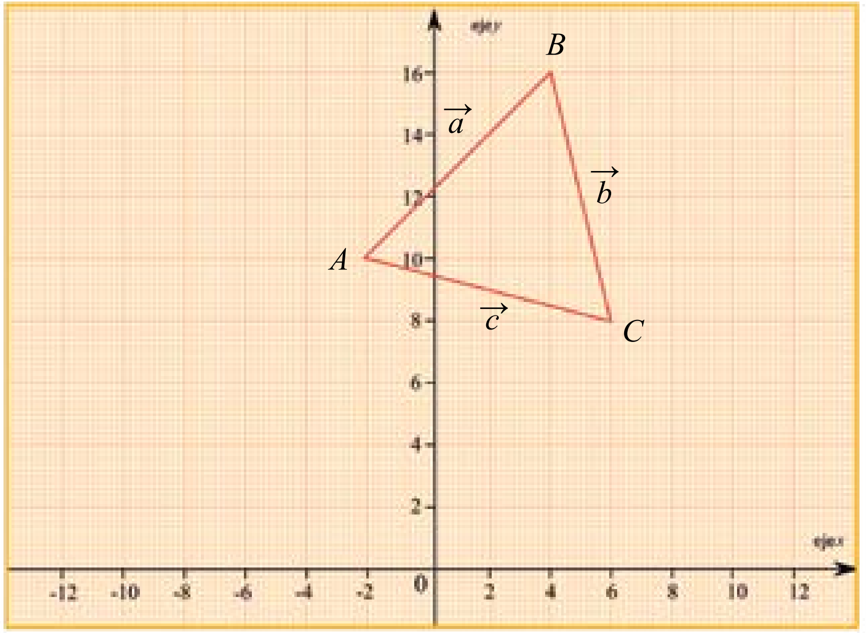
El módulo del vector es $\sqrt{20}$.

Actividades

1 Siendo $\overrightarrow{AB}$ el vector representado de seguidas. Hallen varios vectores equipolentes a $\overrightarrow{AB}$. Consideren que $A=(1,4)$ y $B=(-2,5)$. ¿Cuántos de tales vectores existen?



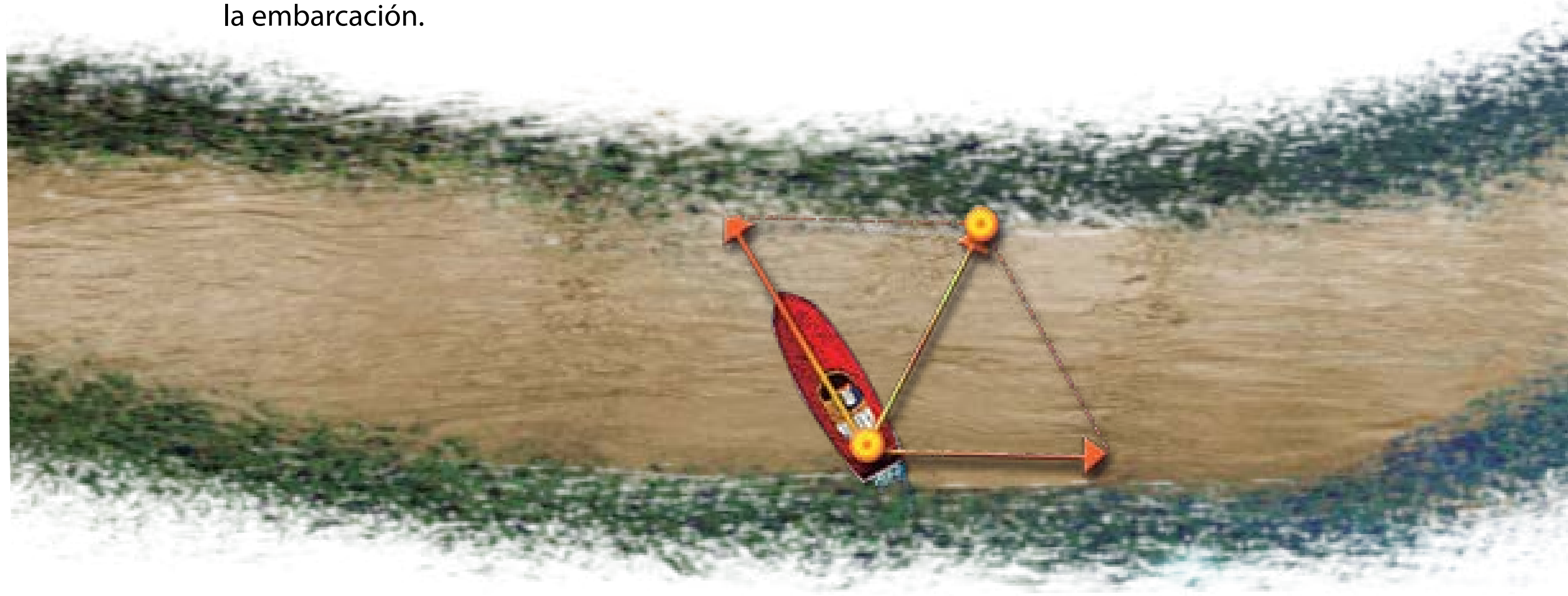
2 En el triángulo de vértices A, B y C. Determinen las coordenadas de los puntos A, B y C y hallen las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



3 En un triángulo conocemos que $A=(4,-6)$, $\overrightarrow{AB}=(2,-4)$ y $\overrightarrow{BC}=(-2,2)$. Determinen las coordenadas de B, C y $\overrightarrow{AC}$.

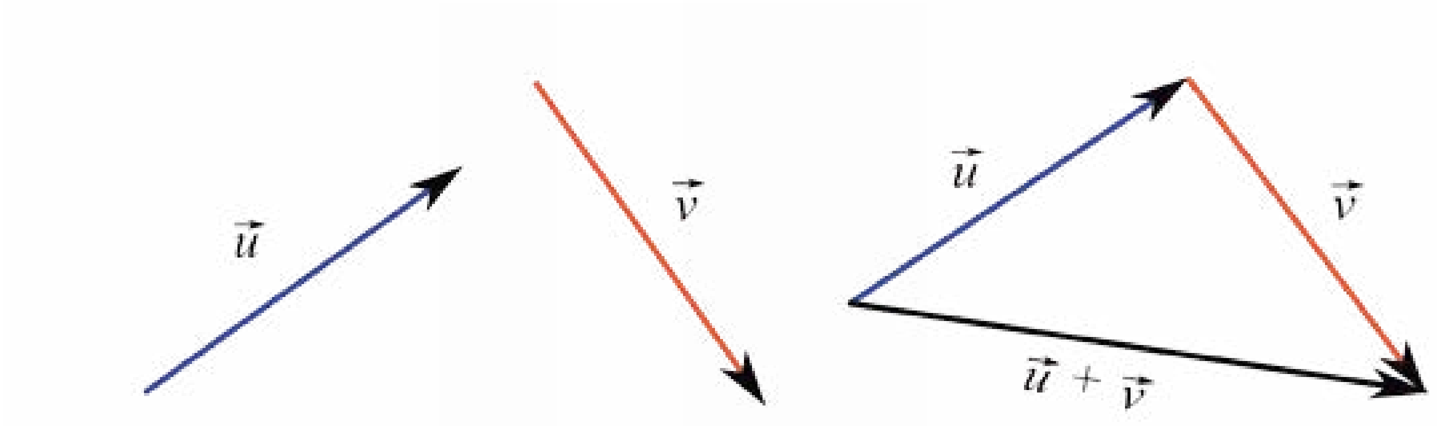
¡A sumar vectores!

La naturalidad con que el pescador de agua dulce cruza de una orilla del río hasta a la otra orilla, se representa en matemática como la suma de dos vectores, uno, el que representa la fuerza de las aguas del río (la corriente del río) y el otro, el que representa la fuerza del motor que mueve la embarcación.



Geométricamente existen dos procedimientos que se pueden emplear para hallar la suma de vectores. Como se observa en la figura siguiente, se dibuja el vector $\vec{u}$ desde el punto de llegada de $\vec{u}$ se dibuja el vector $\vec{v}$, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector que va desde el punto de aplicación u origen de $\vec{u}$ hasta el punto de llegada de $\vec{v}$.

Este método para hallar la suma de vectores se conoce como la **regla del triángulo**.



Un método alternativo, que es equivalente al anterior es la **regla del paralelogramo**. Veamos, representamos a los vectores libres $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ desde el mismo punto de aplicación u origen (se hacen coincidir los puntos de aplicación de $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$. Por comodidad suelen graficarse en el origen del Sistema de Coordenadas Cartesianas) y se completa el paralelogramo. La diagonal trazada desde el punto común representa la suma $\vec{u}'+\vec{v}'$ (ver el *gráfico* 9). En todo este proceso nos hemos basado en el conjunto de vectores equipolentes.

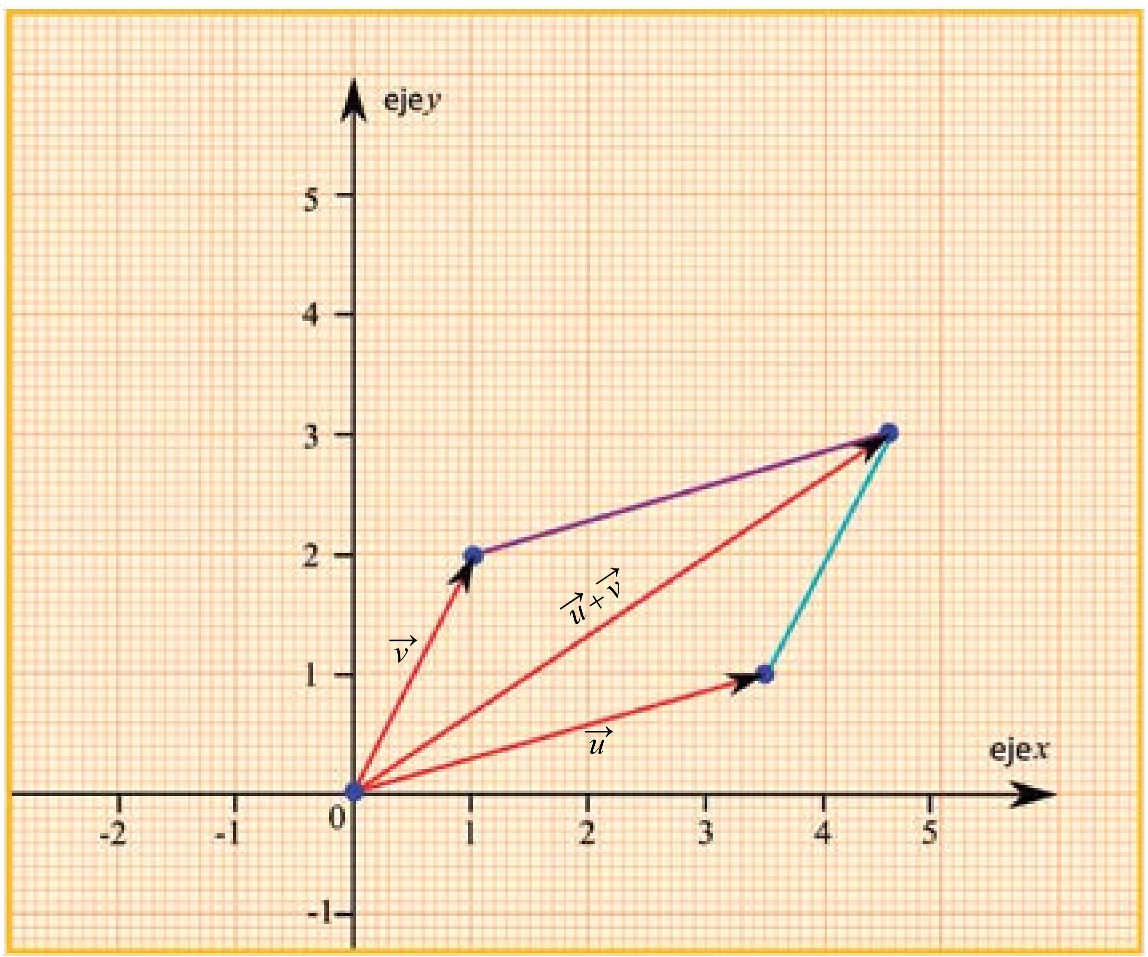
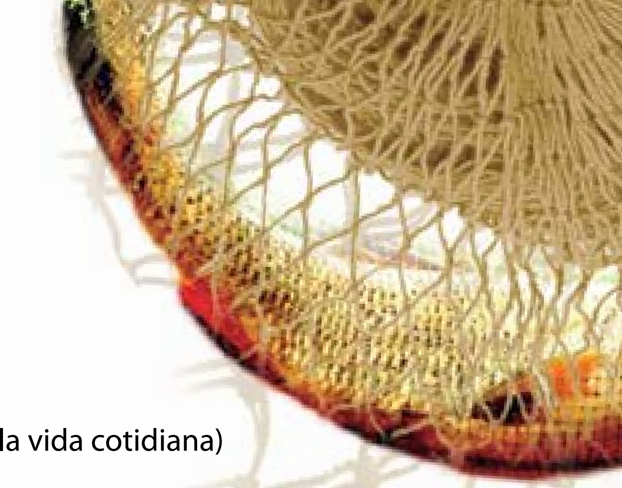


Gráfico 9

Algebraicamente también podemos sumar vectores, sumando las coordenadas correspondientes. Veamos:

Dados dos vectores libres $\vec{a}=(-3,4)$ y $\vec{b}=(1,-2)$ La suma de ellos se halla sumando los pares ordenados de cada vector libre de la siguiente manera:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overline{a+b}=(-3+1\,,\,4+(-2))=(-2\,,\,2)$$



Actividades

1 Den otros ejemplos (relacionados con el entorno y la vida cotidiana) de *magnitudes escalares* y *vectoriales*.

2 Determinen geométricamente la suma de los siguientes vectores (usen papel cuadriculado o papel milimetrado).

- $\vec{A}=(2\,,4)$ y $\vec{Y}=(8\,,2)$
- $\vec{C}=(-4\,,4)$ y $\vec{B}=(-4\,,0)$
- $\vec{M}=(-4\,,-4)$ y $\vec{N}=(-7\,,0)$
- $\vec{S}=(6\,,0)$ y $\vec{T}=(2\,,-2)$
- $\vec{U}=(4\,,0)$ y $\vec{V}=(6\,,0)$

3 Calculen lo siguiente: cuál es el valor de $\vec{f}+\vec{g}$ si:

- $\vec{f}=(4\,,-5)$; $\vec{g}=(0\,,0)$
- $\vec{f}=(1\,,0)$; $\vec{g}=(3\,,3)$
- $\vec{f}=(-2\,,3)$; $\vec{g}=(3\,,-2)$
- $\vec{f}=(3\,,-4)$; $\vec{g}=(-3\,,4)$

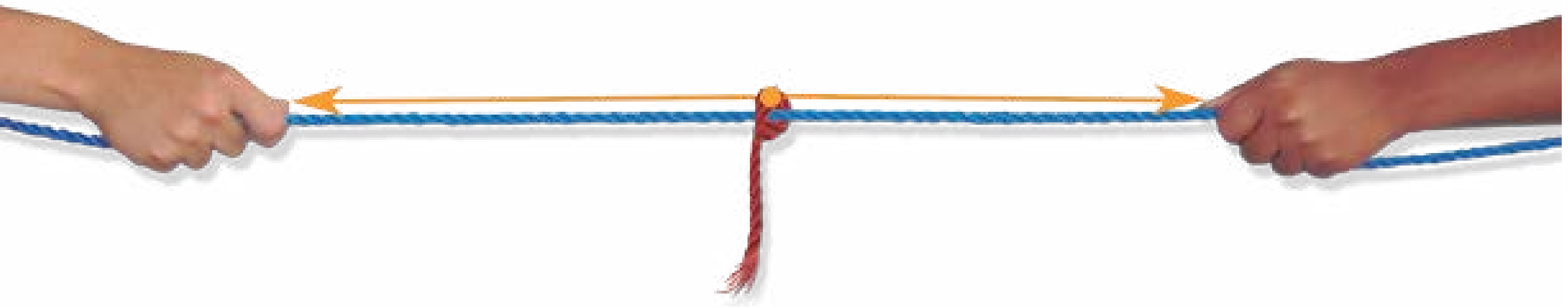
4 Determinen un vector $\vec{h}$ que sumado con $\vec{i}=(-6\,,7)$ resulte:

- $\vec{h}+\vec{i}=(0\,,0)$
- $\vec{h}+\vec{i}=(-2\,,3)$
- $\vec{h}+\vec{i}=(5\,,4)$
- $\vec{h}+\vec{i}=(-12\,,14)$

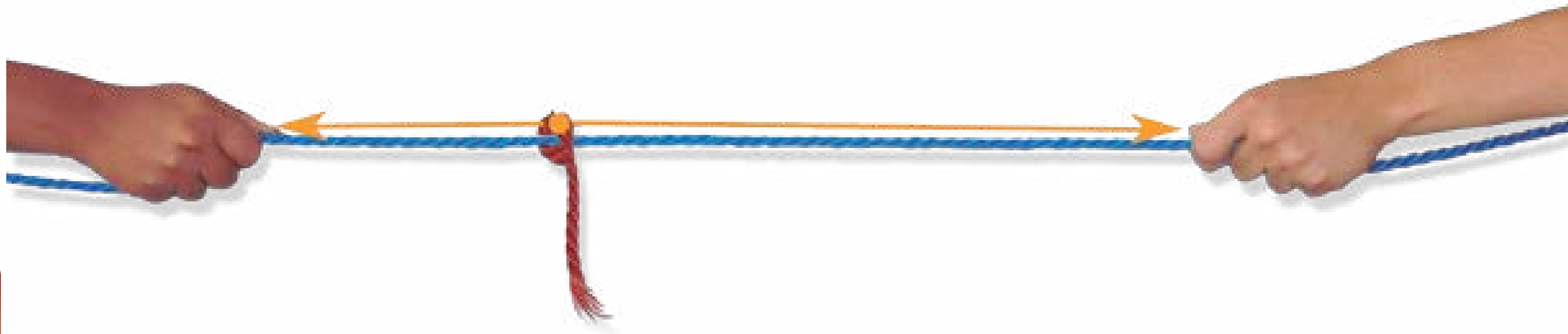
5. Dados los vértices de un triángulo A, B, C, donde $A(-3,2)$, $B(1,0)$ y $C(5,5)$ hallen las coordenadas del baricentro (el baricentro es el punto de intersección de las medianas).

Sobre la multiplicación de un vector por un número: ¡hala la cuerda, dale, dale!

Comentemos un juego para estudiar otro fenómeno o hecho que se puede comprender haciendo uso de los vectores. Este juego se puede representar gráficamente por medio de dos vectores opuestos.



Si en el juego hay dos personas, una en cada lado. ¿Qué pasa si en uno de los lados se agrega una persona para halar la soga? Se multiplica la fuerza aplicada en ese sentido por un número positivo mayor o igual a uno (en este caso).



Cuando un vector es multiplicado por una cantidad escalar, se modifica la magnitud del vector, haciéndolo "más grande" o "más pequeño".

Por ejemplo, consideremos al vector $\vec{a}$:

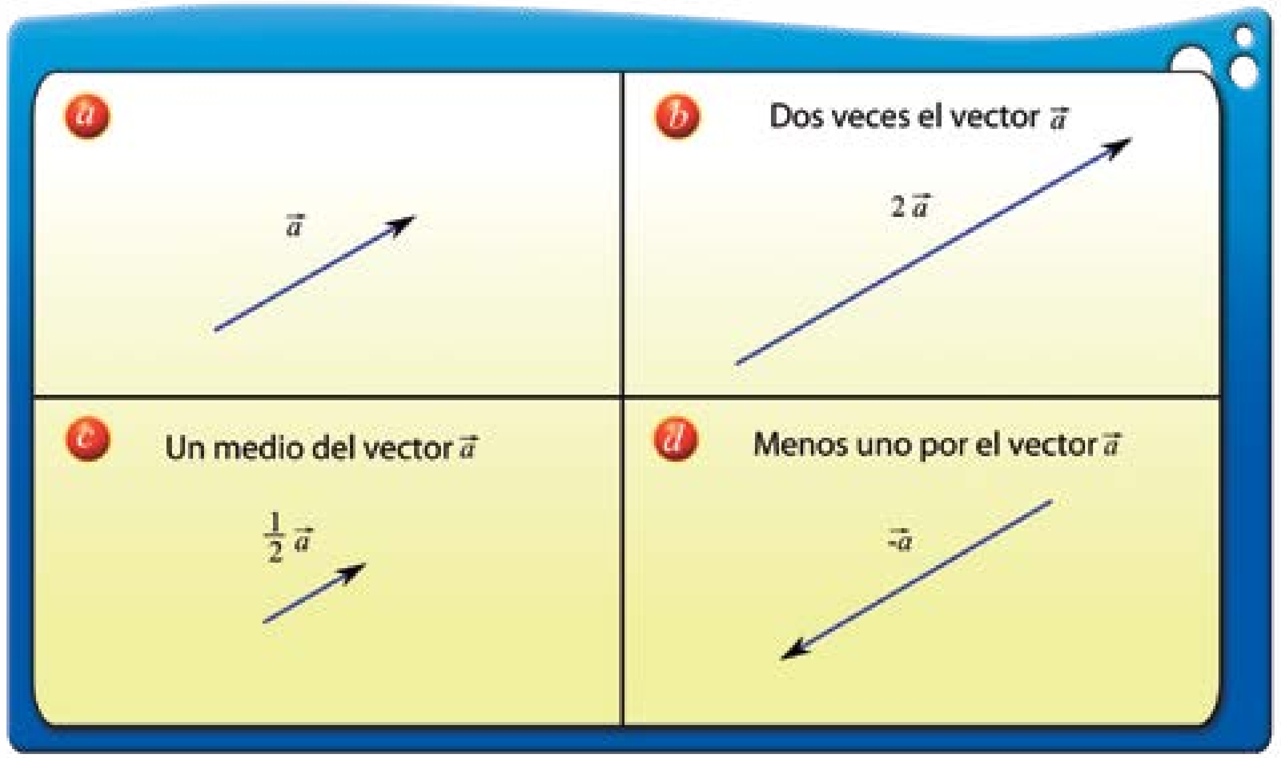


Gráfico 10

Revisemos el *gráfico* 10, en los casos a, b, y c únicamente cambia el módulo del vector, pero no su dirección y sentido. En el caso d cambia el sentido del vector.

Actividades

1. Expongan un vector a través de sus coordenadas y multiplíquenlo por los siguientes números: 2, 3, -1, ¾, - ½. Representen cada uno de los vectores resultantes en el plano cartesiano.

2. ¿Qué sucede si multiplicamos un vector cualquiera por 1?

3. Si multiplicamos al vector $\vec{v}$ por el número c, ¿cómo varía su módulo?

4. Debatan sus observaciones con sus compañeras y compañeros.

5. Representen en el plano cartesiano el **vector libre** que corresponde al vector $\frac{1}{2}\vec{a}$. Recuerden que el vector libre de $\frac{1}{2}\vec{a}$ es el conjunto de todos los vectores equipolentes a él.

Las ideas previas pueden enunciarse como sigue. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores, y sean m y n escalares arbitrarios (lo que significa que las propiedades que expondremos se verifican para cualesquiera vectores y escalares), entonces:

$$m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}$$
$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$$
$$mn\left(\vec{a}\right)=m\left(n\vec{a}\right)=n\left(m\vec{a}\right)$$
$$1\vec{a}=\vec{a}$$
$$0\vec{a}=\vec{0}$$

El vector unitario

Por otra parte, si un vector tiene módulo 1, entonces se dice que es un vector unitario. Pero, cómo podemos obtener un vector unitario partiendo de un vector cualquiera $\vec{a}$ diferente de cero. La definición que mostramos a continuación señala el procedimiento para ello.

Si $\vec{a}\neq\vec{0}$ entonces el vector:

$$\vec{u}=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$$

Es **unitario** y tiene la misma dirección que el vector a.

Obtengan los vectores unitarios correspondientes a los vectores suma del problema 2.

Letra de José Vicente Rojas,
Música de Eneas Perdomo

Pescador del río Apure, pescador del río Apure
con tu alma sincera y buena
que te duermes en la playa
y te arropas con la arena (bis).
Remontando, remontando, verdad pasaje
chorreras y más chorreras
vas pescador de agua dulce, ay de agua dulce
por las costas apureñas.
En las orillas del río, verdad del río
no sientes dolor ni pena
porque escuchas la matraca, ay la matraca
la gaviota y la morena
Tú vas como la cotúa, tú vas como la cotúa
siguiendo la ribazón
con palanca y canalete
con anzuelo y con arpón, verdad pasaje
con anzuelo y con arpón.
En ratos de ensoñación, en ratos de ensoñación
vas en tu humilde curiara
y a Guaritico y Caicara, anda Caicara
le dejas tu inspiración.
Pescador del río Apure, del río Apure
te regalo mi canción
la que me inspiraste tú
anda caramba, cuando iba yo de patrón.

5 GAS, GASOLINA Y COMUNIDAD

Sistemas de Ecuaciones lineales y métodos de resolución

Un problema sobre la venta de las bombonas de gas comunal

En la página web de Petróleos de Venezuela S.A., se presenta la información que PDVSA Gas Comunal es una compañía de servicio público suplidora de gas domiciliario. Es una empresa estratégica que atiende las necesidades de la población, protege el medio ambiente y participa con las comunidades en la construcción colectiva. Además promueve el desarrollo de proyectos basados en fuentes alternativas de energía y de proyectos que incentiven el desarrollo industrial y económico de las regiones. Esta compañía distribuye, en nuestro país, el 60% de las bombonas de gas licuado de petróleo (GPL) que son consumidas en los diversos sectores de la población.

Las bombonas de gas vienen en presentaciones de $10\ kg$, $18\ kg$ y $43\ kg$. Su precio está regulado, a través de la Gaceta Oficial tal como se muestra:

Presentación (kg)	Costo (Bs)
10	3,70
18	6,70
43	16

Disponiendo de esa información, necesitamos apoyar al Consejo Comunal de la población de Moruy, en el Municipio Falcón del Estado Falcón, a resolver la siguiente situación: Se conoce que en la venta de bombonas del último mes se han recaudado $Bs.\ 125{,}50$ y que se han vendido un total de 25 bombonas en presentaciones de $10\ kg$ y $18\ kg$. Sin embargo, no se llevó el registro de cuántas bombonas de cada presentación se habían vendido. Ellas y ellos necesitan tener ese registro para tramitar, ante la oficina de PDVSA Gas Comunal, el siguiente pedido. ¿Cómo podremos ayudarles a obtener dicha información?

Observamos que tenemos dos cantidades que son desconocidas: el número de bombonas de $10\ kg$ y el número de bombonas de $18\ kg$. En consecuencia, tenemos dos incógnitas. Vamos a proceder a identificar, mediante una letra, cada una de dichas incógnitas. Sean:

x = número de bombonas de $10\ kg$
y = número de bombonas de $18\ kg$

Nosotros conocemos el precio unitario de las bombonas de $10\ kg$ y de $18\ kg$, que son $Bs.\ 3{,}70$ y $Bs.\ 6{,}70$ respectivamente. Adicionalmente, también sabemos que el monto total de la venta de las bombonas fue de $Bs.\ 125{,}50$. Podemos, en consecuencia, plantear la siguiente ecuación:

$$3{,}70 \cdot x + 6{,}70 \cdot y = 125{,}50$$

Esto quiere decir que tenemos un número x de bombonas a $Bs.\ 3{,}70$, al cual le sumamos una cantidad y de bombonas que fueron vendidas a $Bs.\ 6{,}70$, y que toda esa venta dio como resultado $Bs.\ 125{,}50$.

También tenemos un dato adicional, el número total de bombonas vendidas, que en las presentaciones de $10\ kg$ y $18\ kg$, fue de 25. Planteamos entonces una segunda ecuación:

$$x + y = 25$$

Hasta ahora hemos elaborado dos ecuaciones:

$$3,70 \cdot x + 6,70 \cdot y = 125,50$$
$$x + y = 25$$

Ya ustedes han estudiado una **ecuación lineal con dos incógnitas** x e y, por tanto conocemos que es toda expresión, de la forma $ax + by = c$, donde a y b son números reales, denominados los coeficientes de las incógnitas x e y, con c un número real, llamado **término constante**.

- ¿Recuerdan cuál es la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas?
- ¿Cuántas ecuaciones lineales con dos incógnitas se han formulado en la situación planteada por los miembros del Consejo Comunal de la población de Moruy?

Efectivamente, las dos ecuaciones lineales, o ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas consideradas conjuntamente forman un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** y suelen representarse mediante una llave.

En el caso del Consejo Comunal de Moruy:

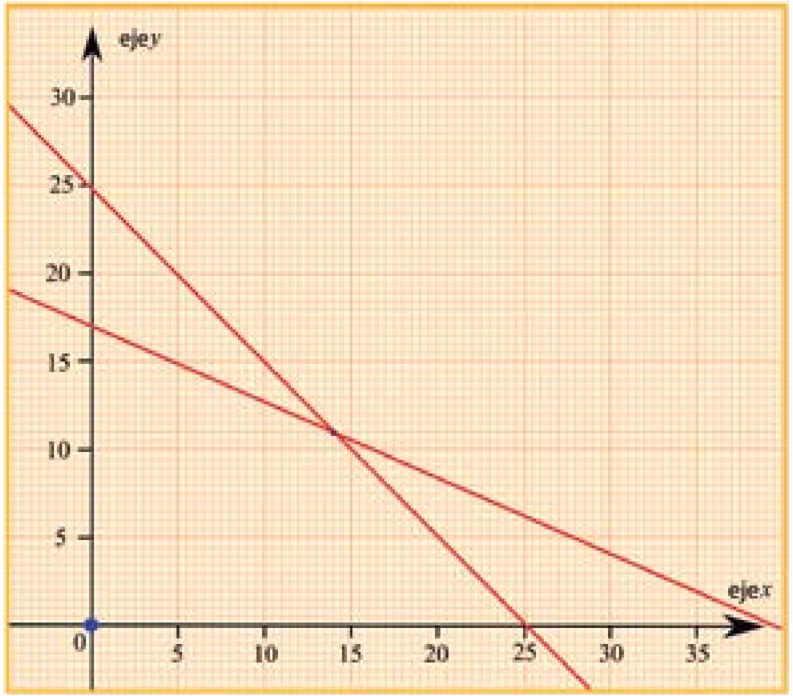
$$\begin{cases} 3,70 \cdot x + 6,70 \cdot y = 125,50 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en determinar los valores de las incógnitas x e y que satisfacen, simultáneamente, a cada ecuación del sistema.

Método de resolución gráfica

En el caso que nos ocupa, debemos, entonces, obtener un par ordenado (x, y) que debe satisfacer, simultáneamente, a cada una de las ecuaciones lineales que estamos considerando. Por tanto, ese es un punto que pertenece a cada una de las rectas que son representaciones gráficas de dichas ecuaciones. Representen cada una de las ecuaciones lineales que estamos utilizando y encuentren el punto de intersección de ambas rectas.

Veamos esas representaciones gráficas en un sistema de coordenadas:



- ¿Cuál es el punto donde se cortan, o punto de intersección, de las dos rectas?

En el caso que nos ocupa, el par ordenado $(14, 11)$ es la solución al problema planteado. Es decir, se vendieron un total de 14 bombonas de $10\ kg$ (x) y 11 bombonas de $18\ kg$ (y).

Observen que para poder resolver la situación que se planteó el Consejo Comunal de Moruy, hemos formulado un modelo matemático.

En términos muy generales un modelo es una manera de proceder cuando tratamos de comprender las realidades del mundo que nos rodea. Cuando los problemas se expresan en el lenguaje algebraico, producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelado y obtener su solución. La modelación algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

En consecuencia, para resolver un sistema de ecuaciones lineales debemos seguir los siguientes pasos:

- Formulación del modelo matemático.
- Análisis y discusión del sistema.
- Resolución del sistema.

En lo que sigue ilustraremos otras situaciones que pueden estudiarse con base en los sistemas de ecuaciones lineales así como otros métodos de resolución.

Otras situaciones que conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

La República Bolivariana de Venezuela es un país cuya mayor fuente de ingresos proviene del ingreso petrolero, por tanto es sumamente importante la pertinencia económica y social de comercializar productos energéticos. Uno de esos productos fundamentales es la producción y venta de gasolina. Ligado a ello consideremos la siguiente situación:

Una refinería venezolana mezcla combustibles de alto y bajo octanaje para producir gasolina normal y súper. Los beneficios de los dos tipos de gasolina por galón son $0{,}65$ y $0{,}90$ *Bolívares*, respectivamente. Un galón ($3{,}78$ *litros*, aproximadamente) de gasolina súper se hace mezclando $0{,}5$ galones de cada uno de los combustibles. Un galón de gasolina regular se obtiene mezclando $0{,}25$ galones de octanaje alto con $0{,}75$ galones de octanaje bajo. Si se dispone de 500 galones de octanaje alto y 600 de octanaje bajo, los cuales deben ser utilizados en su totalidad, ¿cuántos galones de cada tipo de gasolina debería hacer la refinería? y ¿cuál es el beneficio que se obtendrá?

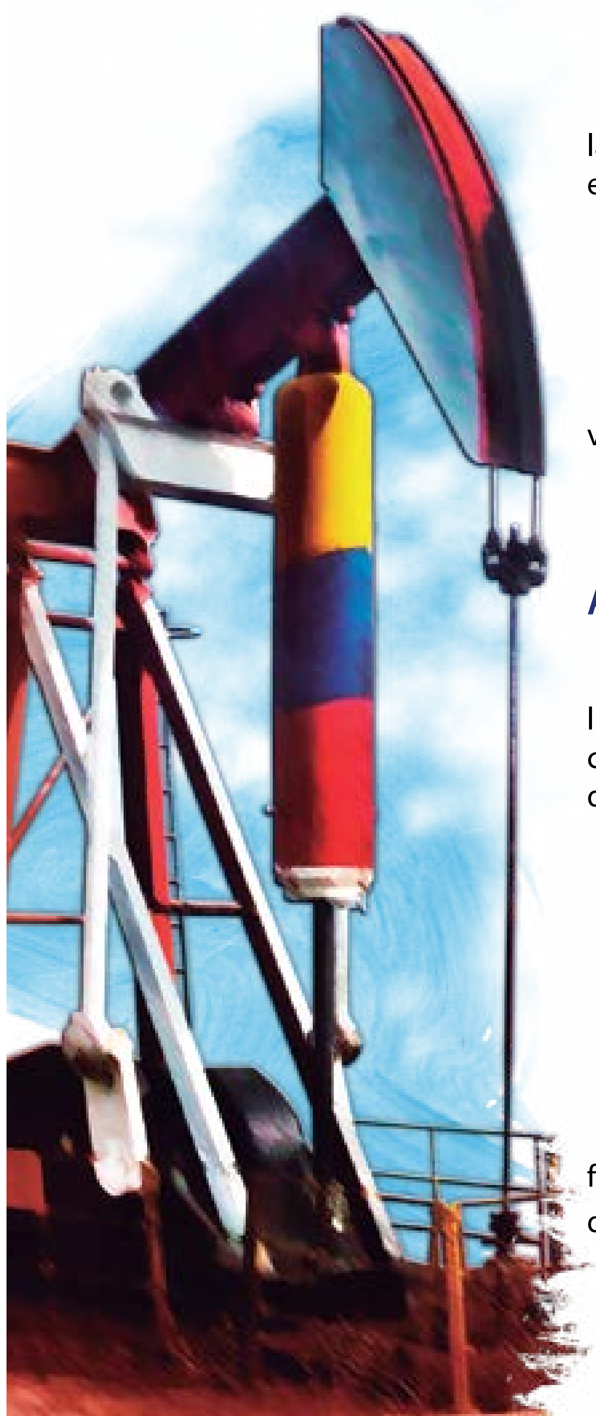
En correspondencia con los pasos que planteamos anteriormente, avancemos en la formulación del modelo matemático que nos permitirá el planteamiento de un sistema de ecuaciones.

Formulación del modelo matemático

Para ello, vamos a proceder a colocar en un cuadro las diferentes variables y condiciones que están presentes en la situación planteada. Allí se nos pide determinar cuántos galones de gasolina súper y cuántos de gasolina normal se deben obtener a partir de una cantidad de galones de octanaje alto y de octanaje bajo de los cuales se dispone. Adicionalmente, conocemos en qué proporciones hacer la mezcla y las condiciones de beneficio que se obtienen en el proceso.

Tenemos entonces el siguiente cuadro, donde x e y representarán, respectivamente, las cantidades de gasolina súper y de gasolina normal que debe ser producida:

Mezclas	Octanaje alto (500 *gal*)	Octanaje bajo (600 *gal*)	Beneficio
Gasolina súper (x *gal*)	$0{,}5$ *gal*	$0{,}5$ *gal*	Bs $0{,}90$/ *gal*
Gasolina normal (y *gal*)	$0{,}25$ *gal*	$0{,}75$ *gal*	Bs $0{,}65$/ *gal*



Debemos entonces que hacer la traducción algebraica para las condiciones que se nos dan. En consecuencia, tendremos dos ecuaciones lineales que conformarían el sistema. Estas serían:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,25y = 500 \\ 0,5x + 0,75y = 600 \end{cases}$$

Por otra parte, tenemos una expresión para los beneficios que viene dada por:

$$0,90\,x + 0,65\,y$$

Análisis y discusión del sistema

Ahora tenemos que analizar y discutir el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que hemos planteado. Aplicando nuestros conocimientos de expresiones decimales y fracciones, tenemos que dicho sistema puede ser expresado como:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 500 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 600 \end{cases}$$

Aquí escribimos $0,5 = \frac{1}{2}; 0,25 = \frac{1}{4}; 0,75 = \frac{3}{4}$ es decir, buscamos las fracciones generatrices correspondientes a cada una de las expresiones decimales dadas.

Por otra parte, una ecuación lineal se puede multiplicar o dividir por un mismo número sin que sus soluciones se alteren. Con este procedimiento, obtenemos ecuaciones que son equivalentes. Aplicando este conocimiento, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales que es equivalente al anterior:

$$\begin{cases} 2x + y = 2.000 \\ 2x + 3y = 2.400 \end{cases}$$

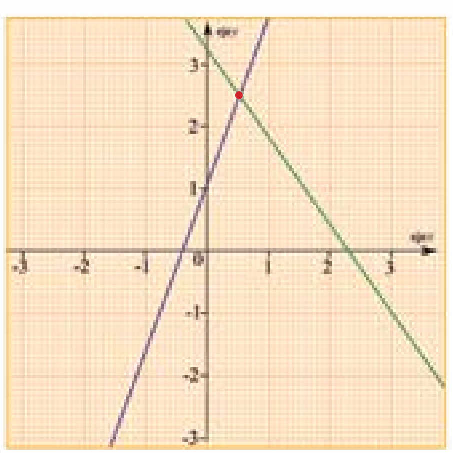
¿Por cuál número hemos multiplicado, en cada ecuación, para obtener el sistema equivalente?

Resolución del sistema

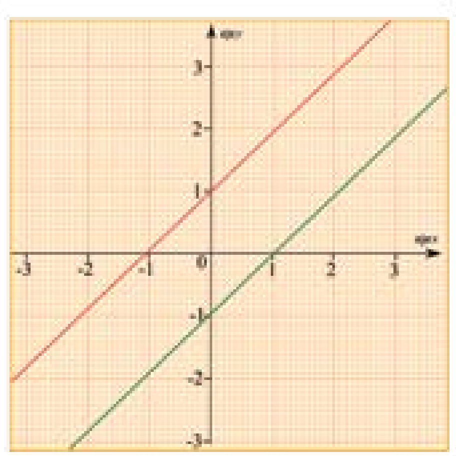
Una forma de efectuar este tercer paso sería el método de resolución gráfica que ya utilizamos para la situación de las bombonas de gas. Este método se basa en la representación gráfica en el plano cartesiano. Ya vimos que una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, de modo que la solución al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consiste en representar ambas rectas y determinar, en consecuencia, dicha solución.

La interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, nos permite ver que sólo existen tres posibilidades:

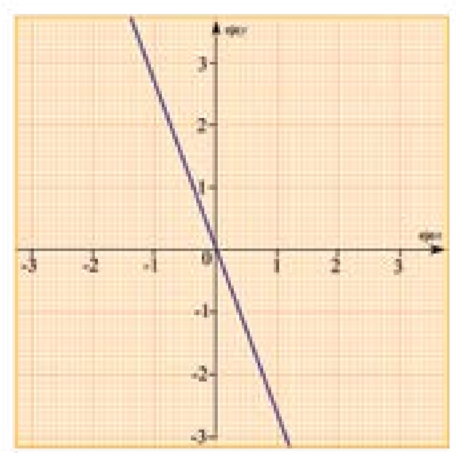
- Las rectas se cortan, son secantes (una solución única).
- Sean paralelas (el sistema no tiene solución).
- Sean coincidentes (infinitas soluciones).



Las rectas se cortan
(el sistema tiene solución única)



Las rectas son paralelas
(el sistema no tiene solución)



Las rectas son coincidentes
(el sistema tiene infinitas soluciones)

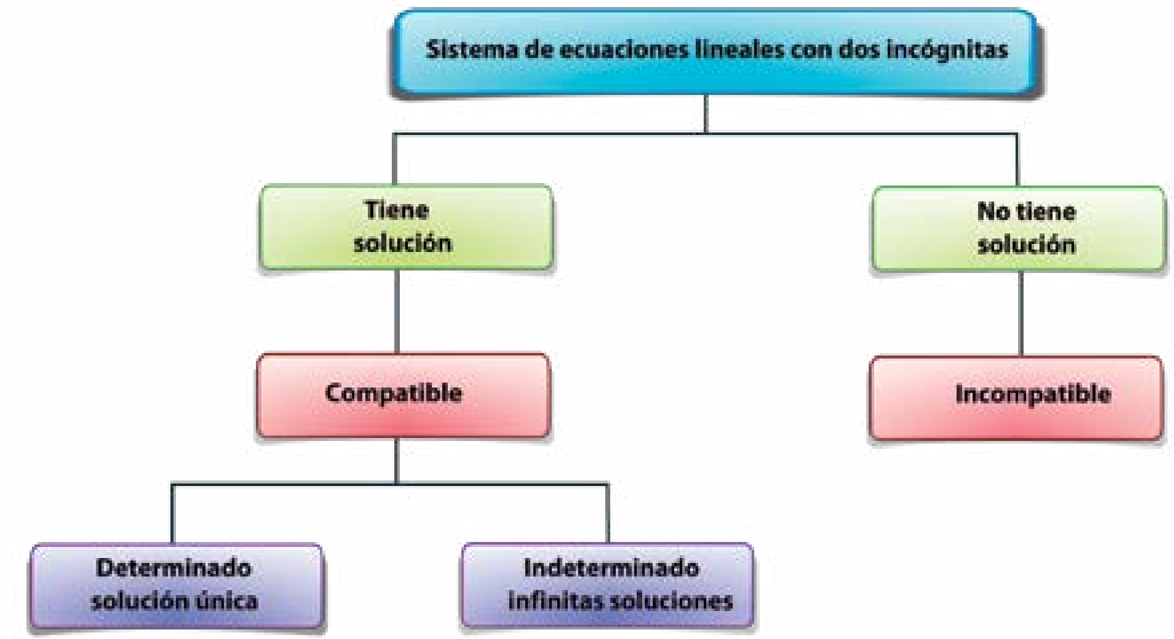
En el problema que estamos analizando la representación gráfica de las dos rectas sería la siguiente:

Las rectas se cortan en el punto $(900\ ,\ 200)$, por tanto existe una solución y es única. Es decir hay que producir 900 galones de gasolina súper y 200 galones de gasolina normal.

Cuando un sistema tiene solución se afirma que es **compatible**. Si la solución es única se denomina **compatible determinado** y si tiene infinitas soluciones se llama **compatible indeterminado**. Si no tiene soluciones se dice que es **incompatible**.

En el caso que nos ocupa, ¿cómo se clasifica el sistema que se ha planteado?

La clasificación puede visualizarse de la siguiente manera:



Nos falta determinar el beneficio que se obtendrá al producir 900 galones de gasolina súper y 200 galones de gasolina normal. Sustituyendo en la ecuación de beneficios que viene dada por: $0,90\,x + 0,65\,y$ tendremos lo siguiente:

$$0,90 \cdot 900 + 0,65 \cdot 200 = 810 + 130 = 940$$

Por tanto, el beneficio obtenido será de $Bs.\ 940$.

Ya hemos estudiado el **método de resolución gráfica** como una opción para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. También podemos utilizar un **método analítico**, el cual puede ser abordado de tres distintas maneras. Veamos cada una de ellas.

Método de resolución por sustitución

Un método algebraico para resolver sistemas de ecuaciones es el **método de Sustitución**, el cual consiste en:

- Despejar de una de las ecuaciones una de las incógnitas en función de la otra.
- Sustituir este valor en la otra ecuación.

Veamos la siguiente situación que debemos resolver:

En la panadería comunal "Panal 2021", en el sector "23 de enero" de Caracas, 18 panes canilla y 12 panes campesinos costaron $Bs.\ 69$, y 9 panes canilla y 11 panes campesinos costaron $Bs.\ 52$. ¿Cuánto costó cada pan canilla y cada pan campesino?

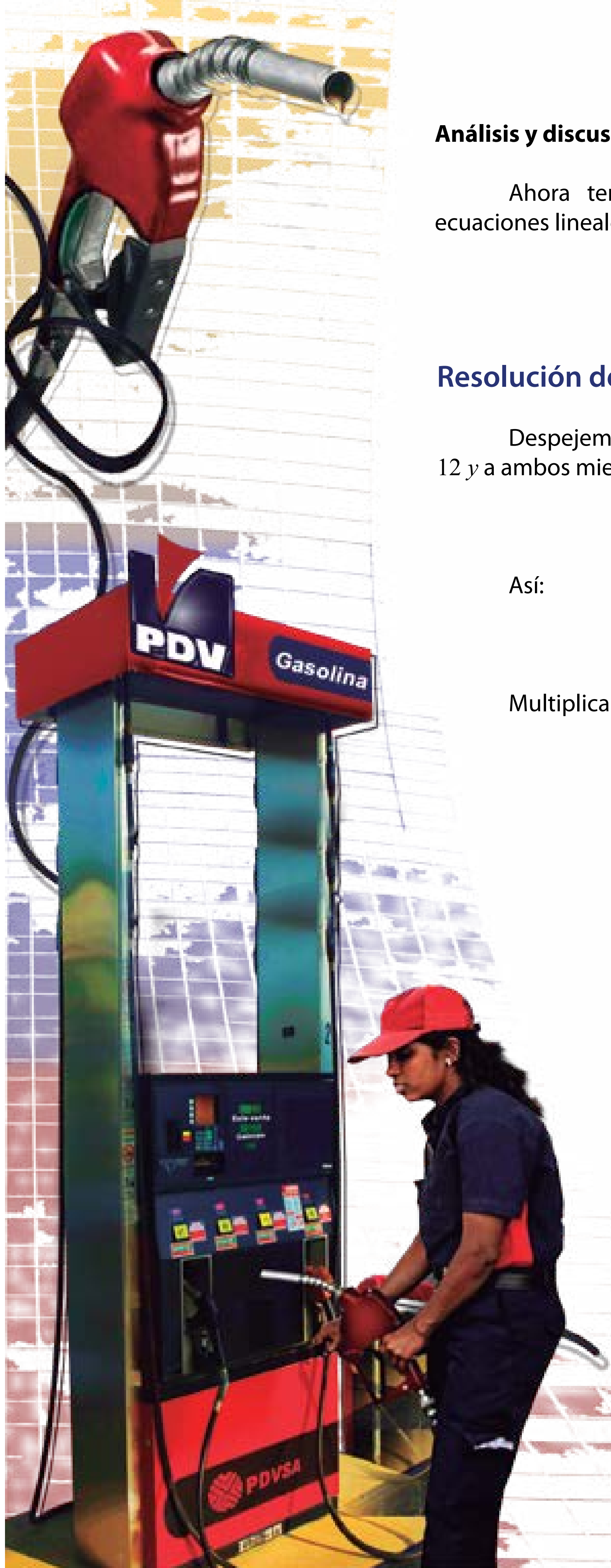
Formulación del modelo matemático

Observamos que tenemos dos incógnitas: el número de panes canilla y el número de panes campesinos. Vamos a proceder a identificar, mediante una letra, cada una de dichas incógnitas. Sean:

$x =$ costo de panes canilla
$y =$ costo de panes campesinos

Tenemos ahora que plantear las ecuaciones que expresen las condiciones dadas en la situación considerada. Las ecuaciones serían las siguientes:

$$\begin{cases} 18x + 12y = 69 \\ 9x + 11y = 52 \end{cases}$$



Análisis y discusión del sistema

Ahora tenemos que **analizar** y **discutir** el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que hemos planteado.

$$\begin{cases} 18\,x + 12\,y = 69 \\ 9\,x + 11\,y = 52 \end{cases}$$

Resolución del sistema

Despejemos la variable x de la primera ecuación, restando $12\,y$ a ambos miembros de la ecuación nos queda:

$$18\,x + 12\,y - 12\,y = 69 - 12\,y$$

Así:

$$18\,x = 69 - 12\,y$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el inverso de 18, nos resulta:

$$x = \frac{69 - 12\,y}{18}$$

Ahora se **sustituye** la expresión de x en la segunda ecuación:

$$9 \cdot \left(\frac{69 - 12\,y}{18} \right) + 11y = 52$$

Simplificando nos queda:

$$\frac{69 - 12\,y}{2} + 11y = 52$$

Se multiplica por 2 ambos miembros de la igualdad y tenemos:

$$69 - 12y + 22y = 104$$

Aplicando propiedades de la adición y simplificando tenemos:

$$10y = 35$$

De esa igualdad, despejamos y:

$$y = \frac{35}{10} = 3,5$$

Se sustituye el valor de $y = 3,5$ en la primera ecuación

$$18x + 12 \cdot 3,5 = 69$$

Operando y despejando, tenemos:

$$\begin{aligned} &18x + 42 = 69 \\ &18x + 42 - 42 = 69 - 42 \\ &18x = 27 \\ &x = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

Así la solución del sistema es el par $(1.5\,,\,3.5)$. Es decir el costo de cada pan canilla es de $Bs.\ 1{,}50$ y el costo de cada pan campesino es de $Bs.\ 3{,}50$. ¿Cómo podemos verificar que este resultado es correcto?

Método de resolución por igualación

Consiste en despejar en cada una de las ecuaciones la misma incógnita para luego igualar los resultados y obtener una ecuación con una sola incógnita, determinar su valor y, luego, obtener el valor de la otra incógnita. Resolvamos por el método de igualación el sistema planteado en la situación que acabamos de estudiar:

$$\begin{cases} 18x + 12y = 69 \\ 9x + 11y = 52 \end{cases}$$

Despejamos x en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 18x + 12y = 69 \\ 9x + 11y = 52 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \dfrac{69 - 12y}{18} & (1) \\ x = \dfrac{52 - 11y}{9} & (2) \end{cases}$$

(También se puede despejar la y). El símbolo ~ significa que ambos sistemas son **equivalentes**, es decir, tienen la mismas soluciones.

Igualamos las expresiones de la incógnita despejada, obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\frac{69 - 12y}{18} = \frac{52 - 11y}{9}$$

Resolvemos la ecuación anterior, la solución de esta ecuación nos dará el valor de una de las incógnitas. Justifiquen cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} &18 \cdot \left(\frac{69 - 12y}{18}\right) = 18 \cdot \left(\frac{52 - 11y}{9}\right) \\ &69 - 12y = 2 \cdot (52 - 11y) \\ &69 - 12y = 104 - 22y \\ &22y - 12y = 104 - 69 \\ &10y = 35 \\ &y = \frac{35}{10} = 3,5 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor encontrado de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema. Sustituyamos en la ecuación $9x + 11y = 52$. Nos queda:

$$\begin{aligned} &9x + 11 \cdot 3,5 = 52 \\ &9x + 38,5 = 52 \end{aligned}$$

Finalmente, despejando la variable x, se obtiene que:

$$\begin{aligned} &9x = 52 - 38,5 \\ &9x = 13,5 \\ &x = 1,5 \end{aligned}$$

Hemos obtenido el valor de la x. La solución del sistema es $x = 1,5;\ y = 3,5$. Usando un método alternativo como es el **método de resolución por igualación** hemos arribado al mismo resultado. Es decir, el costo de cada pan canilla es $Bs.\ 1{,}50$ y el de cada pan campesino es de $Bs.\ 3{,}50$.

Por último, conviene comprobar que el par ordenado de números que hemos obtenido efectivamente son la solución del sistema:

Sustituyan los valores obtenidos de x e y en el sistema y comprueben que la solución obtenida es la correcta.

Método de resolución por reducción

Otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales es el método por reducción, el cual consiste en:

- Multiplicar las ecuaciones por valores de tal manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales y con signos distintos en las ecuaciones del sistema, es decir se obtiene un sistema equivalente.
- Se suman, algebraicamente, las ecuaciones resultantes miembro a miembro, eliminando una incógnita.
- Se resuelve la ecuación resultante, obteniendo el valor de una incógnita.
- Se sustituye el valor de la incógnita obtenido, en una de las ecuaciones del sistema para obtener el valor de la otra incógnita y, en consecuencia, resolver el sistema.

Con el mismo sistema que hemos utilizado anteriormente, vamos a estudiar el método de resolución por reducción:

$$\begin{cases} 18x+12y=69 & (1) \\ 9x+11y=52 & (2) \end{cases}$$

Eliminemos a la incógnita x, para ello multipliquemos a la ecuación (2) por -2. Evidentemente, la ecuación (1) no se altera porque queda multiplicada por el elemento neutro.

Tenemos:

$$\begin{cases} 18x+12y=69 \\ -18x-22y=-104 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, miembro a miembro, se obtiene:

$0x-10y=-35$. Esto es equivalente a escribir: $10y=35$.

Por tanto, $y=\frac{35}{10}=3,5$.

Reemplazando el valor de $y=3,5$ en la ecuación $9x+11y=52$ (2), se tiene:

$$9x+11\cdot 3,5=52$$

Despejando la incógnita x, se obtiene:

$$9x=52-38,5$$
$$9x=13,5$$
$$x=1,5$$

Así, el par solución del sistema es $(1.5\ ,\ 3.5)$. Solución similar a la obtenida con los métodos anteriores. ¡Compruébenlo!

Actividades

1 Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método indicado:

Por el método de sustitución

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-2}{2}=2 \\ 6x+8y\ \ =5 \end{cases}$$

Por el método de igualación

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{y}{2}=5 \\ 6x\ +\ y=5 \end{cases}$$

Por el método de reducción

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ x+\ y=10 \end{cases}$$

Gráficamente

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \end{cases}$$

2 Cuál debe ser el valor de p para que el siguiente sistema sea:

$$\begin{cases} 2x\ +\ y\ \ =5 \\ 4x\ +\ 2y=p \end{cases}$$

Compatible determinado o incompatible.

3 Escriban un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que verifique las condiciones que se indican en cada caso:

- Tiene por única solución el par $(-1, 1)$.
- No tiene ninguna solución.
- Los pares $(2, 1)$ y $(0, 2)$ son soluciones del sistema.
- Un sistema compatible indeterminado.
- Un sistema compatible indeterminado tal que el par $(2, -2)$ es una de sus soluciones.

Problemas

1 Juanita compró, a través del Programa “Mi Casa Bien Equipada”, un televisor de 32 *pulgadas* y una lavadora de 12 *kilogramos* por un monto total de *Bs.* 3.555. Si ella hubiese comprado esos electrodomésticos en una casa comercial, por el televisor habría pagado 25% más y por la lavadora un tercio más de lo cancelado mediante el Programa, pagando un total de *Bs.* 4.564. ¿Cuál es el precio de cada artículo tanto en “Mi Casa Bien Equipada” como en la casa comercial? ¿Qué conclusiones podemos obtener al comparar los precios en uno y otro lugar?

2 En el mercado, 10 kg de pimentón y 5 kg de cebolla cuestan *Bs.* 141,50, mientras que 5 kg de pimentón y 7 *kg* de cebolla, cuestan *Bs. 100*. ¿Cuál es el precio de 1 kg de pimentón y de 1 kg de cebolla en ese mercado?

3 La Misión Milagro es un proyecto que permite operar, de diversos problemas oftalmológicos, a personas de escasos recursos económicos. Durante los meses de enero y febrero de 2011 se operaron en Venezuela un total de 881 personas. Si en Vargas fueron operadas 135 personas más que en Táchira, durante ese período, ¿cuántos pacientes fueron atendidos en Vargas y Táchira durante esos dos primeros meses del año 2011?

4 En un año determinado, la edad del Libertador Simón Bolívar fue el doble de la edad que tenía el Mariscal Antonio José de Sucre. Si para ese momento sus edades sumaban 36 años, y conociendo que el General Bolívar nació en 1783, ¿en qué año tuvo lugar la situación planteada? y ¿cuál fue el año de nacimiento del Mariscal de Ayacucho?

5 En Venezuela, el costo de la gasolina de 95 octanos es de *Bs.* 0,097 por litro y el de la gasolina de 91 octanos es de *Bs.* 0,070. Si en una estación de gasolina se vendieron, en un día, 9.000 *litros* de gasolina con un ingreso total de *Bs.* 765, ¿cuántos litros de cada tipo fueron vendidos?

6 Una panadería produce pan y tortas. Elaborar una torta requiere 1 *hora* de horno y 2 *horas* de preparación/decoración. Para obtener una pieza de pan se necesita 1,5 *horas* de horno y 1 *hora* de preparación/decoración. En un día determinado se dispone de 12 *horas* de horno y 16 *horas* de preparación/decoración. ¿Cuál debería ser su política de producción?

6 IMC: NUESTRA "MASA" CORPORAL

Intervalos, desigualdades e inecuaciones. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

El Índice de Masa Corporal (IMC)

Uno de los indicadores antropométricos del grado de adiposidad de una persona es el **Índice de Masa Corporal (IMC)**; otros son la razón cintura-cadera y la razón cintura-estatura. Naturalmente estos índices no constituyen una evaluación definitiva y completa del estado nutricional, pues ello depende de muchos otros factores (como la actividad física-intelectual que se desempeñe, su carga genética, entre otros). Aún así, estos índices pueden asociarse con describir ciertos problemas de salud; por ejemplo, el IMC es uno de los parámetros utilizados por la Organización Mundial de la Salud (OMS) para establecer las medidas de "sobrepeso", "estado saludable" o el "estado de delgadez". La ecuación empleada para calcular el IMC es la siguiente:

$$IMC = \frac{masa\ en\ kg}{(estatura\ en\ m)^2}$$

Además, se han establecido 6 intervalos que se corresponden con los estados (categorías) de delgadez, normal, exceso de peso, obesidad grado I, obesidad grado II y obesidad grado III (veamos la tabla que sigue).

IMC	Categorías
Menos de 18,6	Delgadez
Desde 18,6 hasta 24,9	Normal
Más de 24,9 y menos de 30	Exceso de peso
Desde 30 hasta menos de 35	Obesidad (Grado I)
Desde 35 hasta menos de 40	Obesidad (Grado II)
40 o más	Obesidad (Grado III)

Nota: como sabemos, "masa" y "peso" son conceptos matemáticos y físicos distintos. Aunque en la cotidianidad es frecuente usarlos indistintamente.

La Organización Mundial de la Salud señala que:

Un IMC igual o superior a 24,9 determina sobrepeso, y un IMC igual o superior a 30 se corresponde con obesidad.

Estados Unidos encabeza la lista de países en los que un porcentaje importante de la población presenta obesidad; México y otros países de Latinoamérica se han sumado al grupo de países con este tipo de problemas. Paradójicamente, buena parte de esas poblaciones tienen dificultades para acceder a los alimentos y a los servicios básicos. Para el año 2008, en el mundo había 200 millones de hombres obesos y cerca de 300 millones de mujeres obesas. Y, de acuerdo con cifras de la FAO y del Programa Mundial de Alimentos de la Organización de las Naciones Unidas, para 2010 unos 925.000.000 de personas en el mundo sufrían de hambre crónica.

En esta lección estudiaremos el IMC y desde éste los conceptos de desigualdad, inecuación lineal, inecuación compuesta y sistemas de inecuaciones con una incógnita.

Tomando algunos datos

Antes de seguir, les proponemos que:

- Junto con sus compañeras y compañeros, midan la estatura y la masa de los miembros del equipo y determinen el IMC de cada uno.
- Además, construyan un gráfico de dispersión (en el Plano Cartesiano) con los datos obtenidos. Pueden comparar sus resultados con los expuestos en la tabla siguiente.

Índice de Masa Corporal (IMC)

Masa (kilogramos)

Altura (centímetros)

	45	48	50	53	55	58	60	63	65	68	70	73	75	78	80	82.5	85	87.5	90
145,0	21,4	22,6	23,8	25,0	26,2	27,3	28,5	29,7	30,9	32,1	33,3	34,5	35,7	36,9	38,0	39,2	40,4	41,6	42,8
147,5	20,7	21,8	23,0	24,1	25,3	26,4	27,6	28,7	29,9	31,0	32,2	33,3	34,5	35,6	36,8	37,9	39,1	40,2	41,4
150,0	20,0	21,1	22,2	23,3	24,4	25,6	26,7	27,8	28,9	30,0	31,1	32,2	33,3	34,4	35,6	36,7	37,8	38,9	40,0
152,5	19,3	20,4	21,5	22,6	23,6	24,7	25,8	26,9	27,9	29,0	30,1	31,2	32,2	33,3	34,4	35,5	36,5	37,6	38,7
155,0	18,7	19,8	20,8	21,9	22,9	23,9	25,0	26,0	27,1	28,1	29,1	30,2	31,2	32,3	33,3	34,3	35,4	36,4	37,5
157,5	18,1	19,1	20,2	21,2	22,2	23,2	24,2	25,2	26,2	27,2	28,2	29,2	30,2	31,2	32,2	33,3	34,3	35,3	36,3
160,0	17,6	18,6	19,5	20,5	21,5	22,5	23,4	24,4	25,4	26,4	27,3	28,3	29,3	30,3	31,3	32,2	33,2	34,2	35,2
162,5	17,0	18,0	18,9	19,9	20,8	21,8	22,7	23,7	24,6	25,6	26,5	27,5	28,4	29,3	30,3	31,2	32,2	33,1	34,1
165,0	16,5	17,4	18,4	19,3	20,2	21,1	22,0	23,0	23,9	24,8	25,7	26,6	27,5	28,5	29,4	30,3	31,2	32,1	33,1
167,5	16,0	16,9	17,8	18,7	19,6	20,5	21,4	22,3	23,2	24,1	24,9	25,8	25,8	27,6	28,5	29,4	30,3	31,2	32,1
170,0	15,6	16,4	17,3	18,2	19,0	19,9	20,8	21,6	22,5	23,4	24,2	25,1	26,0	26,8	27,7	28,5	29,4	30,3	31,1
172,5	15,1	16,0	16,8	17,6	18,5	19,3	20,2	21,0	21,8	22,7	23,5	24,4	25,2	26,0	26,9	27,7	28,6	29,4	30,2
175,0	14,7	15,5	16,3	17,1	18,0	18,8	19,6	20,4	21,2	22,0	22,9	23,7	24,5	25,3	26,1	26,9	27,8	28,6	29,4
177,5	14,3	15,1	15,9	16,7	17,5	18,3	19,0	19,8	20,6	21,4	22,2	23,0	23,8	24,6	25,4	26,2	27,0	27,8	28,6
180,0	13,9	14,7	15,4	16,2	17,0	17,7	18,5	19,3	20.1	20,8	21,6	22,4	23,1	23,9	24,7	25,5	26,2	27,0	27,8
182,5	13,5	14,3	15,0	15,8	16,5	17,3	18,0	18,8	19.5	20,3	21,0	21,8	22,5	23,3	24,0	24,8	25,5	26,3	27,0
185,0	13,1	13,9	14,6	15,3	16,1	16,8	17,5	18,3	19.0	19,7	20,5	21,2	21,9	22,6	23,4	24,1	24,8	25,6	26,3
187,5	12,8	13,5	14,2	14,9	15,6	16,4	17,1	17,8	18.5	19,2	19,9	20,6	21,3	22,0	22,8	23,5	24,2	24,9	25,6
190,0	12,5	13,2	13,9	14,5	15,2	15,9	16,6	17,3	18.0	18,7	19,4	20,1	20,8	21,5	22,2	22,9	23,5	24,2	24,9

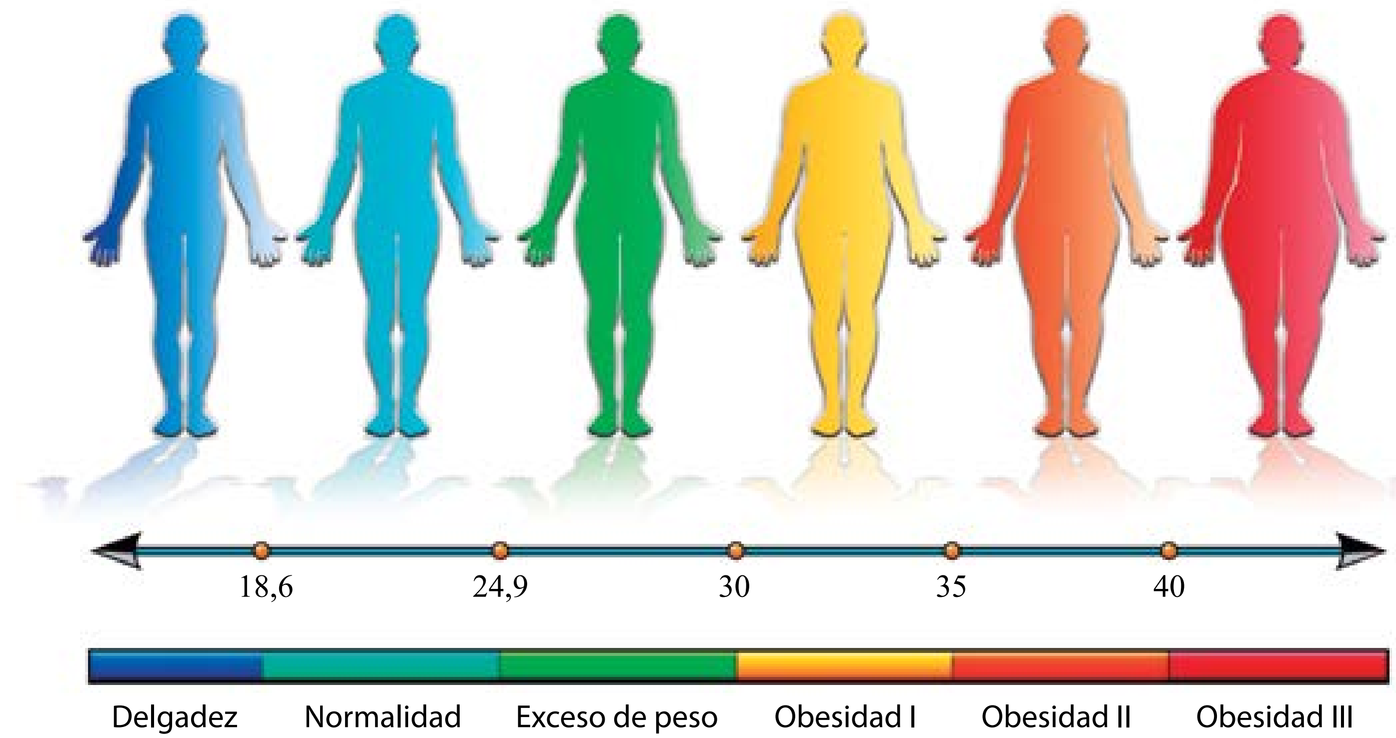
Delgadez

Normalidad

Exceso de peso

Obesidad

Lo cual se puede representar en la recta numérica (es decir, en la *recta Real*) tal como mostramos a continuación. En ésta, destacamos seis intervalos, cada uno de los cuales se corresponde con una parte del conjunto $\mathbb{R}$, y pueden definirse de acuerdo a las condiciones planteadas antes.



Los **intervalos en la recta Real** son subconjuntos de los números Reales, $\mathbb{R}$, que se pueden representar gráficamente en la recta numérica por un trazo o una semirrecta, o incluso, por la recta.

Estudiemos los intervalos en el ejemplo anterior:

Si **18,6** y **24,9** son dos números reales que corresponden a dichos puntos en la recta real, el conjunto de números reales que se encuentran entre **18,6** y **24,9** lo llamamos **intervalo** y, en nuestro caso, representa al conjunto de personas con un Índice de Masa Corporal que se ubica en el rango normal. Tal intervalo se simboliza como sigue:

$$[18{,}6\ ;\ 24{,}9]$$

Este intervalo incluye los números $18{,}6$ y $24{,}9$; por tal razón se usan los corchetes y se le denomina **intervalo cerrado**. ¿Qué números reales x hay en este conjunto? Justo los x tales que $18{,}6 \leq x \leq 24{,}9$.

También existen los **intervalos abiertos** en los cuales no se incluyen los valores "extremos". Por ejemplo: al hablar del IMC que verifique la condición "más de $24{,}9$ y menos de 30", estamos omitiendo los extremos. El $24{,}9$ y el 30 no se incluyen en tal intervalo. Así, su representación simbólica es:

$$(24{,}9\,;\,30)$$

En este caso se emplean los paréntesis. ¿Qué números reales x hay en este conjunto? Precisamente los que cumplen la condición $24{,}9 < x < 30$.

Por último, hay intervalos que son semiabiertos. Por ejemplo, cuando decimos que la "Obesidad I" se corresponde con valores del IMC que van "desde 30 hasta menos de 35", estamos incluyendo a 30 pero no al 35. Su expresión simbólica es:

$$[30\,,35)$$

Igual que antes, el corchete indica que sí se incluye a ese extremo, y el paréntesis indica que no se incluye a ese extremo. En este caso, los números reales x que pertenecen al intervalo semiabierto $[30\,,35)$ son aquellos tales que $30 \leq x < 35$.

Por otra parte, **los intervalos de números reales pueden representarse en la recta Real**; para ello consideremos al intervalo $[a\,,b)$. Sabemos que éste consta de los números reales x tales que verifiquen las desigualdades:

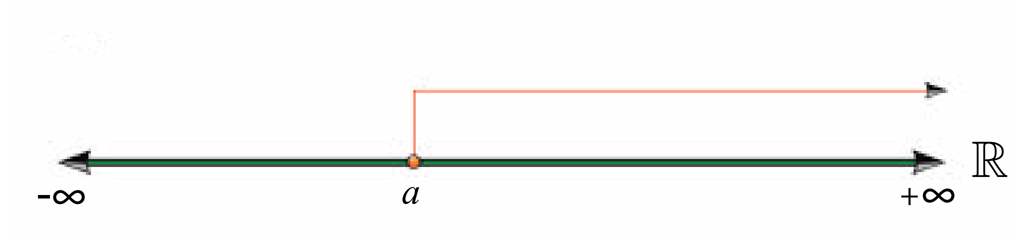
$$a \leq x$$

y

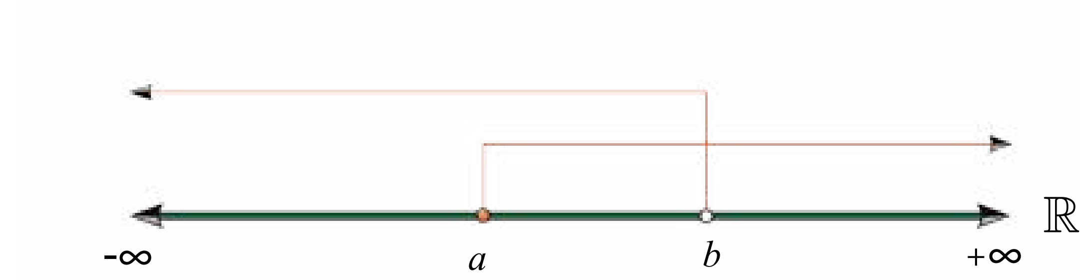
$$x < b$$

"x debe ser mayor o igual que a, y menor que b".

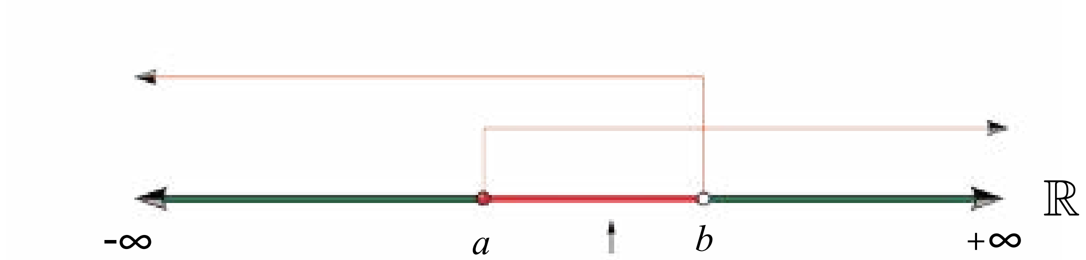
- Ahora, ubicamos a los puntos que corresponden a los números a y b.
- **Como el número real a está en el intervalo, es decir** $a \in [a\,,b)$, **ello se indica con un círculo, tal como mostramos a continuación**. Además, trazamos el segmento y la semirrecta orientada hacia la derecha, ya que $a \leq x$.



- Y como b no está en el intervalo, esto es, $b \notin [a\,,b)$, indicamos con una circunferencia al número b. Y trazamos un segmento y una semirrecta orientada hacia la izquierda, ya que $x < b$.



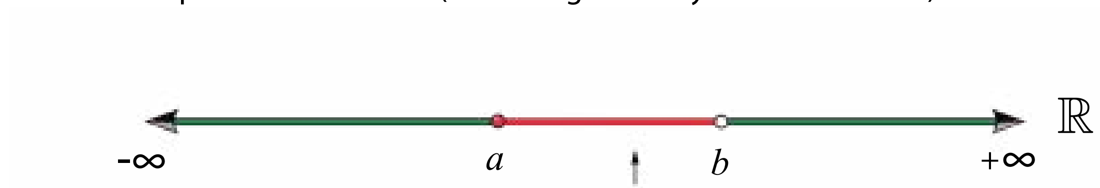
Finalmente, destacamos el subconjunto de $\mathbb{R}$ que corresponde al intervalo $[a\,,b)$:



$[a\,,b)$

Tal subconjunto verifica las dos condiciones iníciales: $a \leq x$ y $x < b$.

También es posible la notación (sin los segmentos y sin la semirrecta):



$[a\,,b)$

Con estas ideas representaremos en la recta Real cada uno de los intervalos de la tabla que expusimos al comienzo de esta lección.

IMC	categoría	condiciones iniciales	intervalo	representación gráfica
Menos de 18,6	Delgadez	$x < 18{,}6$	$(0\,;\,18{,}6)$	0 18,6
Desde 18,6 hasta 24,9	Normal	$18{,}6 \leq x \leq 24{,}9$	$[18{,}6\,;\,24{,}9]$	18,6 24,9
Más de 24,9 y menos de 30	Exceso de peso	$24{,}9 < x < 30$	$(24{,}9\,;\,30)$	24,9 30
Desde 30 hasta menos de 35	Obesidad (Grado I)	$30 \leq x < 35$	$[30\,;\,35)$	30 35
Desde 35 hasta menos de 40	Obesidad (Grado II)	$35 \leq x < 40$	$[35\,;\,40)$	35 40
40 o más	Obesidad (Grado III)	$x \geq 40$	$[40\,;\,b)$	40 b

Para la primera y última categoría deben leerse con cuidado los comentarios que mostramos en seguida.

Fíjense que en la categoría "delgadez", aún cuando se define como "tener un IMC menor a $18{,}6$", hemos acotado el intervalo en 0, ya que el cociente.

$$IMC = \frac{masa\ en\ kg}{(estatura\ en\ m)^2} > 0$$

Por ser el numerador y el denominador números positivos. Es por esta razón que el primer intervalo que copiamos es $(0\,;\,18{,}6)$. He allí uno de los cuidados que debemos tener al traducir una idea de nuestro contexto, o de otras disciplinas, a la Matemática.

Además, como el IMC no puede ser un número muy grande (ya que la masa corporal tiene cierto "tope"), entonces existe una cota (que llamamos "b") para el IMC. Por tal motivo, hicimos corresponder a la categoría "un IMC de 40 o más" el intervalo real $[40\,,\,b)$.

Reflexionen estas ideas junto a sus compañeras y compañeros.

Eddy Marín
Nadador medallista de Oro en los Juegos del Alba y Juegos Nacionales.

En lo que hemos mostrado hasta ahora hemos empleado el concepto de desigualdad, el cual se define formalmente como sigue:

> Una **desigualdad** está definida por una relación de orden.

Por ejemplo, cuando escribimos la desigualdad $x < 18{,}6$ (x es menor que $18{,}6$), nos apoyamos en la relación de orden $<$ ("es menor que"). Algo similar sucede cuando escribimos la desigualdad $x \geq 40$; en este caso, la relación de orden es $\geq$ (x es mayor o igual a 40).

Aporten otros ejemplos de desigualdades.

Veamos las propiedades de la relación de orden menor o igual que($\leq$.)

Propiedades de la relación de orden $\leq$ en $\mathbb{R}$

Reflexiva	Para todo número real x se cumple $x \leq x$
Antisimétrica	Para cualesquiera números reales x y y, tales $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$
Transitiva	Sean x, y y z números reales tales $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$

Es decir, un número real (cualquiera) es menor o igual que él mismo (esta es la propiedad reflexiva de la relación $\leq$; de allí proviene su nombre). Por otra parte, si un número real es menor o igual que otro, y ese otro es menor o igual que el primero, necesariamente tienen que ser iguales (propiedad antisimétrica de la relación $\leq$). Por último, si un número real es menor o igual que un segundo, y el segundo número es menor o igual que un tercero, entonces el primer número es menor o igual que el tercero (propiedad transitiva de la relación $\leq$).

Andreína Pinto
Nadadora medallista de Oro en los Juegos Suramericanos y en los Centroamericanos y del Caribe.

Empleando la ecuación del IMC para calcular la masa corporal recomendada

Consideremos el siguiente caso hipotético: Carmen tiene 14 años y mide $1{,}47\ m$ de estatura. El médico de su comunidad le ha recomendado que, de acuerdo con su actividad física, intelectual y su régimen dietético, debe mantener un Indice de Masa Corporal (IMC) que no sobrepase 24,9, para así mantenerse en los parámetros considerados "normales" por la Organización Mundial de la Salud. ¿Qué masa corporal puede tener como máximo? (Reiteramos aquí la observación que hicimos al comienzo de la lección: el IMC es un índice, y como tal, no es determinante, pues para su cálculo no se toman en cuenta otros factores que inciden en la evaluación de la masa corporal óptima de la persona).

¿Cuáles datos nos da el problema?
- Carmen mide $1{,}47\ m$
- Su Indice de Masa Corporal, de acuerdo con la recomendación médica, no debe sobrepasar 24,9
- La incógnita es la masa corporal que puede tener como máximo

Partiendo de la ecuación del cálculo de índice de masa corporal:

$$IMC = \frac{masa\ en\ kg}{(talla\ en\ m)^2}$$

Como el Indice de Masa Corporal de Carmen no debe sobrepasar 24,9, entonces debemos plantear la desigualdad que sigue. En ella hemos etiquetado con x la masa corporal máxima que puede tener Carmen (es decir, nuestra incógnita):

$$24{,}9\ kg/m^2 \geq \frac{x}{(1{,}47\ m)^2}$$

Ahora multiplicamos cada miembro de la desigualdad por $(1{,}47\ m)^2$. De esta manera se simplifica el miembro derecho. Veamos:

$$(1{,}47\ m)^2 \cdot 24{,}9\ kg/m^2 \geq \frac{x}{(1{,}47\ m)^2} \cdot (1{,}47\ m)^2$$

Con lo cual:

$$(1{,}47\ m)^2 \cdot 24{,}9\ kg/m^2 \geq x$$

Realizando las operaciones indicadas (podemos apoyarnos en la calculadora), obtenemos:

$$2{,}1609\ m^2 \cdot 24{,}9\ kg/m^2 \geq x$$

Ahora multiplicamos y simplificamos las unidades de medida:

$$53{,}806\ kg \geq x$$

Por tanto, su masa corporal debe ser menor o igual a $53{,}806\ kg$. Aquí debemos hacer una observación: la masa corporal no toma valores negativos ni tampoco se hace 0. Además, existe una cota inferior que determina la masa mínima que Carmen puede tener de manera de no ubicarse en los parámetros de delgadez.

Una observación más, la expresión:

$$24{,}9\ kg/m^2 \geq \frac{x}{(1{,}47\ m)^2}$$

Es un ejemplo de inecuación, concepto que pasamos a definir.

Inecuación

Se llama **inecuación** a una desigualdad en la que interviene una o más incógnitas. La solución de una inecuación consiste en hallar el conjunto de números que verifica la desigualdad dada.

En el caso de la inecuación anterior, podemos observar que:

- Tiene una incógnita (la x).
- Es una inecuación lineal (ya que la incógnita tiene exponente 1, que estando sobreentendido se omite. Recuerden que $x = x^1$).

De inmediato, resultan importantes los conceptos que siguen:

Inecuación compuesta

Una inecuación compuesta consiste en dos o más desigualdades que permiten relacionar varias expresiones matemáticas.

Sistema de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones consta de dos o más inecuaciones en las que intervienen las mismas incógnitas. La solución de un sistema consiste en hallar el conjunto de números que satisface simultáneamente a todas las inecuaciones dadas.

Ilustremos estos conceptos con un ejemplo.

Supongamos que Izel, una joven de tercer año, está atenta a propender y mantener una salud integral que incluye una alimentación balanceada a horarios definidos, el desarrollo de actividades recreativas y deportivas, y la no ingesta de las toxinas y sustancias nocivas presentes en los refrescos, chucherías y cigarrillos, por ejemplo. El nutricionista de la comunidad le ha encomendado que, de acuerdo a su estatura:

$$1{,}57\ m$$

Y otros de los factores mencionados, su IMC debe oscilar entre:

$$20 \leq IMC \leq 24$$

Además, ¡ella está consciente de que su belleza, su verdadera belleza, no depende del erróneo "90-60-90" que promueven algunos medios de comunicación e información! Pero, ¿cuál es la masa corporal mínima y máxima que debe tener Izel? Antes de responder esta pregunta, notemos que $20 \leq IMC \leq 24$ equivale a escribir.

$$20 \leq \frac{x}{(1{,}57)^2} \leq 24$$

La cual es una **inecuación compuesta**, pues en ella intervienen dos desigualdades (que juntas, conforman un sistema de inecuaciones):

$$\begin{cases} 20 \leq \dfrac{x}{(1{,}57)^2} \\ \dfrac{x}{(1{,}57)^2} \leq 24 \end{cases}$$

En cada inecuación del sistema hay una sola incógnita. ¿Cuál es su solución? Para ello podemos obtener las soluciones de cada inecuación por separado, y luego, pensar en las soluciones comunes. Veamos esto con detalle.

1 Busquemos las soluciones de $20 \leq \dfrac{x}{(1{,}57)^2}$.

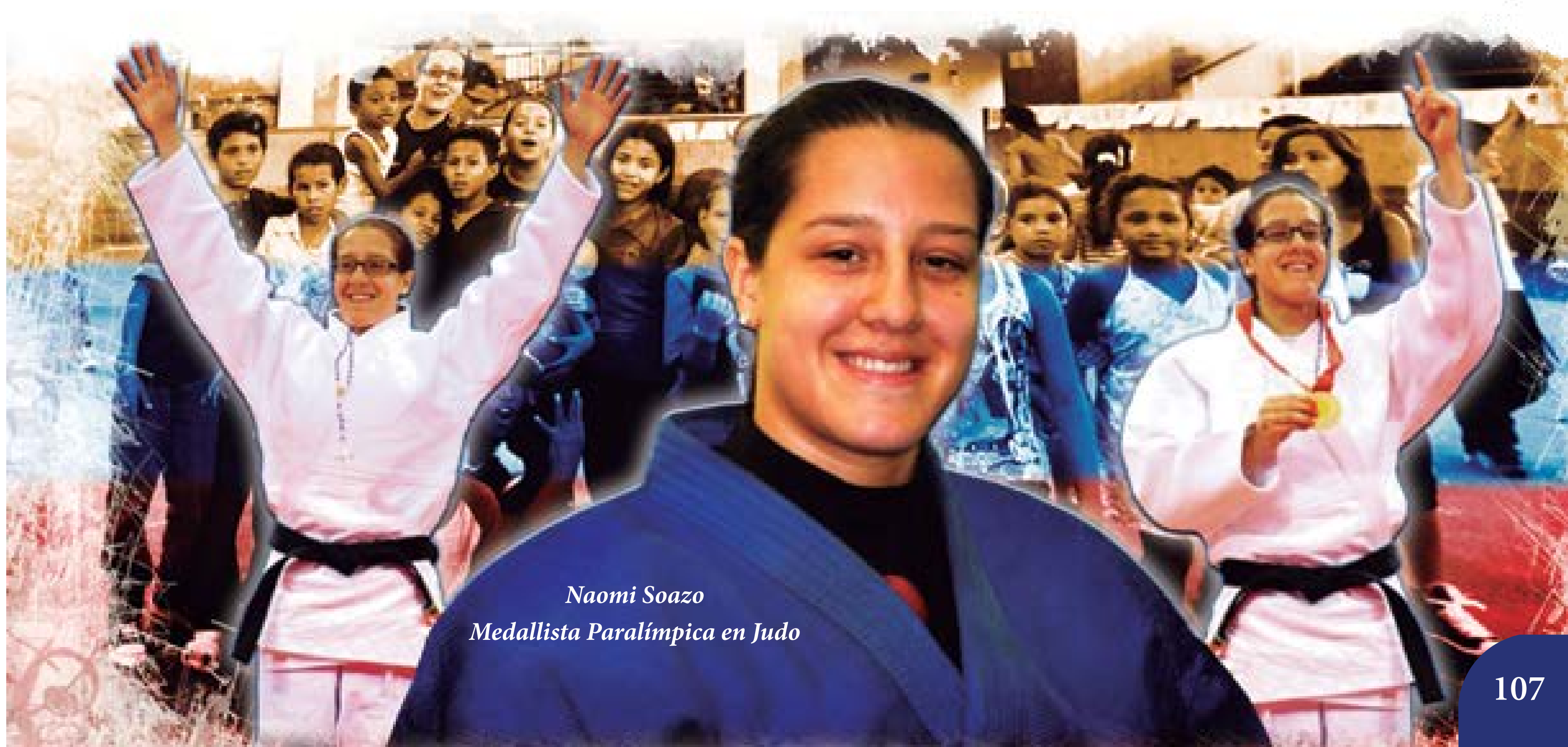
En este caso, multiplicando por $(1{,}57)^2$ cada miembro de la desigualdad, obtenemos:

$$20 \cdot (1{,}57)^2 \leq \frac{x}{(1{,}57)^2} \cdot (1{,}57)^2$$

Y simplificando el miembro derecho, tenemos que $20 \cdot (1{,}57)^2 \leq x$

Entonces, calculando la potencia y luego multiplicando por 20 (aquí pueden usar la calculadora), $49{,}298 \leq x$

2 Ahora busquemos las soluciones de $\dfrac{x}{(1{,}57)^2} \leq 24$.



Naomi Soazo
Medallista Paralímpica en Judo

De forma similar a lo hecho antes, notemos que las desigualdades que siguen son equivalentes:

$$\frac{x}{(1,57)^2}\cdot(1,57)^2 \le 24\cdot(1,57)^2$$

$$x \le 24\cdot(1,57)^2$$

$$x \le 59,1576$$

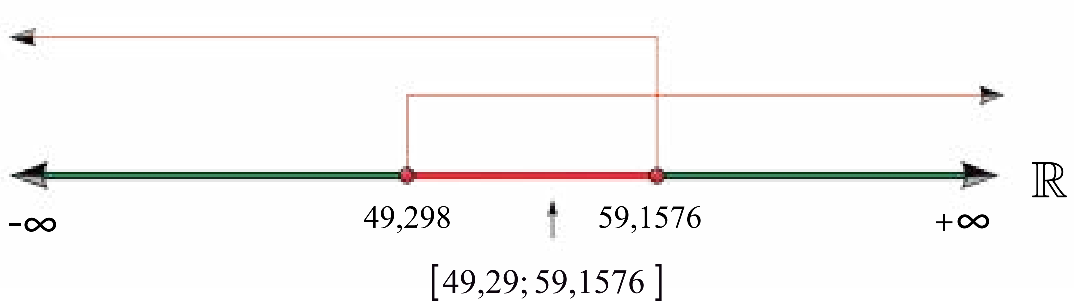
Argumenten cada uno de los pasos que aquí mostramos. En conclusión, la masa corporal de Izel debe oscilar entre 49,298 y 59,1576 kilogramos para que su IMC esté entre 20 y 24. Simbólicamente podemos escribir:

$$49,298\ kg \le x \le 59,1576\ kg$$

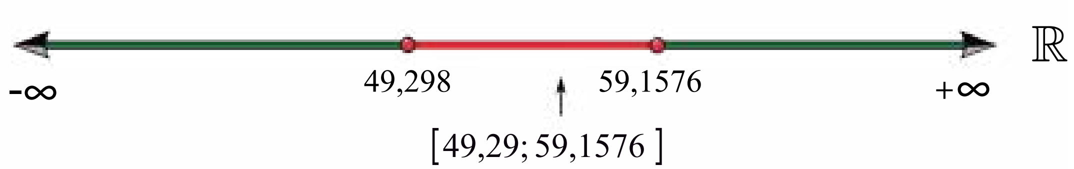
O bien, como un intervalo así

$$[49,29; 59,1576\ ]$$

Es un intervalo cerrado, pues las desigualdades se basan en la relación de orden "menor o igual que". Conjunto en el que existen, como sabemos, infinitos números reales. Y gráficamente, tal solución es:



O solamente:



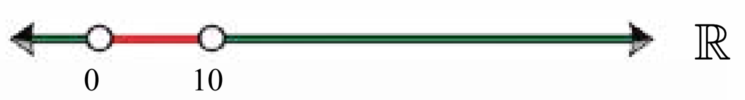
Actividades

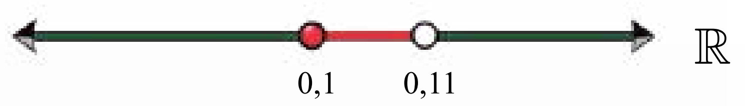
1 Representen en la recta real los intervalos:

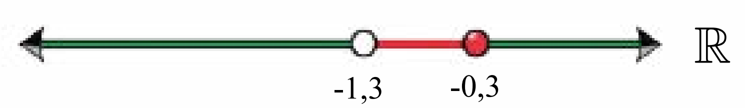
- $[1; 1,5]$
- $[1; 1,5]$
- $\left(\sqrt{2}\,, \frac{13}{2}\right]$
- $[0\,, +\infty)$
- $\left(-\infty\,, -\frac{1}{3}\right)$

Y escriban las desigualdades que corresponden a cada uno de estos.

2 ¿A qué intervalos corresponden las siguientes gráficas?







3 ¿Cuántos elementos hay en el intervalo $[0; 0,1]$? ¿Y en $[0; 0,0000001]$?

4) Consideren una desigualdad cualquiera.

- Súmenle un número a cada miembro de la desigualdad, es decir, a izquierda y a derecha. ¿Cambia la desigualdad?
- Multipliquen cada miembro de la desigualdad por un número positivo, ¿cambia la desigualdad?
- ¿Y si multiplicamos por un número negativo? Conversen estas ideas propiedades con su profesora o profesor.

5) ¿Qué propiedades tiene la relación de orden "menor que" (la cual simbolizamos a través de <)? ¿Son las mismas que las de la relación "menor o igual que ($\leq$)"?

6) Omar José tiene $1{,}78\ m$ de estatura y le han indicado mantener un Índice de Masa Corporal (IMC) que esté entre 20 y $24{,}5$, extremos incluidos. ¿Qué masa corporal debe tener como mínimo y máximo? Den su respuesta como una desigualdad, como un intervalo y represéntenlo en la recta real.

7) Propongan en su liceo realizar un proyecto de control nutricional en la comunidad. Para su realización deben:

- Medir la talla (estatura) y la masa corporal de cada uno de los miembros de familias que vivan cerca del liceo (pueden considerar una muestra intencional o una muestra aleatoria).
- Calcular el IMC de cada uno de los miembros de las familias seleccionadas y establecer, según lo ya estudiado, quiénes se ubican en las categorías de delgadez o sobrepeso.
- Consulten y conversen con especialistas sobre las actividades físicas y la dieta que debe seguir cada una de estas personas.
- Hacer un cuadro donde se puedan comparar los puntos anteriores.

  Por ejemplo:

Familia	Miembro de la familia	IMC	Actividad física que debe realizar en el día	Dieta propuesta
Flores	Arturo			
	Andrés			
	Neil			
	Carmen Alicia			
Marcano	Luis			
	Zaudy			
	Carlos Manuel			

8) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones (si es que la tienen)? Además, represéntelas en la recta real.

- $\begin{cases} 21 \leq \dfrac{x-2}{3{,}5} \\ \dfrac{x-1}{3{,}5} \leq 25 \end{cases}$
- $\begin{cases} -1 < \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{x}{2} + 1 \leq 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} -2 > 2x + 5 \\ 3x - \frac{1}{2} > 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} |2x-1| < 6 \\ \frac{4}{3}x - 7 > -11 \end{cases}$

9) Describa la solución, en caso que la tenga, del sistema:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{2x+4}{5} \\ 6x + 10 \leq 21 \end{cases}$$

Liceo Bolivariano
José Gregorio González

7 AUMENTANDO LA COSECHA

Función cuadrática. Ecuaciones de segundo grado. Resolvente de la ecuación de segundo grado.

La soberanía alimentaria

La *soberanía alimentaria* se relaciona con el autoabastecimiento de los distintos rubros alimentarios de nuestra población, e incluso, con el derecho que tiene cada país para definir sus políticas en esta materia, con la protección y reglamentación de la producción y el mercado doméstico, con el desarrollo sustentable, con las luchas en contra de vicios como el latifundio, el acaparamiento y la especulación. En nuestro país, durante los años recientes, se han promovido una serie de políticas para propender hacia la *soberanía alimentaria*. En estos temas, la **Matemática** permite comprender y tomar decisiones sobre cada uno de los problemas y situaciones que se presentan.

Ahora bien, dos de las tantas preguntas puntuales que debemos hacernos en el mundo maravilloso de la actividad agrícola son: **¿qué sembrar?** y, **¿cuánto sembrar?** Normalmente, para establecer lo que se siembra en un determinado terreno, es necesario conocer la tradición agrícola de la zona, así como el análisis edafoclimático (condiciones de suelo y clima). Por ejemplo: en el Estado Portuguesa, tradicionalmente se siembran gramíneas (cereales) y leguminosas (caraota, frijoles, lentejas, y otras).

En Barlovento se siembra cacao, ciertos frutales y musáceas (plantas monocotiledóneas conocidas por sus frutos, el cambur). Por otra parte, para aumentar la cosecha, se deben considerar varios aspectos, tal es el caso del número de plantas por cada hectárea, lo cual depende de variables como la radiación y temperatura propias de la región, la eficiencia fotosintética del cultivo, la cantidad de materia orgánica originada, la distribución óptima entre plantas, las condiciones de riego, entre otras.

Antes de seguir, conversen con sus compañeras y compañeros:

- ¿Qué significa una hectárea (ha)?
- ¿Qué otras medidas de superficie son empleadas en la actividad agrícola?
- ¿Cómo se define el perímetro de una región?
- Si una región rectangular tiene una superficie de medida $1\ ha$, ¿podemos determinar cuál es la medida de sus lados?
- ¿Cuántas regiones rectangulares, distintas, tienen superficie de $1\ ha$? Expongan algunos ejemplos (junto con su representación).

En esta lección tomaremos como ejemplo la **mandarina**, precisamente uno de los cultivos importantes en los estados Miranda, Mérida y Carabobo, tal como se aprecia en la tabla siguiente. Además, estudiaremos los conceptos de *función cuadrática* y *ecuación de segundo grado*.

Producción y rendimiento por hectárea del cultivo de mandarina en 5 entidades del país

Entidad federal	Número de productores	Superficie sembrada (ha)	Superficie cosechada (ha)	Producción (kg)	Rendimiento (kg/ha)
Carabobo	644	1.192	1.119	6.066.846	5.422
Mérida	533	962	783	11.173.395	14.271
Miranda	1.099	3.396	3.132	30.816.327	9.839
Monagas	47	199	198	1.607.835	8.138
Táchira	518	1.006	899	14.479.659	16.107

Datos tomados del Ministerio del Poder Popular para la Agricultura y Tierra

Un problema inicial

Una cooperativa agrícola del estado Miranda tiene una parcela pequeña ($3\ ha$ aproximadamente) y en ella hay sembradas unas 120 matas de mandarina (llamadas mandarinos). Cada mandarino produce 1.000 mandarinas al año. Se desea conocer cuál será la evolución de su producción si decide aumentar la cantidad de mandarinos en esa parcela. Para ello, encarga el estudio a un ingeniero agrónomo. El profesional concluye que por cada planta que se incorpore, la producción de cada mandarino disminuirá en 2 unidades anuales, dado que los nutrientes del suelo tienen un potencial limitado. Adicionalmente sabemos que un mandarino necesita tener un espacio mínimo de $10\ m^2$ a su alrededor.

Los datos en este problema son hipotéticos. Si en su comunidad tienen algún otro tipo de cultivo y pueden conseguir los datos usados en él, pueden modificarlo o adaptarlo a su realidad.

Ahora bien:

- ¿Es posible que la producción se anule en algún momento?
- ¿Cuántas plantas se deberán agregar para obtener la máxima producción?

Observemos lo siguiente, tenemos 120 mandarinos y cada mandarino produce 1.000 mandarinas al año. Es decir, podemos escribir la producción total, $f(120)$, como sigue:

$$f(120) = 1.000 \cdot 120 = 120.000$$

Si agregamos un mandarino adicional al terreno, éstos disminuirán su producción en 2 mandarinas al año (de acuerdo a la proyección del especialista), por tanto:

$$\begin{aligned} f(120+1) &= (1.000 - 2 \cdot 1)(120+1) \\ f(120+2) &= (1.000 - 2 \cdot 2)(120+2) \\ f(120+3) &= (1.000 - 2 \cdot 3)(120+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Y en general, si sembramos n mandarinos más, la producción será:

$$f(120+n) = (1.000 - 2n)(120+n)$$

La expresión anterior es muy importante, pues representa el total de producción de mandarinas en las $3\ ha$ que abarca el terreno de esta cooperativa agrícola, tomando en cuenta la proyección que comentamos antes. Así, aplicando la propiedad distributiva en el lado derecho de esta igualdad, tenemos que:

$$f(120+n) = 120.000 - 240\ n + 1.000\ n - 2\ n^2$$

Ahora sumamos los términos semejantes y ordenamos desde el de mayor grado al de menor grado:

$$f(120+n) = -2\ n^2 + 760\ n + 120.000$$

La función anterior describe la producción de mandarinas en términos de la cantidad de árboles (mandarinos) que se siembren adicionalmente a los 120 ya existentes.

Finalmente, haremos un cambio de variable, es decir,

$$x = n + 120$$

Para ello, remplazamos esta expresión en $f(n+120)$. En consecuencia:

$$f(120+n) = f(x)$$

$= -2(x-120)^2 + 760(x-120) + 120.000$ — Ya que $n = x - 120$

$= -2(x^2 - 240x + 14.400) + 760x - 91.200 + 120.000$ — ¿Por qué?

$= -2x^2 + 480x - 28.800 + 760\,x - 91.200 + 120.000$ — ¿Por qué?

$= -2x^2 + 480x + 760x - 28.800 - 91.200 + 120.000$ — Por la ley conmutativa

$= -2x^2 + 1.240x$ — Sumando los términos semejantes

La función $f(x) = -2x^2 + 1.240x$ permitirá estudiar lo que pasa en este terreno con la producción de mandarinos al sembrar plantas adicionales a las 120 que ya existen.

Además, notemos que $f(x) = -2x^2 + 1.240x$ tiene un término de grado 2, y los demás términos tienen grado 1 y 0 ($1.240x$ es de grado 1, ya que la variable x tiene como exponente al 1. Y el término independiente de $f(x) = -2x^2 + 1.240x$ es 0, que es una constante, así que su grado es 0).

La función $f(x) = -2x^2 + 1.240x$ es un ejemplo de función cuadrática, término que pasamos a definir:

> Una **función cuadrática** es una relación cuya expresión algebraica es de la forma:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c$$
>
> donde a, b y c son números reales cualesquiera y $a \neq 0$.

En el caso que estamos estudiando, $a = -2$, $b = 1.240$ y $c = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 1.240x \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{-2}x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{1.240}x + \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{0} \end{aligned}$$

Tengamos presente la primera de las preguntas:

(a) *¿Es posible que la producción se anule en algún momento?*

Debemos encontrar cuándo la producción se hace cero (éste es un caso hipotético); es decir, cuándo $f(x) = 0$.

Al incluir esta condición, $f(x) = 0$ en la expresión $f(x) = -2x^2 + 1.240x$ obtenemos:

$$-2x^2 + 1.240x = 0$$

La cual se denomina **ecuación de segundo grado**.

> Una **ecuación de segundo grado** es una expresión algebraica de la forma:
>
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
>
> donde a, b y c son números reales cualesquiera y $a \neq 0$.

Entonces, responder la pregunta: *¿es posible que la producción se anule en algún momento?*, pasa por resolver la ecuación de segundo grado correspondiente.

Ya sabemos resolver **ecuaciones de primer grado** desde primer año del nivel de Educación Media, pero ¿cómo se resolverá una ecuación de segundo grado?

¿Cuál es el valor de la x en una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$?

Para ello, debemos deducir una fórmula que permita calcular el valor de la incógnita x en una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$.

Veamos:

Recordemos que en una ecuación de segundo grado el valor de $a \neq 0$, por lo tanto podemos dividir cada miembro de la igualdad entre a:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Ahora eliminamos el término independiente del miembro izquierdo de la igualdad:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0-\frac{c}{a}$$

Aquí sumamos $-\frac{c}{a}$ a cada miembro de la igualdad

$$x^2+\frac{b}{a}x=0-\frac{c}{a}$$

Ya que $\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Pues $0-\frac{c}{a}=-\frac{c}{a}$ (el 0 en el neutro aditivo en $\mathbb{R}$)

Ahora, agreguemos una expresión que nos permita convertir el miembro izquierdo de la igualdad en un *trinomio cuadrado perfecto*.

Recordemos que en segundo año vimos que:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Así que agregaremos una expresión $\frac{y}{w}$ a la ecuación $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, de manera que se convierta el lado izquierdo de la igualdad en un trinomio cuadrado perfecto y así podremos factorizar.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{y}{w}=-\frac{c}{a}+\frac{y}{w}$$

Se toma $\frac{y}{w}$ como la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, pues es la que permite factorizar la expresión del lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Factoricemos el lado izquierdo de la igualdad y desarrollemos la potencia del lado derecho de la igualdad:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

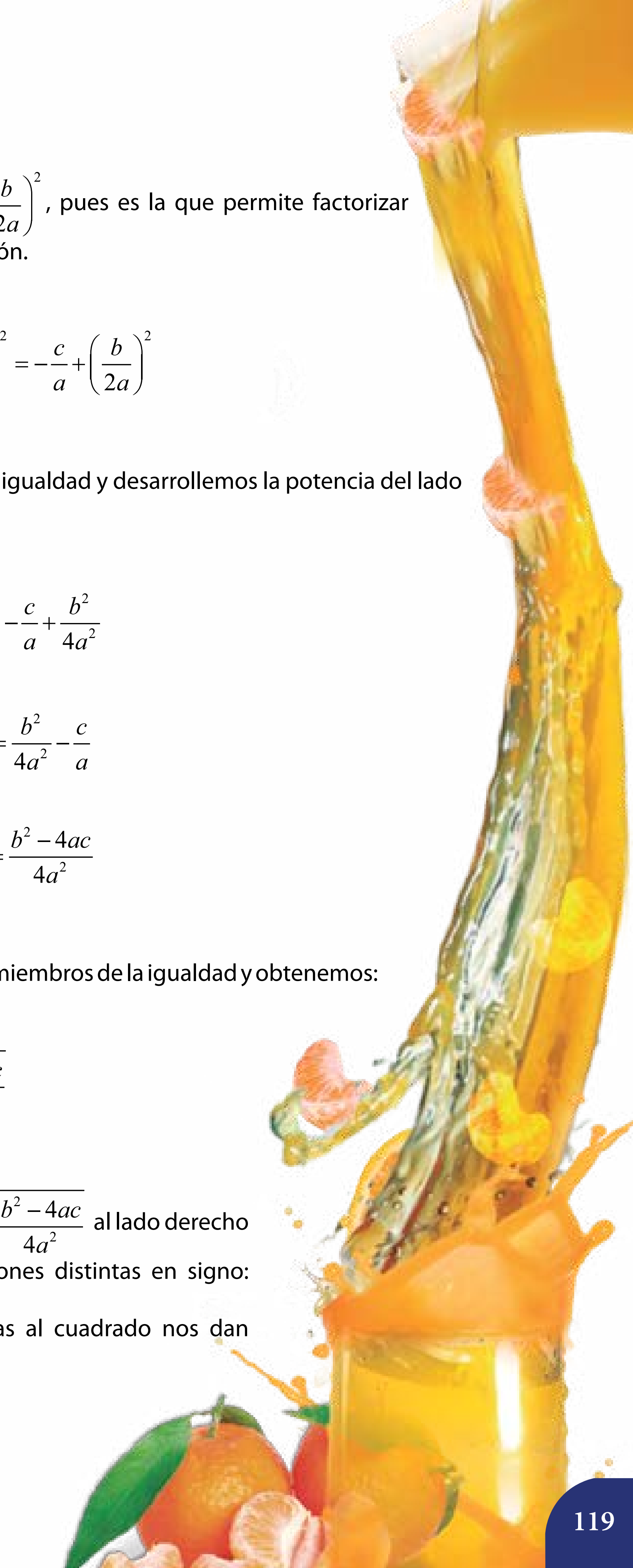
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Extraemos la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad y obtenemos:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

¿Por qué colocamos la expresión $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ al lado derecho de la igualdad? Pues existen dos expresiones distintas en signo: $+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ y $-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, que al elevarlas al cuadrado nos dan la expresión $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.



Dejamos a ustedes la tarea de argumentar cada uno de los pasos que siguen.

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto, la solución a la ecuación de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0$$

Es:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La cual se denomina la **resolvente.**

Ya estamos en condiciones de responder la primera pregunta.

Como la ecuación $-2x^2+1240x=0$ tiene por soluciones a:

$$x_1=0 \text{ y } x_2=620$$

Entonces, teóricamente, sólo hay dos casos en que la producción es de cero mandarinas: cuando no sembramos mandarinos (lo cual es evidente) o cuando en el terreno de 120 mandarinos se siembran un total de 620 mandarinos (este es el caso interesante).

Ahora intentaremos responder la segunda pregunta:

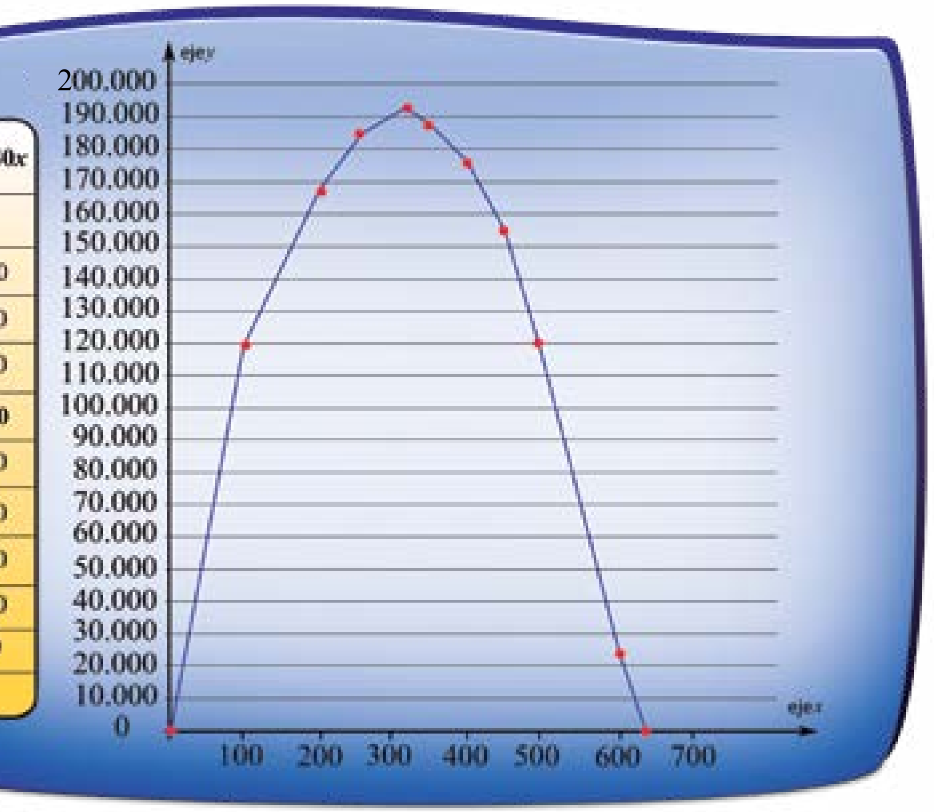
(b) *¿Cuántas plantas se deberán agregar para obtener la máxima producción?*

Para responder a esta pregunta comenzaremos por graficar la función obtenida antes.

$$f(x)=-2x^2+1.240x$$

En primer lugar, construiremos una tabla de valores correspondientes a: 0, 120, 200, 250, 310, 350, 400, 450, 500, 600 y 620 mandarinos.

x	$-2x^2+1.240x$
0	0
120	120.000
200	168.000
250	185.000
310	**192.200**
350	189.000
400	176.000
450	153.000
500	120.000
600	24.000
620	0



Gráfica de $f(x)=-2x^2+1.240x$

En el gráfico se puede apreciar que el valor máximo, es decir, el mayor número de mandarinas producidas en un año, se alcanza cuando en el terreno hay sembrados 310 mandarinos (al sembrar 190 más de los que tenía el terreno originalmente); precisamente en el **vértice de la parábola**. Y el valor mínimo se alcanza tanto en $x=0$ (cuando no hay ningún mandarino sembrado) como en $x=620$.

Recordemos que nos basamos en un modelo matemático que intenta simular el comportamiento de los mandarinos en el terreno con base en los datos suministrados por el Agrónomo. No obstante, existen muchas otras variables que afectan este fenómeno.

Por último, es preciso aclarar que hay otros modelos matemáticos, distintos a la función cuadrática, que también describen problemas como el que hemos estudiado en esta lección.

Sobre la función cuadrática y la ecuación de segundo grado

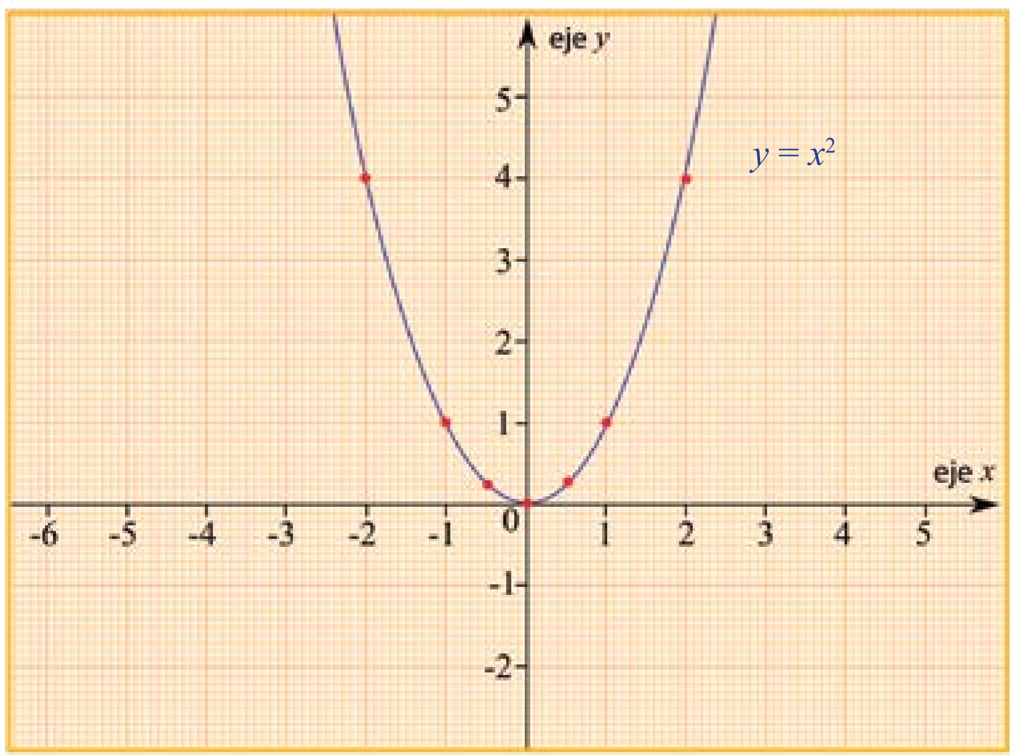
Fíjense en los siguientes casos:

1 $f(x) = x^2$

En esta función se tiene que $a = 1$, $b = 0$, y $c = 0$ ¿Por qué?

Para formar los puntos de la parábola correspondiente, construyamos una tabla con algunos valores de x y su correspondiente $f(x)$.

x	$f(x)$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1



Gráfica de $f(x) = x^2$

Observemos la gráfica de $f(x) = x^2$.

La parábola es cóncava hacia arriba. Esto tiene que ver con que $a > 0$. Así que antes de hacer el gráfico podemos deducir que la parábola es cóncava hacia arriba o no, sólo con ver si el coeficiente del término de grado 2 es mayor o menor a 0.

Por otra parte, como el cuadrado de todo número real es un número positivo, entonces el **conjunto imagen** de la función es el intervalo $[0, +\infty)$. Esto significa, gráficamente, que las imágenes de $f(x) = x^2$ se ubican en el I y II cuadrante del plano cartesiano.

Además, esta parábola es simétrica con respecto al eje y.

El **vértice** de la parábola corta al eje de simetría (en este caso, coincide con el eje y).

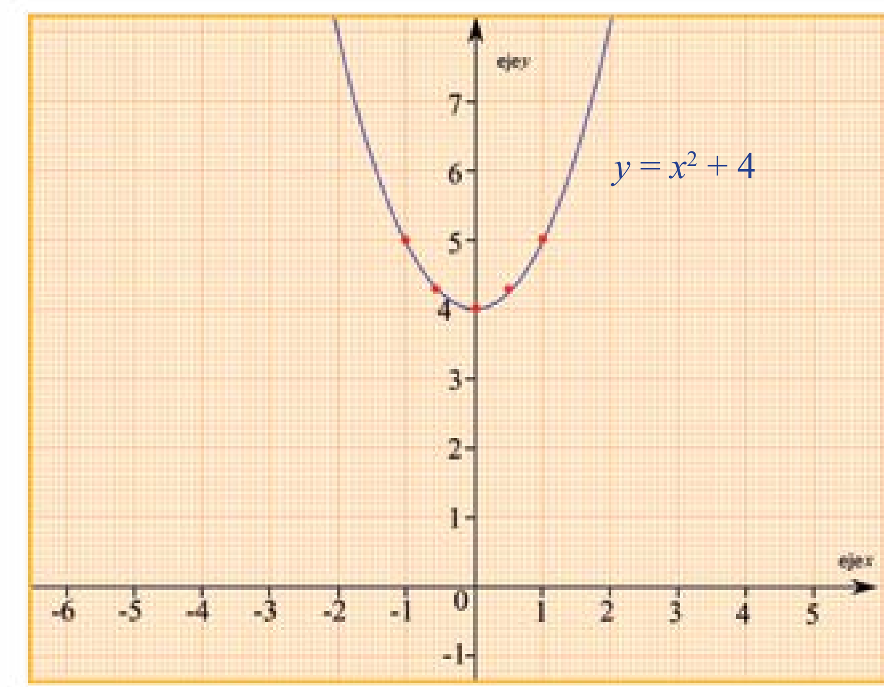
Las coordenadas del vértice son las del punto $v(0, 0)$.

Realicen, junto a sus compañeras y compañeros, apoyándose en una hoja cuadriculada o milimetrada, la gráfica de $f(x) = -x^2$. Compárenla con la función $f(x) = x^2$. ¿Es cóncava hacia arriba o hacia abajo? ¿Por qué? ¿Cuál es su conjunto imagen? ¿En qué cuadrantes se encuentran sus imágenes? ¿Cuál es su eje de simetría?

2 $f(x) = x^2 + 4$

En esta función se tiene que $a = 1$, $b = 0$ y $c = 4$.

Para obtener puntos de la parábola construyamos una tabla con algunos valores de x y su correspondiente imagen: $f(x)$.



x	$f(x)$
-1	5
$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{4}$
0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{4}$
1	5

Gráfica de $f(x) = x^2 + 4$

En la gráfica de $f(x) = x^2 + 4$ observamos que:

- La parábola es **cóncava hacia arriba**, ya que $a > 0$.
- El **vértice** de la parábola es el punto $v(0, 4)$.
- Las imágenes de f son mayores o iguales a 4; por tanto, el conjunto imagen de f es el intervalo $[4, +\infty)$.
- El eje de simetría es la recta $x = 0$.

Para continuar con nuestro estudio les proponemos que, utilizando una hoja cuadriculada o milimetrada, construyan las gráficas de

$$f(x)=-x^2+4$$
$$f(x)=x^2-4$$
$$f(x)=-x^2-4$$

Compárenla con la función $f(x)=x^2+4$.

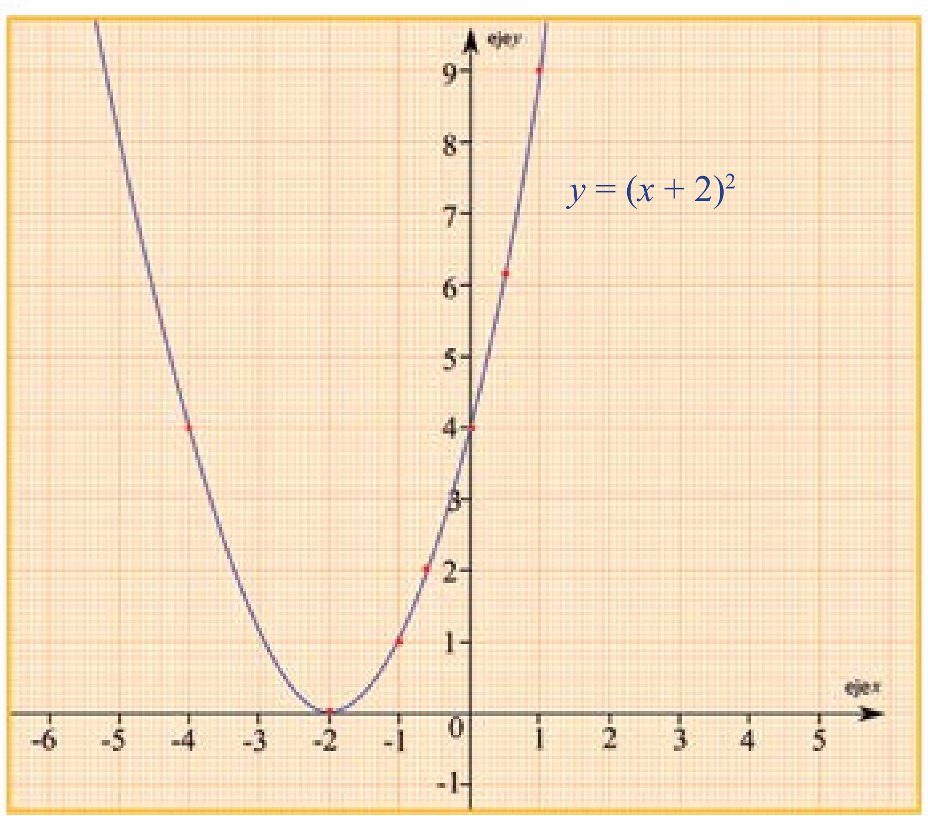
Nota: también pueden apoyarse en algún software libre que tenga las aplicaciones para graficar funciones en el plano cartesiano. De hecho, hay muchos de estos disponibles en Internet.

3) $f(x)=(x+2)^2$

Desarrollando el cuadrado del binomio, obtenemos que $f(x)=x^2+4x+4$. En esta función se tiene que a=1, b=4 y c=4.

Para determinar algunos puntos de la parábola construyamos una tabla con ciertos valores de x y sus correspondientes imágenes $f(x)$.

x	$f(x)$
-4	4
-2	0
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{4}$
1	9



Gráfica de $f(x)=(x+2)^2$

- Ya con la gráfica, notamos que la parábola es **cóncava hacia arriba**, ya que $a>0$.
- Si comparamos esta parábola con la que es imagen de $f(x)=x^2$, vemos que esta última se desplaza hacia la izquierda 2 unidades.
- El vértice de la parábola es el punto $v(-2\,,0)$.
- El eje de simetría es la recta $x=-2$.
- Y el conjunto imagen es el intervalo $[0\,,+\infty)$.

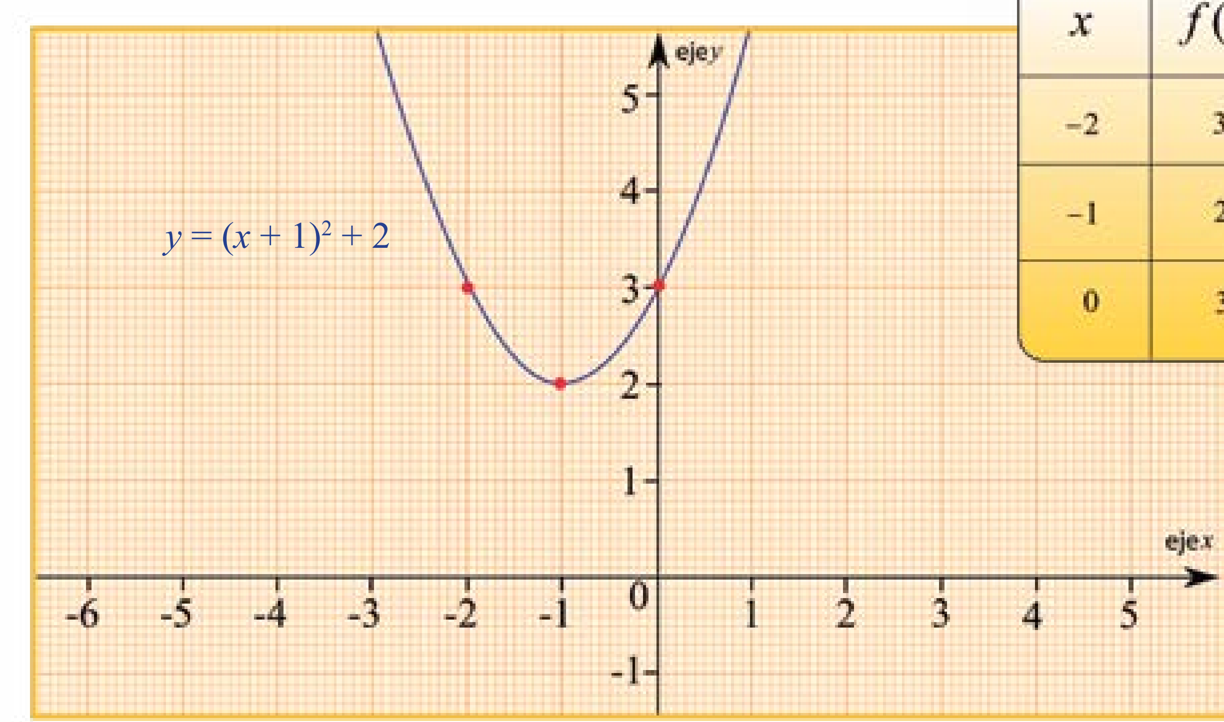
Igual que antes, deben construir las gráficas de:

$$f(x)=-(x+2)^2$$
$$f(x)=(x-2)^2$$
$$\text{y } f(x)=-(x-2)^2$$

Compárenlas con la de $f(x)=(x+2)^2$. ¿Qué ocasiona que sean distintas?

4) $f(x)=(x+1)^2+2$

Desarrollando la potencia del binomio y simplificando podemos escribir que $f(x)=x^2+2x+3$. Aquí $a=1$, $b=2$ y $c=3$. Su tabla y gráfica se presentan de seguidas.



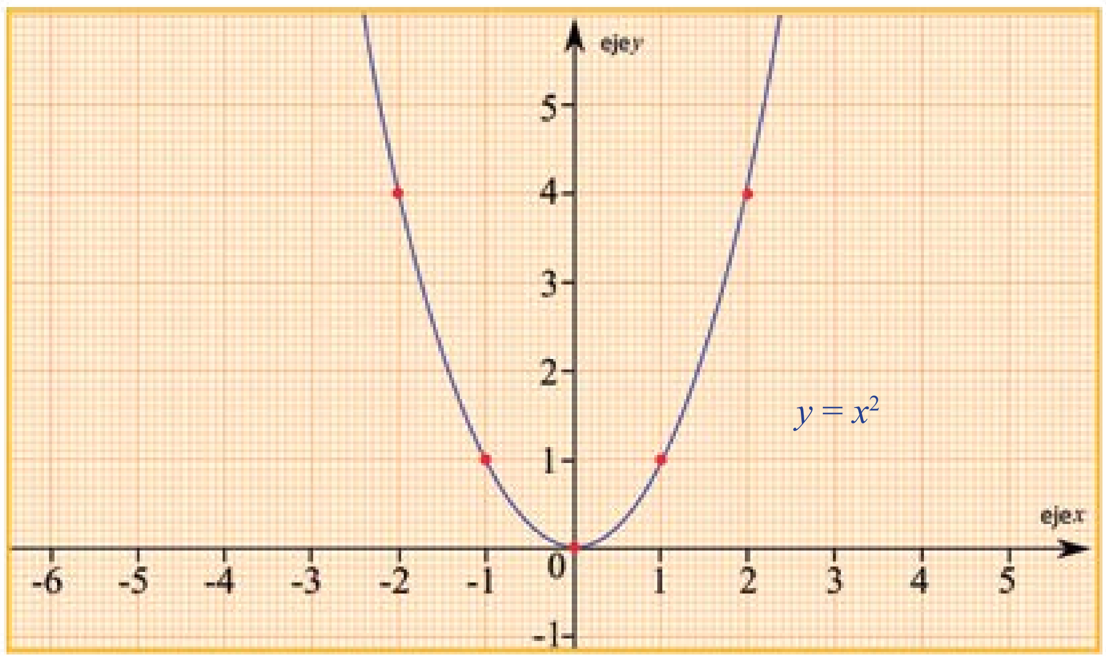
x	$f(x)$
-2	3
-1	2
0	3

Gráfica de $f(x)=(x+1)^2+2$

- Como $a > 0$, entonces la parábola es **cóncava hacia arriba**, tal como se aprecia en el gráfico anterior.
- El **vértice** de la parábola es $v(-1,2)$. En este caso, es el punto "más bajo" de la curva: el valor mínimo que ésta toma.
- El **eje de simetría** es la recta $x=-1$.
- ¿Cuál es su **conjunto imagen**?

Traslaciones de la parábola $f(x)=x^2$

Como sabemos, la gráfica de la función $f(x)=x^2$ es la que sigue.



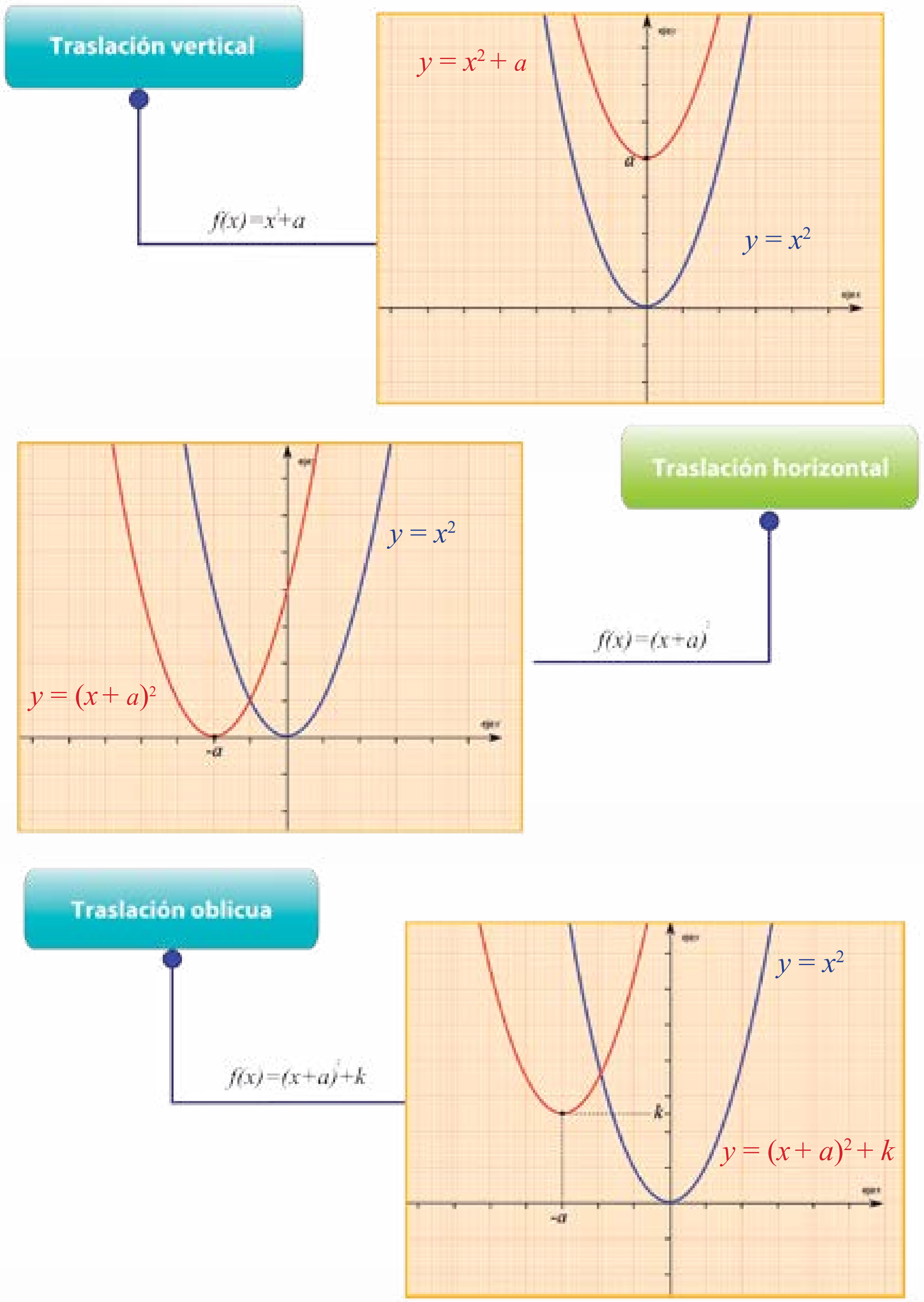
Gráfica de $f(x)=x^2$

Ahora si consideramos otra función cuadrática del tipo $f(x)=x^2+a$, ¿cómo es su gráfica? ¿Puede obtenerse esta última a partir de la gráfica de $f(x)=x^2$?

Incluso, podemos hacernos las mismas preguntas en caso de considerar las funciones:

$$f(x)=(x+a)^2$$
$$f(x)=(x+a)^2+k$$

El diagrama que sigue resume estas ideas. Las cuales se relacionan con cada una de las actividades que les hemos propuesto hasta ahora y con las que se han mostrado detalladamente en esta lección.



En todos los casos se tomó $a>0$ (a positivo) ¿Qué sucede si $a<0$? Construyan las gaficas correspondientes y compárenlas con la gráfica de $f(x)=x^2$

¿Cómo obtener una ecuación cuadrática conociendo sus raíces?

Este es un problema interesante. Primero calculemos la suma (S) y el producto (P) de las dos raíces de una ecuación cuadrática. Si tales raíces son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Entonces su suma es:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

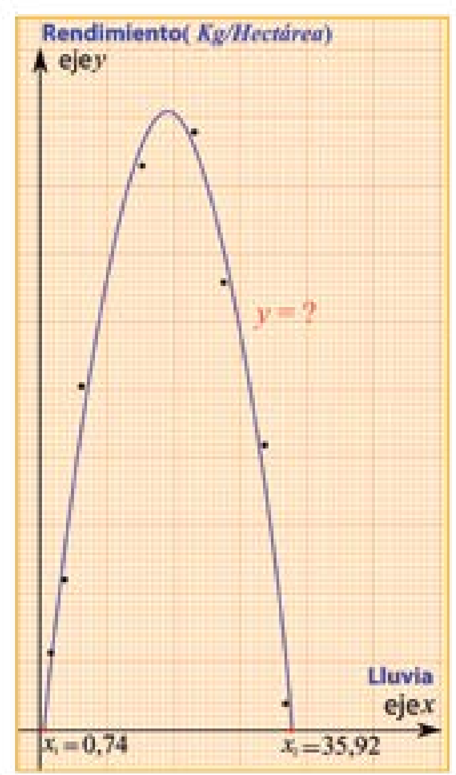
Y su producto:

$$P = x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Conversen con el grupo los argumentos utilizados en cada caso.

Por tanto, si dividimos por a la ecuación que sigue $ax^2+bx+c=0$, tenemos que $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Y como $S=-\frac{b}{a}$ y $P=\frac{c}{a}$, entonces tal ecuación se puede escribir como sigue: $x^2-Sx+P=0$.



Por ejemplo, sabemos que el gráfico de dispersión adjunto representa el *rendimiento de cierto cultivo en función de la cantidad de lluvia* corta al eje x, es decir, se hace cero, cuando $x_1=0,74$ y $x_2=35,92$ (recuerden que poca o mucha lluvia, de acuerdo a las características del cultivo, afecta la producción). La forma reducida de ecuación buscada es:

$$x^2-(x_1+x_2)x+(x_1x_2) = x^2-(0,74+35,92)x+(0,74\cdot 35,92) = x^2-36,66x+26,5808=0$$

La *forma reducida* de la ecuación cuadrática tiene como primer coeficiente al 1. Pero el gráfico de dispersión muestra que la parábola "abre hacia abajo", con lo cual a debe ser negativo.

Por esta razón multiplicamos la ecuación por -1:

$$-x^2+36,66x-26,5808=0$$

Esta ecuación tiene las mismas raíces que la anterior.

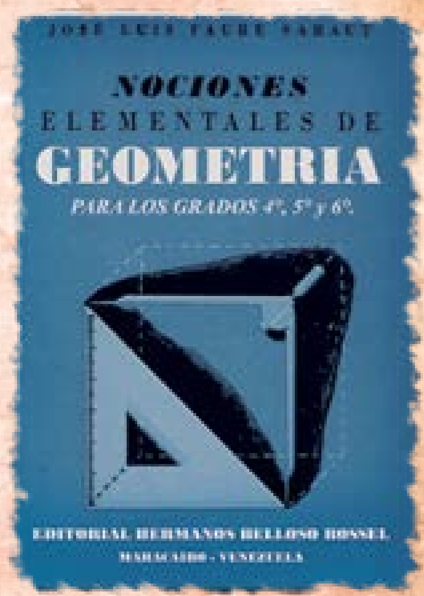
Si conociéramos algún dato adicional sobre el rendimiento (como por ejemplo el punto máximo, o bien, algún otro punto de la curva, podríamos hallar la ecuación que se aproxima al comportamiento de este cultivo en función de la lluvia).

- ¿Qué ecuación de grado 2 tiene como raíces a $x_1=-1$ y $x_2=3$?
- ¿Hay otras ecuaciones que tengan las mismas raíces?
- En el caso de que su respuesta sea afirmativa, expongan algunas de ellas y represéntenlas gráficamente en el plano cartesiano.
- Además, ¿qué ecuaciones de grado tienen como raíces $x_1=x_2=0$?

Investiguen qué otros fenómenos de la realidad se corresponden con la función cuadrática.

José Luis Faure Sabaut

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
José Luis Faure Sabaut (1871-1936)



Este gran pedagogo era oriundo del pueblo de Lannilis (Bretaña, Francia). Fueron sus padres José Luis Faure y Petra Sabaut. Nació el 7 de diciembre de 1871.

Realizó estudios en su país natal, siendo un alumno aprovechado. A los 11 años ya tenía un certificado de suficiencia de primaria. Cursó secundaria para luego ir a la universidad, hizo dos años de Medicina la cual abandonó para dedicarse a las Ciencias Exactas, disciplina en la que se gradúa.

Se dedicó por un tiempo a recorrer el mundo, viajando por varios países, hasta que arribó a Venezuela en 1891, en donde se radicó definitivamente haciéndola su segunda patria, contrayendo matrimonio en tierras trujillanas, lo que lo ató definitivamente a nuestro país. Se inicia temprano en la enseñanza. En Escuque (Estado Trujillo) en 1897 es nombrado Preceptor de la Escuela del Estado N° 20. Asimismo, en esta población realizó labores docentes en el Colegio "Pío X" dirigido por Monseñor Escalante, dando clases de Matemática y de Teología.

En 1910 el gobierno regional crea en la ciudad de Valera la Escuela Graduada "Ricardo Labastida" y designa como su Director al profesor José Luis Faure Sabaut. En esta institución educativa Faure Sabaut cumple una labor excepcional que trasciende con mucho el simple dictado de clases. Así, en 1912 con su propio dinero manda traer de Europa un conjunto de recursos didácticos (mapas, instrumentos para pesar y medir, cuadros murales, instrumentos gimnásticos, etc.) que convirtieron al plantel en uno de los mejor dotados de todo el país.

Fue un pedagogo que se adelantó a su tiempo, empleando métodos novedosos, apoyando su labor en el material adquirido, impulsando el sistema de enseñanza concéntrico.

También el maestro Faure Sabaut cumplió labores docentes en otros planteles escolares. Así tenemos que él fue profesor de Aritmética, Sistema Métrico, Geometría, Ciencias Elementales y Gimnasia Escolar en el Colegio "Santo Tomás de Aquino" y se desempeñó como docente de Álgebra y Geometría en el Colegio "Vargas", ambos en Valera. Fue Subdirector de este último.

Faure Sabaut además de sus labores en el aula pudo dedicar tiempo y esfuerzo para la confección de dos importantes obras didácticas: un libro sobre Geometría y otro sobre Sistema Métrico Decimal, ambos abarcan los temas que se estudiaban en los grados 4to, 5to y 6to de la Primaria. Las dos obras, como él mismo lo señala, son un compendio de las lecciones que dictó en la Escuela "Ricardo Labastida" por más de 25 años. Dichos libros fueron autorizados como textos oficiales.

Su labor educativa en la Escuela "Ricardo Labastida" sobrepasó los 25 años ininterrumpidos de docencia y orientación a la niñez y juventud trujillana. Cuando ya tenía casi 38 años de actividad docente, se le confirió el título de Hijo Benemérito de la Ciudad de Valera y se le obsequió una medalla de oro como reconocimiento a su dedicación y méritos. Dicha medalla tenía la inscripción "La Municipalidad de Valera al Profesor José Luis Faure Sabaut", la cual en su fondo llevaba estampado el escudo de la ciudad, y en el reverso se leía: "16 de septiembre de 1910, 16 de septiembre de 1935".

También obtuvo la Medalla de Honor de la Instrucción Pública.

En honor a este insigne pedagogo, un plantel educativo de La Puerta (Estado Trujillo) fue bautizado con su nombre en 1944, siendo su primera directora la profesora María Luisa Faure Stormes, hija de nuestro ilustre biografiado.

Actualmente esta institución escolar, siguiendo el ejemplo del maestro Faure Sabaut, edita su propio periódico escolar, de publicación trimestral: "La voz de José Luis Faure".

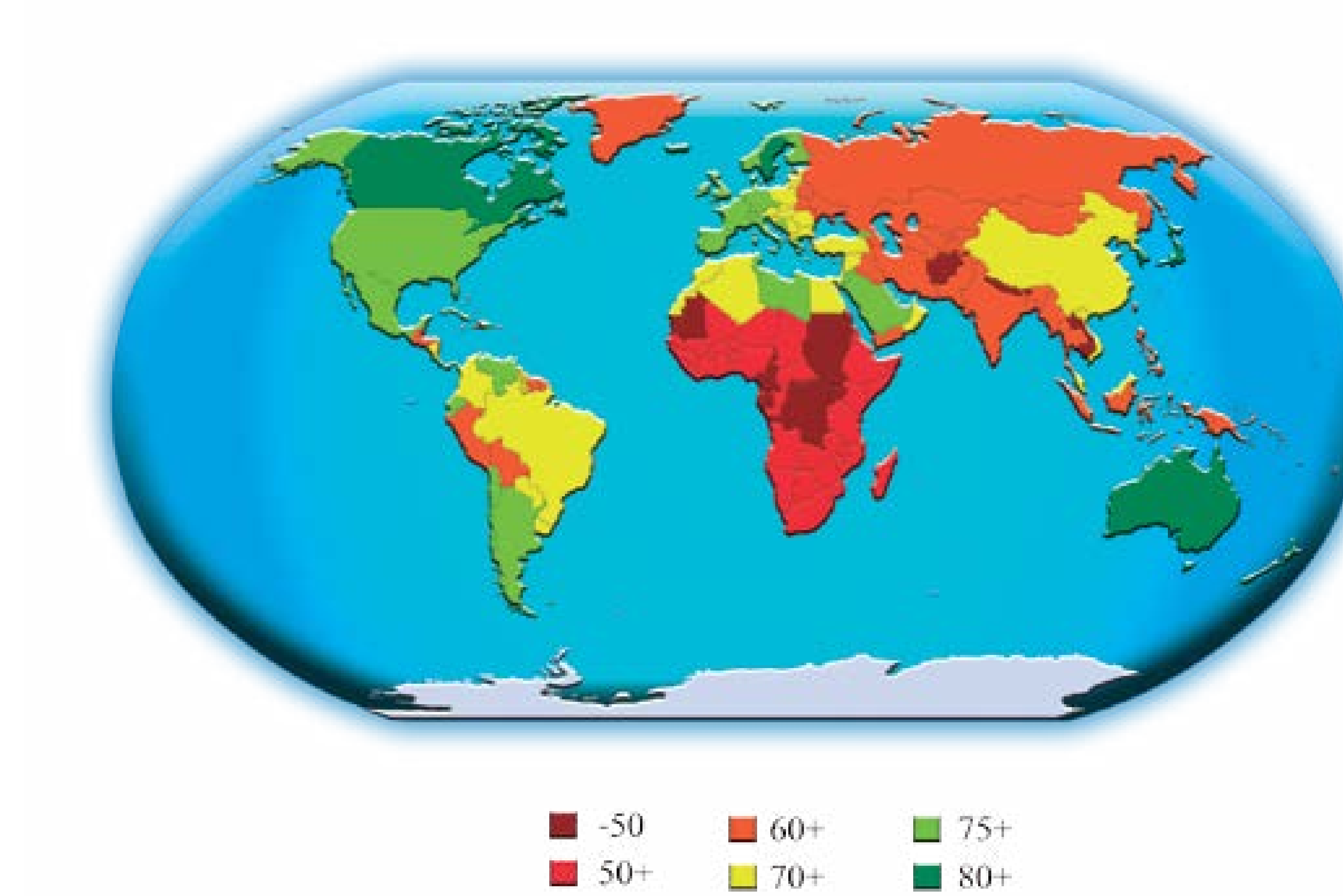
Este abnegado y prestigioso educador falleció en Valera el 7 de febrero de 1936.

8 LA ESPERANZA DE VIDA

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Función creciente, constante y decreciente. Funciones par e impar.

Algunos datos sobre la esperanza de vida en nuestro país

La **esperanza de vida** corresponde a la estimación de la media de años que podrían vivir grupos de personas que hayan nacido el mismo año si los movimientos en la tasa de mortalidad se mantienen constantes. En Venezuela, según un informe de la Organización Mundial de la Salud presentado en el año 2009 (sobre estudios realizados del año 2007), la esperanza de vida ha variado de **58,5 años** para el año 1960 hasta **75 años** para el año 2007 (es decir, una persona vive aproximadamente 75 años). Nuestro país se ubica sólo un punto porcentual por debajo de la media de la región que es 76 años. Datos que indican que tenemos mayor esperanza de vida.



La esperanza de vida en el mundo

- Es importante que, junto con sus compañeras y compañeros, busquen información sobre la esperanza de vida en los últimos reportes de las instituciones nacionales e internacionales y compárenlos con las medias o promedios de la región, del continente o del mundo, y conversen sobre las acciones que contribuyan a mejorar estos resultados.
- Partiendo de estos datos, elaboren tablas, gráficos y relaciones históricas que permitan organizar la información para un mejor análisis que favorezca la discusión y reflexión en el contexto del aula.
- Reflexionen también sobre lo siguiente: ¿qué acciones puedes emprender colectivamente para promover el conocimiento de los distintos aspectos que se vinculan con la **esperanza de vida**?

Sobre los objetivos de desarrollo del Milenio

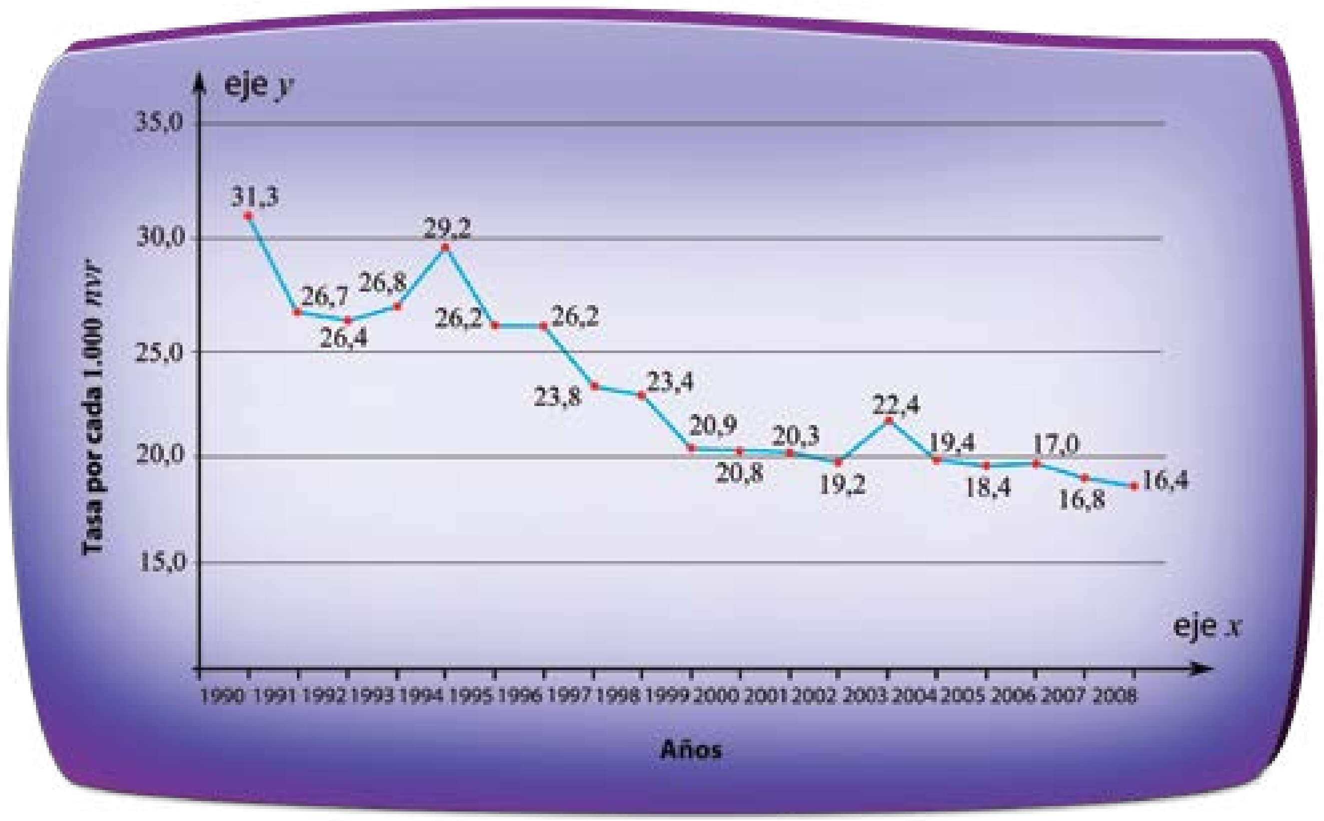
Para la Organización de las Naciones Unidas (ONU) la **esperanza de vida** se define como "El número de años que un recién nacido puede vivir si los patrones de mortalidad por edades imperantes en el momento de su nacimiento siguieran siendo los mismos a lo largo de toda la vida". En esta definición el número estadístico **esperanza de vida** determina la relación con la tasa de mortalidad.

Es por ello que esta organización para el año 2000 estableció, en conjunto con todos los países miembros, que dentro de los Objetivos de Desarrollo del Milenio debía estar: **reducir a dos tercios la tasa de mortalidad de los niños menores de 5 años entre 1990 y el año 2015**.

Venezuela asumió dicho objetivo como un compromiso de solidaridad. Por ello está en camino de reducir la mortalidad de niñas y niños menores de cinco años a:

11 por cada mil nacidos vivos registrados para el año 2015.

En la *gráfica 1* se puede observar que la mortalidad infantil en Venezuela muestra una tendencia hacia la disminución en el período comprendido entre 1990 y 2008. El registro más alto se obtuvo en el año 1990, cuando por cada 1.000 niños nacidos vivos registrados (*nvr*) 31,3 fallecieron. Mientras que la medición más baja se observó en el año 2008, cuando de cada 1.000 *nvr*,16,4 fallecieron.



Gráfica 1. Tasa de mortalidad infantil en Venezuela (menores de 5 años). 1990-2008

Fuente: Ministerio del Poder Popular para la Salud

En la *gráfica 1* se puede observar una relación entre los años y la tasa de mortalidad infantil. Fíjense que el número correspondiente a la tasa de mortalidad infantil varía de acuerdo al año.

Respondan a las preguntas que siguen con la ayuda de su profesora o profesor, compañeras y compañeros de la clase, e incluso, de otros miembros de la comunidad:

- ¿En qué porcentaje disminuyó la tasa promedio de mortalidad infantil en el año 2008 con respecto al año 1990?
- Calculen en qué porcentaje varió la tasa de mortalidad infantil en el año 2003 con respecto al año 1999.

A estas magnitudes las podemos llamar variables, pues una **variable** es todo aquello que varía, y esa variación se puede observar, medir y estudiar.

Como la tasa de mortalidad infantil depende del número de nacimientos y defunciones de niños entre 0 y 5 años en un tiempo determinado, podemos decir que esta tasa de mortalidad está en función del año en que se esté midiendo.

En este caso, la **variable independiente** es el año, mientras que la **variable dependiente** es la tasa de mortalidad infantil de ese año.

Observen que a cada año le corresponde una única tasa de mortalidad infantil, por lo que la relación que se presenta en la gráfica es una **función**.

Para que una relación entre dos variables pueda ser considerada una función es necesario que a cada valor de la variable independiente le corresponda un único valor de la variable dependiente.

Analicemos ahora los valores que pudieran tomar cada una de estas variables:

Los años (**variable independiente**) sólo pueden tomar valores naturales, pues se cuentan de uno en uno. Estos valores naturales van desde 1990 hasta 2008, por ello, podemos decir que la variable independiente de esta función es **discreta**.

Una **variable discreta** es aquella que toma valores aislados, es decir no admite valores intermedios entre dos valores específicos.

La tasa de mortalidad por cada 1.000 nacidos vivos registrados (variable dependiente) puede tomar cualquier valor en todo el intervalo:

$$[0\ ,\ 1.000]$$

Por lo tanto, se puede decir que la variable dependiente de esta función es continua.

Una **variable continua** toma valores en todo un intervalo, es decir, a lo largo de un continuo.

Dominio y Rango de funciones

En la *gráfica* 1 podemos observar que los valores que puede tomar, en este caso, la variable independiente son: 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008. Es decir, el dominio de la función f consta de todos los números naturales x tales que x sea mayor o igual a 1990 y menor o igual a 2008. En notación de conjunto, lo anterior se puede escribir como sigue:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{N}:\ 1990 \le x \le 2008\}$$

El **dominio** de una función f son todos los posibles valores que puede tomar la variable independiente x.

A partir de la *gráfica* 1 podemos darnos cuenta que los valores de las tasas de mortalidad durante el período analizado son: 31,3; 26,7; 26,4; 26,8; 29,2; 26,2; 26,2; 23,8; 23,4; 20,9; 20,8; 20,3; 19,2; 22,4; 19,4; 18,4; 17; 16,8; 16,4. Es decir la imagen 1990 bajo la función f es 31,3 y se puede escribir como sigue:

$$f(1990) = 31,3$$

Al conjunto de todas las imágenes lo llamaremos rango de f y lo denotaremos de la siguiente manera:

$$Rang(f) = \{31,3;\ 26,7;\ 26,4;\ 26,8;\ 29,2;\ 26,2;\ 23,8;\ 23,4;\ 20,9;\ 20,8;\ 20,3;\ 19,2;\ 22,4;\ 19,4;\ 18,4;\ 17;\ 16,8;\ 16,4\}$$

El **Rango** de una función f son todos los valores que toma la variable dependiente.

Observen la siguiente información:

Cuadro 1. Venezuela. Tasas de mortalidad infantil, neonatal y postnatal. (Menores de 1 año). 1990-2008. Fuente: Ministerio del Poder Popular para la Salud

Año	Tasas de mortalidad infantil (por 1.000 *nvr*)		
	General	Neonatal	Postneonatal
1990	25,8	14,0	11,7
1991	20,9	12,4	8,5
1992	22,0	13,5	8,5
1993	23,7	14,7	9,0
1994	24,6	14,0	10,6
1995	23,5	13,4	10,1
1996	23,9	13,8	10,1
1997	21,4	13,0	8,5
1998	21,4	12,4	9,0
1999	19,0	11,8	7,1
2000	17,7	11,5	6,2
2001	17,7	11,0	6,6
2002	18,2	11,9	6,2
2003	18,5	11,2	7,3
2004	17,5	10,1	5,8
2005	15,5	10,8	4,7
2006	14,2	10,0	4,2
2007	14,1	9,9	4,2
2008	13,9	9,7	4,2

En este cuadro se expresan las tasas de mortalidad infantil general, neonatal y postneonatal, en niñas y niños menores de 1 año.

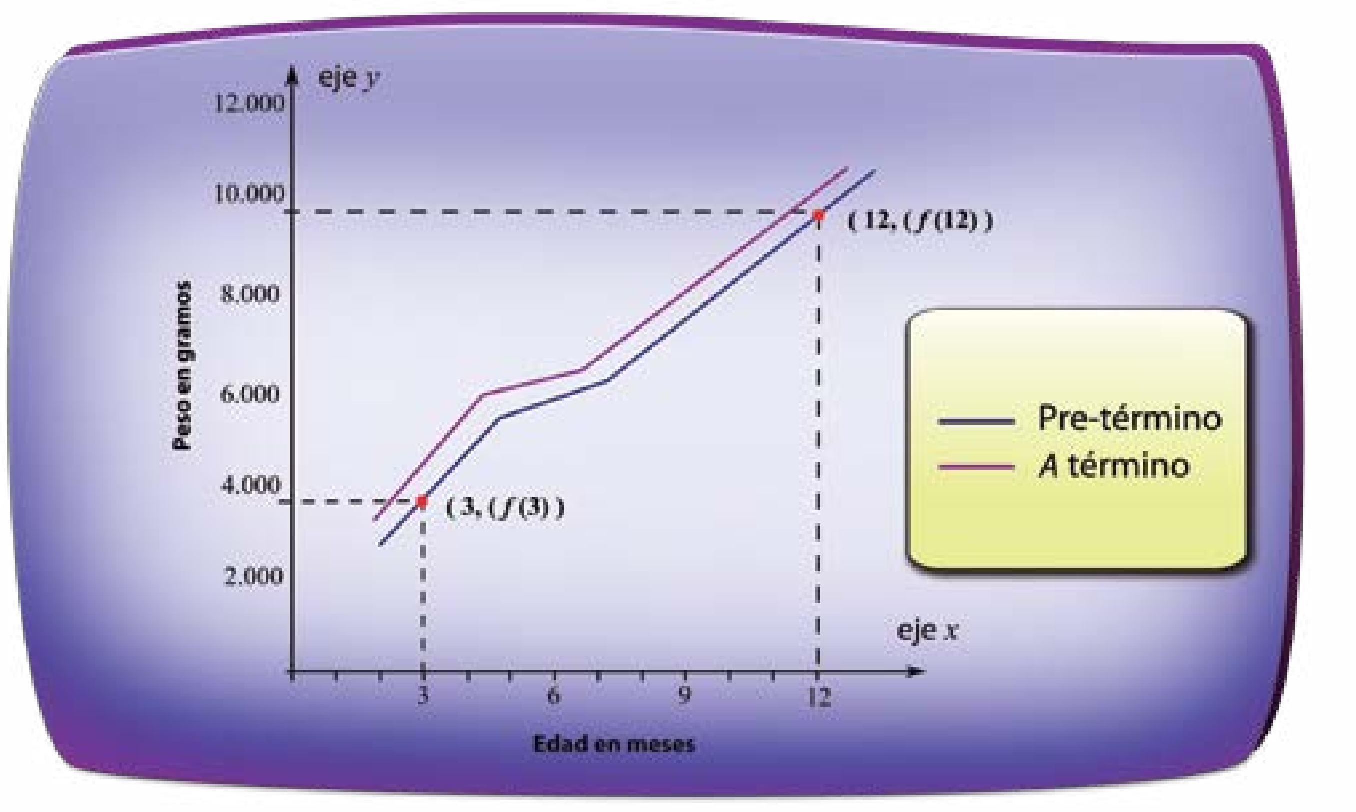
A partir del *cuadro* 1 desarrollen las siguientes actividades:

- Investiguen qué significa que un bebé se encuentre en la etapa neonatal, y qué significa que se encuentre en la etapa post neonatal.
- Construyan la gráfica correspondiente a la tasa de mortalidad infantil neonatal.
- Expliquen si la gráfica representa o no una función y por qué.
- En caso de que sea función, determinen su dominio y rango.
- Describan, a partir de la gráfica, cuál ha sido el comportamiento de la tasa de mortalidad infantil neonatal.

Funciones creciente, constante y decreciente

Las funciones se utilizan para modelar fenómenos en los que varían las cantidades asociadas al mismo. Resulta de mucha utilidad conocer dónde "sube" la gráfica de una función y dónde "baja".

Es decir, estudiaremos los conceptos de función creciente, función constante y función decreciente.



Gráfica 2. Edad y peso (masa) en niñas y niños "pre-término" y "a término"

La gráfica de la función anterior (niñas y niños **Pre-término**) es creciente debido a que al aumentar la edad (variable independiente) también se incrementa el peso en gramos (variable dependiente) del niño o la niña pre-término. Es decir, cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente también aumenta. Por tanto, *f* es creciente en todo su dominio.

Por ejemplo: en los puntos señalados en la gráfica podemos ver que $f(3) < f(12)$, y se cumple que $3 < 12$.

- A partir de la *gráfica* 2 que corresponde a los niños *A* término (en morado) indiquen si esta función es creciente.

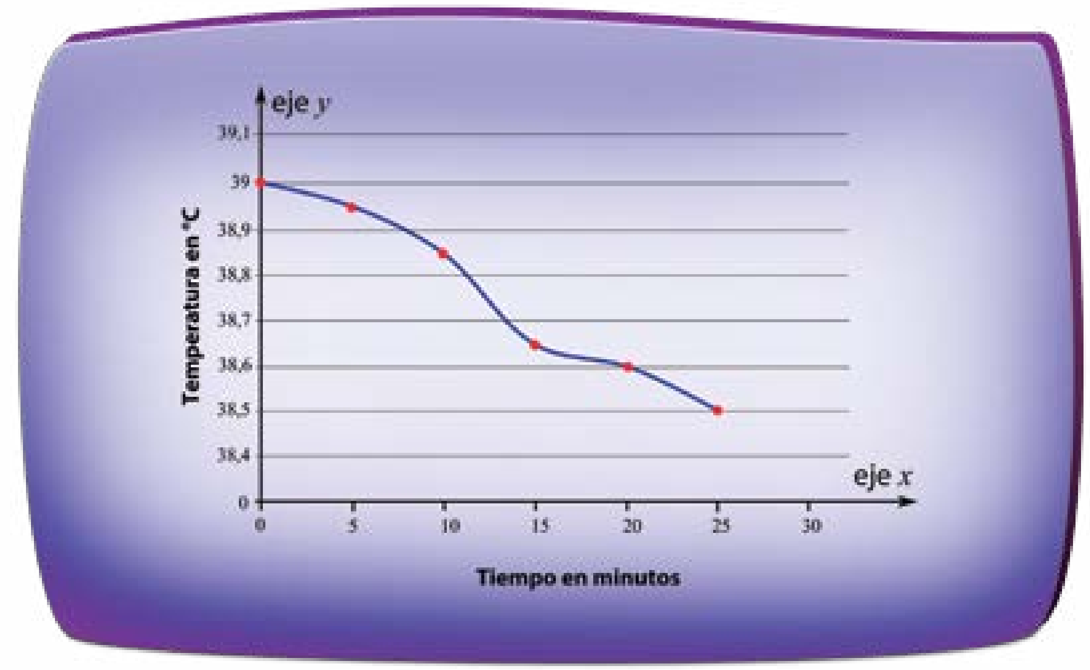
> Una función g es **creciente** en un intervalo I si:
>
> $g(x_1) < g(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Fiebre en los bebés recién nacidos

Se puede considerar que los recién nacidos y las recién nacidas presentan fiebre a partir de los:

$$38{,}2\ °C$$

El tratamiento de esta fiebre puede hacerse con el medicamento recomendado por el médico y aplicando compresas de agua templada en la frente y en la pelvis del bebé, o bañando al bebé con agua templada (crioterapia). En la gráfica 3 se muestra la variación de la temperatura de un bebé al aplicar la crioterapia.



Gráfica 3. Variación de la temperatura corporal al aplicar "crioterapia"

La función representada en esta gráfica es decreciente en el intervalo $[0,25]$, ya que a medida que el tiempo (variable independiente) aumenta, la temperatura (variable dependiente) disminuye.

Por ejemplo, se puede notar que:

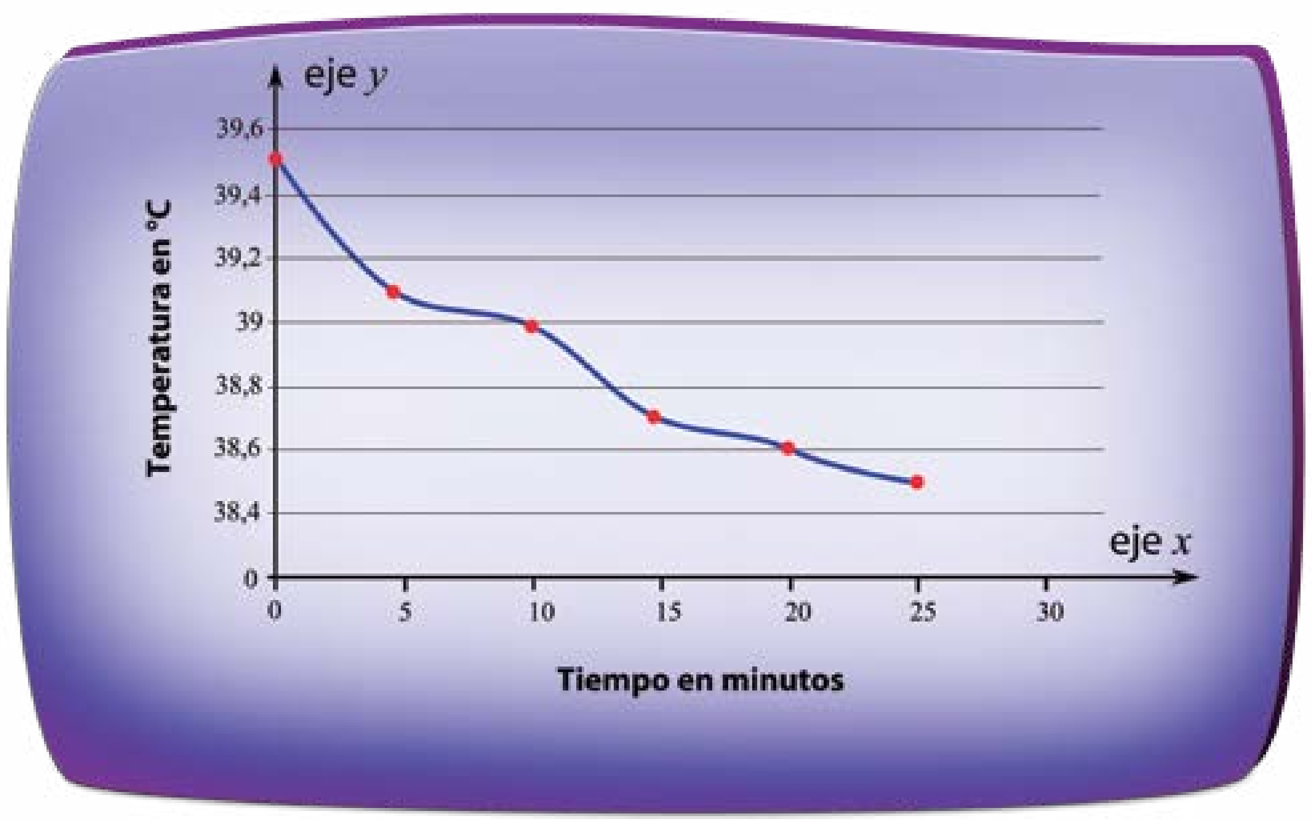
$$f(25) < f(0) \text{ y que } 25 > 0.$$

Lo anterior sucede para cualesquiera dos puntos del gráfico.

g es **decreciente** en un intervalo I si:

$g(x_1) > g(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

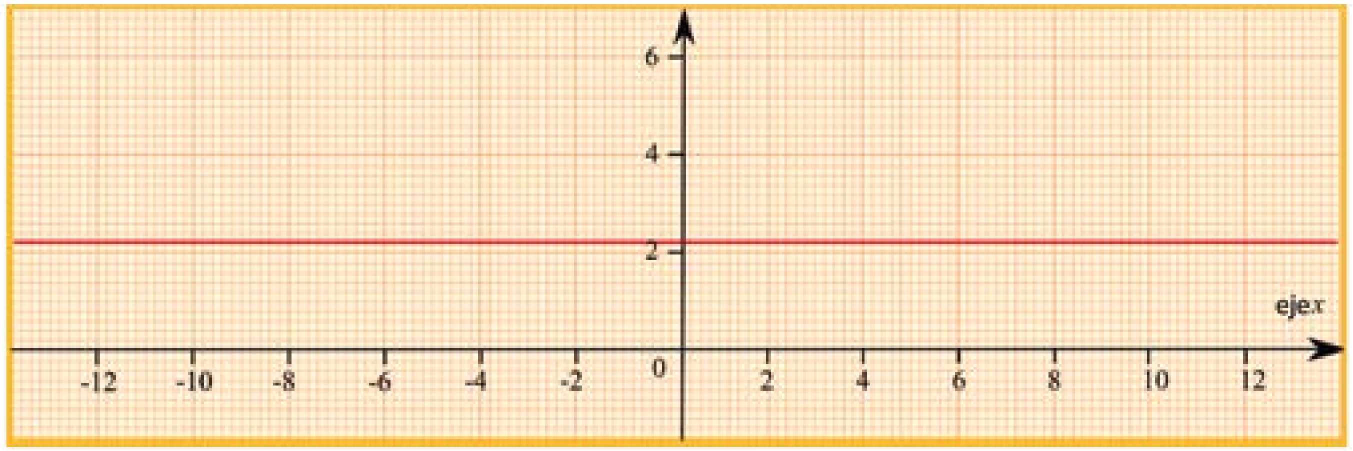
A continuación, en la *gráfica* 4, se muestra la variación de la temperatura de un bebé luego de aplicado el medicamento recomendado por el médico.



Gráfica 4. Variación de la temperatura corporal al aplicar el medicamento

Expliquen si esta función es creciente o decreciente en el intervalo $[0\ ,\ 25]$.

Existen, además, funciones que son constantes; es decir, todo elemento de su dominio tiene la misma imagen. Simbólicamente esto se escribe así: para todo x_1 y x_2 en el dominio de f, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$. Un ejemplo gráfico de una función constante en todo su dominio se encuentra de seguidas.



Gráfica 5. Representación de la función constante $f(x) = 2,2$

Variación de la temperatura

Ahora queremos saber cuál fue la variación de la temperatura corporal de los bebés al aplicar la crioterapia. Para ello, calcularemos la variación promedio como se muestra a continuación:

Calculamos la variación promedio de la temperatura entre los $0\ min$ y los $25\ min$ (lo que denotaremos con el símbolo: $VPT_{(0,25)}$). El tiempo transcurrido es:

$$25\ min - 0\ min = 25\ min$$

Para hallar la variación total de temperatura, se resta la temperatura a los $0\ min$ de la temperatura a los $25\ min$, es decir:

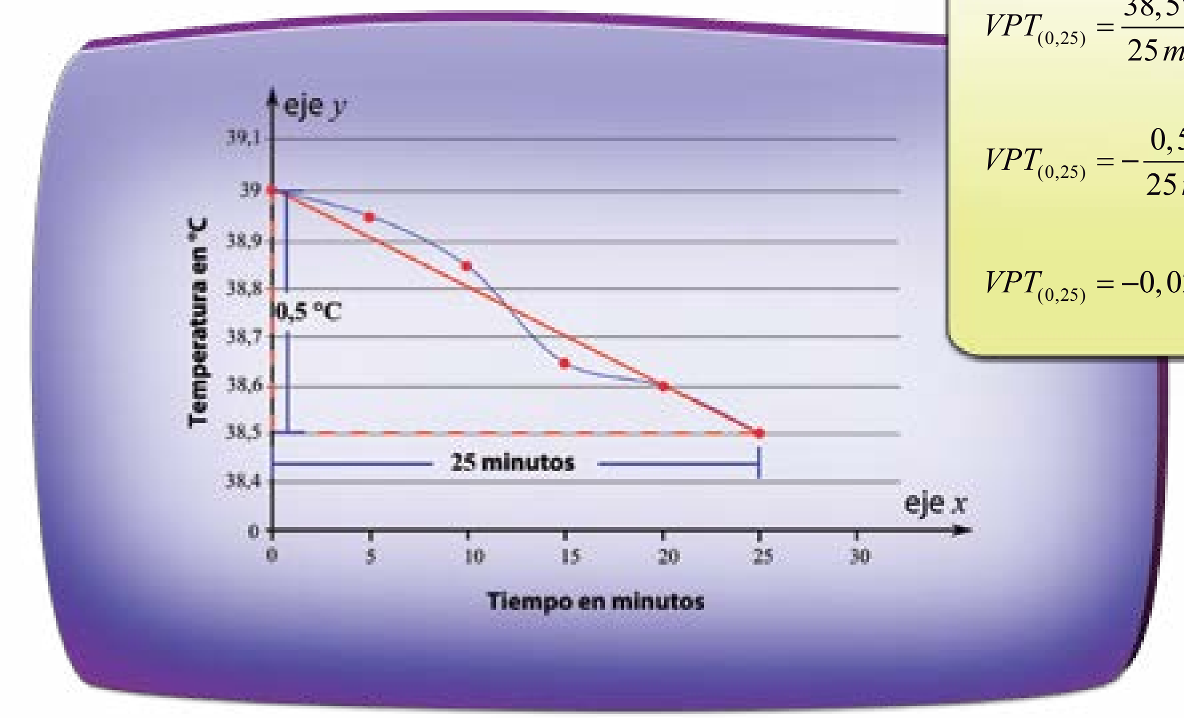
$$38{,}5°C - 39\ °C = 0{,}5\ °C$$

Así la temperatura promedio es:

$$VPT_{(0,25)} = \frac{38,5°C - 39°C}{25\,min - 0\,min}$$

$$VPT_{(0,25)} = -\frac{0,5°C}{25\,min}$$

$$VPT_{(0,25)} = -0,02\,{}^{°C}\!/_{min}$$



Gráfica 6. Variación de la temperatura corporal bajo crioterapia.

Esto quiere decir que, entre los 0 y los 25 minutos, la temperatura disminuyó en promedio unos **$0,02$ °C por cada minuto** (ver el *gráfico* 6).

Hay que observar que la variación promedio de la temperatura no siempre es igual en intervalos de tiempo distintos. Por ejemplo, entre los $5\ min$ y $15\ min$, se tiene que:

$$VPT_{(5,15)} = \frac{38,65°C - 38,95\ °C}{15\,min - 5\,min} = -\frac{0,3\ °C}{10\,min} = -0,03\ {}^{°C}\!/_{min}$$

Esto nos permite afirmar que durante los cinco y los quince minutos, la temperatura descendió en promedio alrededor de $-0,03$ °C por minuto.

- A partir de la gráfica de la variación de la temperatura corporal con la aplicación de medicamentos, determinen la variación promedio entre los valores de la variable independiente t=0 y $t = 25$.
- Calculen la variación promedio entre $t = 5$ y $t = 20$.

La variación promedio de la temperatura se puede denominar tasa de cambio promedio.

La **tasa de cambio promedio** de la función entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{variación\ en\ y}{variación\ en\ x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de cambio promedio es la **pendiente de la recta secante a la curva** entre $x = a$ y $x = b$.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y sus inversas

Función inyectiva

En nuestro país, para identificar a los recién nacidos se les toman los rastros plantares (huellas de la planta del pie). Esto se hace debido a que ningún ser humano tiene la impresión dactilar de otro, aunque provengan del mismo óvulo fecundado.

Ahora bien, pensemos por un momento que podemos colocar en un conjunto "A" el nombre de todos los bebés que nacieron en nuestro país durante el año 2010, y que le hayan tomado la huella dactilar; y en el conjunto "B" colocamos todas las impresiones de los pies de las niñas y niños nacidos durante el año en cuestión. Si establecemos la relación f que le atribuye a cada bebé su respectiva huella plantar, tendremos el diagrama sagital adjunto.

- Discutan con sus compañeras y compañeros las siguientes preguntas: ¿Es f una función? ¿Por qué? ¿Cuál es el conjunto de partida? ¿Cuál es el conjunto de llegada?

Reflexionemos sobre lo siguiente: Si tomamos dos nombres de bebés distintos, cualesquiera, sus huellas plantares correspondientes (imágenes) serán distintas. Si nos fijamos en el conjunto B podemos notar que no es posible que una huella plantar haya sido asignada a dos bebés. Podemos concluir que la imagen de cada nombre de bebé es una huella plantar distinta. Es decir, a elementos distintos del conjunto A le corresponden imágenes distintas en el conjunto B. Por lo tanto, f es una función inyectiva, pues:

Una función f es **inyectiva** si a elementos distintos del conjunto de partida "A" le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada "B".

Otro ejemplo es:

Observen la siguiente tabla que registra el número de bebés nacidos durante una semana en una maternidad:

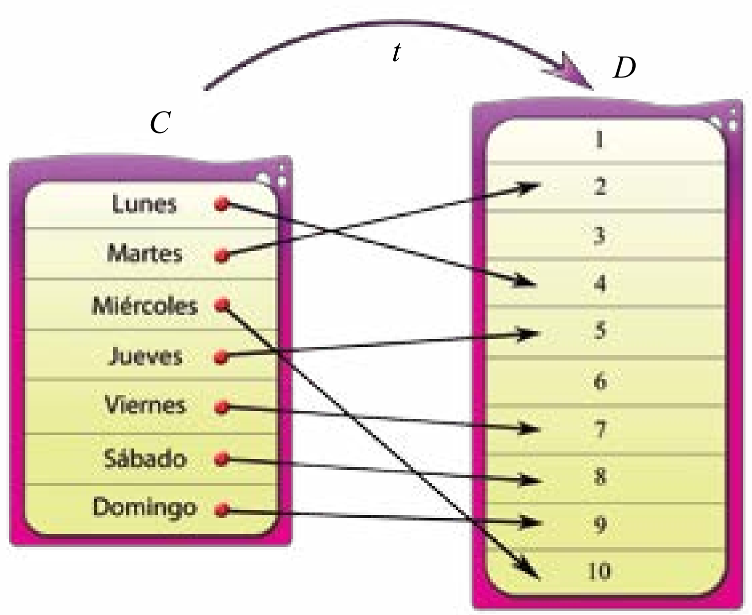
Días de la semana (C)	Números de bebés nacidos (D)
Lunes	4
Martes	2
Miércoles	10
Jueves	5
Viernes	7
Sábado	8
Domingo	9

De acuerdo a los registros de nacimientos diarios de esta maternidad, nunca se han presentado más de diez nacimientos en un día, y siempre nace al menos un bebé.

Si llamamos "C" al conjunto de todos los días de la semana, y "D" al conjunto de los números naturales del 1 al 10. Podemos definir una función.

$$t : C \to D$$

Que asigne a cada día de la semana el número de bebés nacidos ese día. A continuación se muestra el diagrama sagital de t.



- ¿Son 1, 3 y 6 imágenes de la función t?
- ¿Es correcto decir que t es función a pesar de que 1, 3 y 6 no sean imágenes de alguno de los días de la semana?
- Si consideramos un par cualquiera de días de la semana distintos de C sus imágenes en D serán distintas. Entonces t es una función inyectiva.
- Ahora consideremos una gráfica en el plano cartesiano:

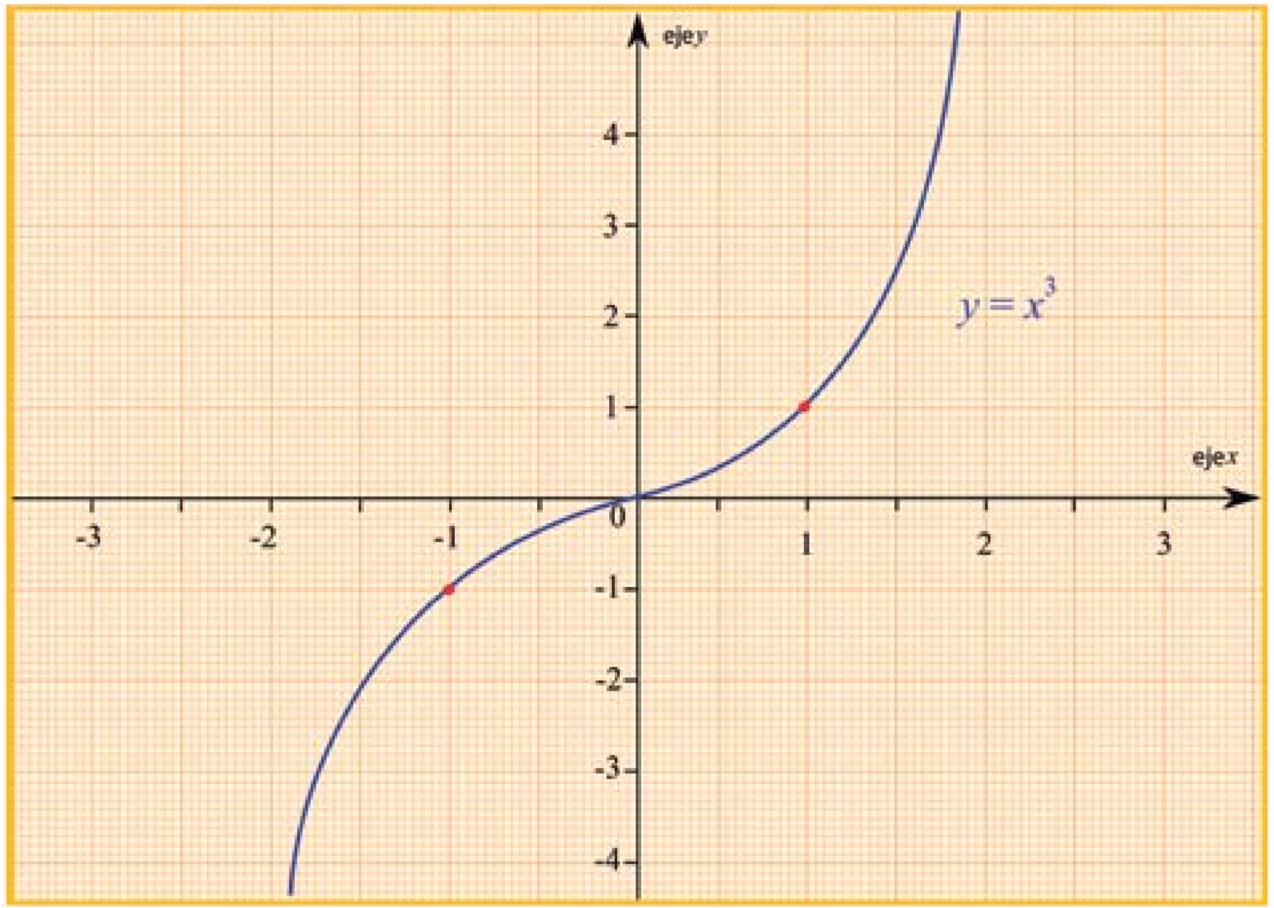


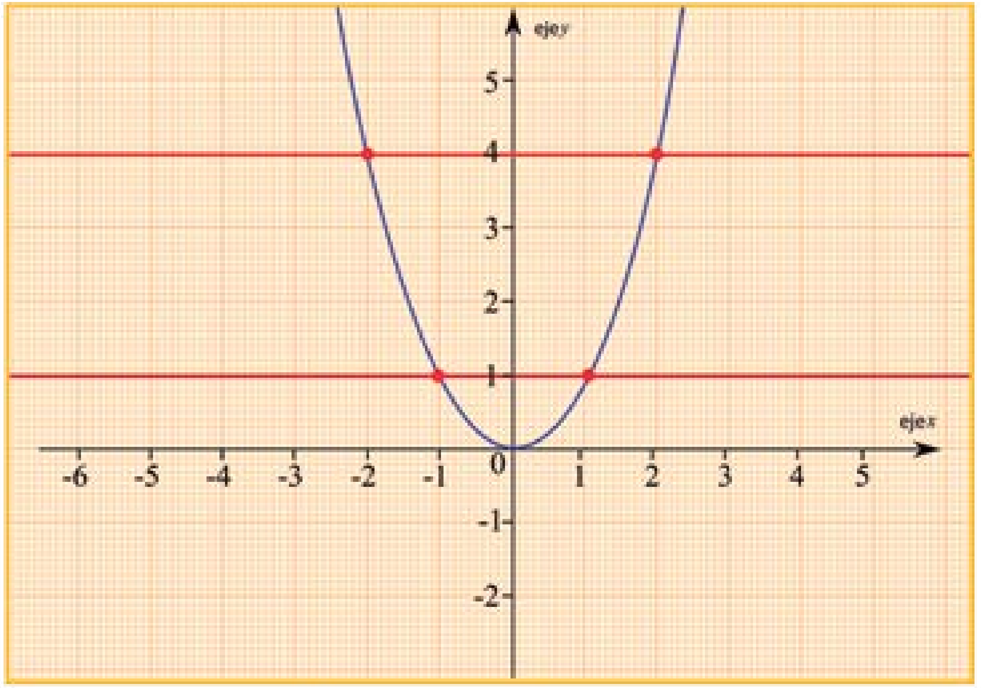
Gráfico 7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^3$

En la gráfica se puede observar que ninguna recta horizontal corta más de una vez a la curva. Por lo tanto f es inyectiva.

Prueba de la recta horizontal

Una función es inyectiva si, y sólo si, ninguna recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

Dada la *gráfica* 8:



Gráfica 8. Representación de $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ***dada por*** $f(x)=x^2$
junto con dos de las rectas horizontales que la cortan

En ella se puede observar que hay rectas horizontales que cortan la curva más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, ***g*** no es inyectiva.

Función sobreyectiva

Recordemos la función *f* que definimos antes. En la cual *A* es el conjunto de todos los nombres de bebés nacidos en el año 2010, mientras que *B* es el conjunto de todas las huellas plantares de estos bebés, y ***f*** es la función que asigna a cada bebé su huella plantar. Aquí, cada huella plantar del conjunto *B* ha sido asignada a algún bebé nacido en el 2010 (conjunto *A*). También podemos decir que *B* (conjunto de llegada de ***t***) coincide con el rango de ***t***.

Conversen con su profesor o profesora y también con sus compañeras y compañeros sobre estas afirmaciones.

Por lo anterior, ***f*** es una función sobreyectiva.

Una función $f:A\rightarrow B$ es **sobreyectiva** si cada elemento del conjunto de llegada "*B*" es imagen de al menos un elemento del conjunto de partida "*A*".

También es válido decir que ***f*** es sobreyectiva si el rango de *f* es igual al conjunto de llegada de ***f***.

Expongamos otro ejemplo: definamos ahora al conjunto *E* de todos los nombres de los bebés nacidos vivos durante el año 2010 en Venezuela, y en el conjunto *F* colocamos todos los días del año 2010. Establezcamos la relación $r:E\rightarrow F$ que hace corresponder a cada niña o niño su día de nacimiento.

Respondan, junto con sus compañeros y compañeras, cuál es el dominio, codominio y rango de *r*? Cada día del año 2010 (es decir, del conjunto *F*) ha sido asignado como fecha de nacimiento a, al menos, un niño o niña. Es decir que cada elemento de *F* es imagen de al menos un elemento de *E*. En consecuencia, *r* es una función sobreyectiva.

Pero ¿será *r* inyectiva?

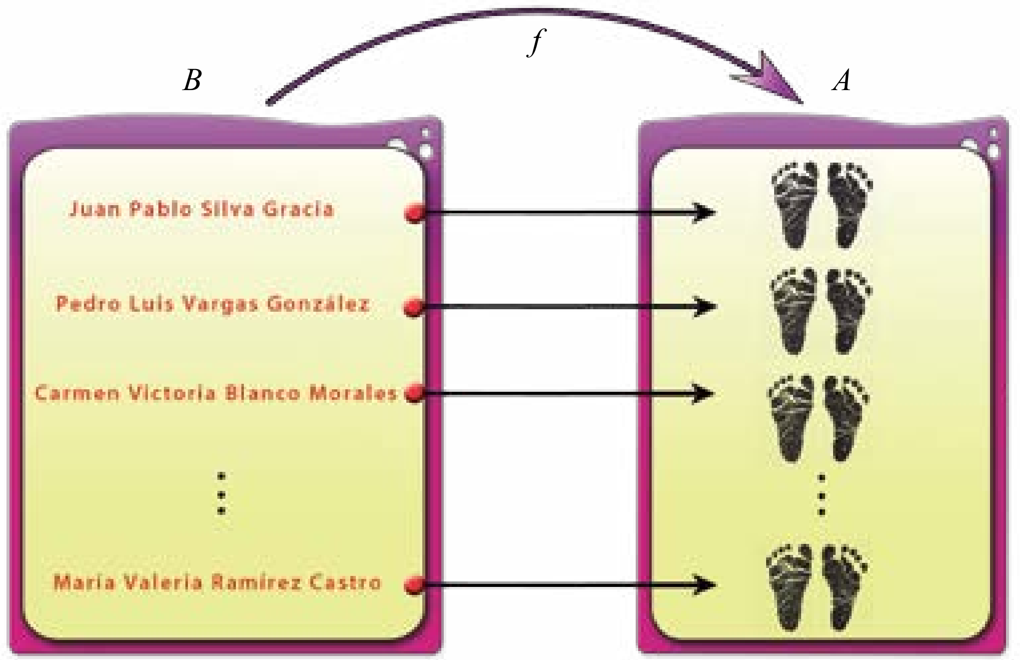
Sabiendo que el número de niños nacidos vivos durante el año 2010 es mayor que 365 (verifica esta información en la página web del Instituto Nacional de Estadística), varios niños y niñas comparten una misma fecha de nacimiento. Es decir, que si tomamos dos nombres de niñas o niños distintos, su fecha de nacimiento no siempre será distinta.

Por lo tanto, *r* es sobreyectiva pero no inyectiva.

¿Será la función *t*, definida anteriormente, una función sobreyectiva? ¿Por qué?

Función biyectiva

En la gráfica de la función *f*, definida antes, se asigna al nombre de cada bebé nacido en 2010 (en el conjunto *A*), su respectiva huella plantar en el conjunto *B*:

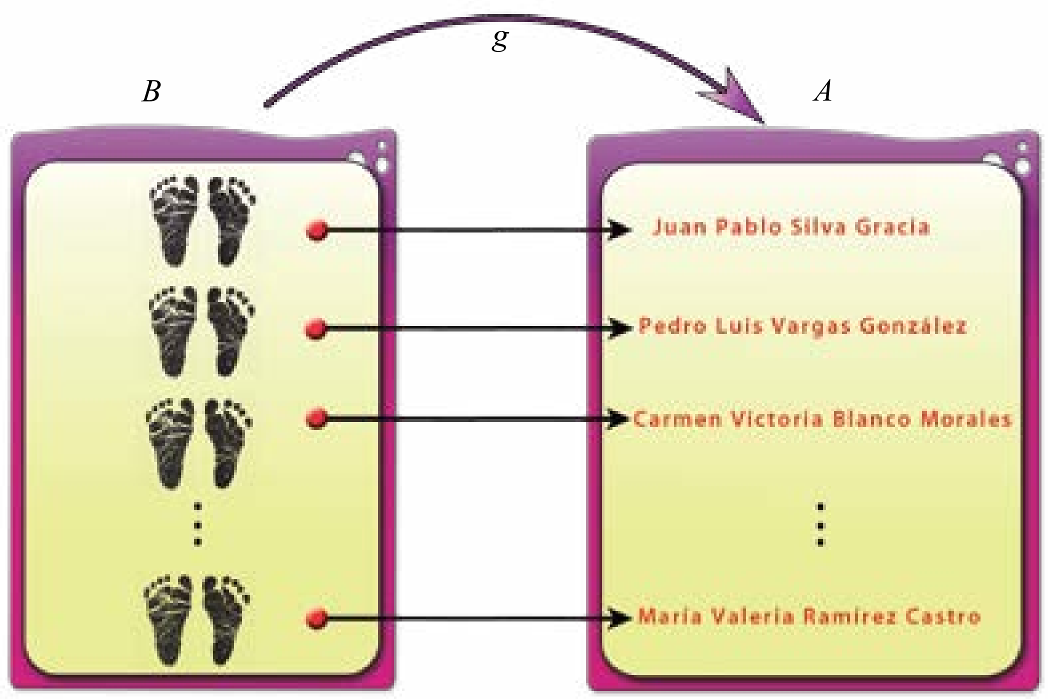


Como ya discutimos, ***f*** es inyectiva y también es sobreyectiva. Así que ***f*** es biyectiva, pues nos apoyamos en la definición que mostramos a continuación:

Una función es **biyectiva** si, y sólo si, es inyectiva y sobreyectiva.

Inversa de una función

Establezcamos ahora una relación g que le asigne a cada huella plantar del conjunto B el nombre del bebé al cual pertenecen las huellas, del conjunto A. Es decir, g es la relación inversa de f. Su diagrama sagital es:



Sabemos que $f : A \to B$ es biyectiva. Es decir, f es inyectiva y sobreyectiva.

¿Por qué a partir de que f sea biyectiva podemos afirmar que $g : B \to A$ es una función? La función $g : B \to A$ es la función inversa de $f : A \to B$.

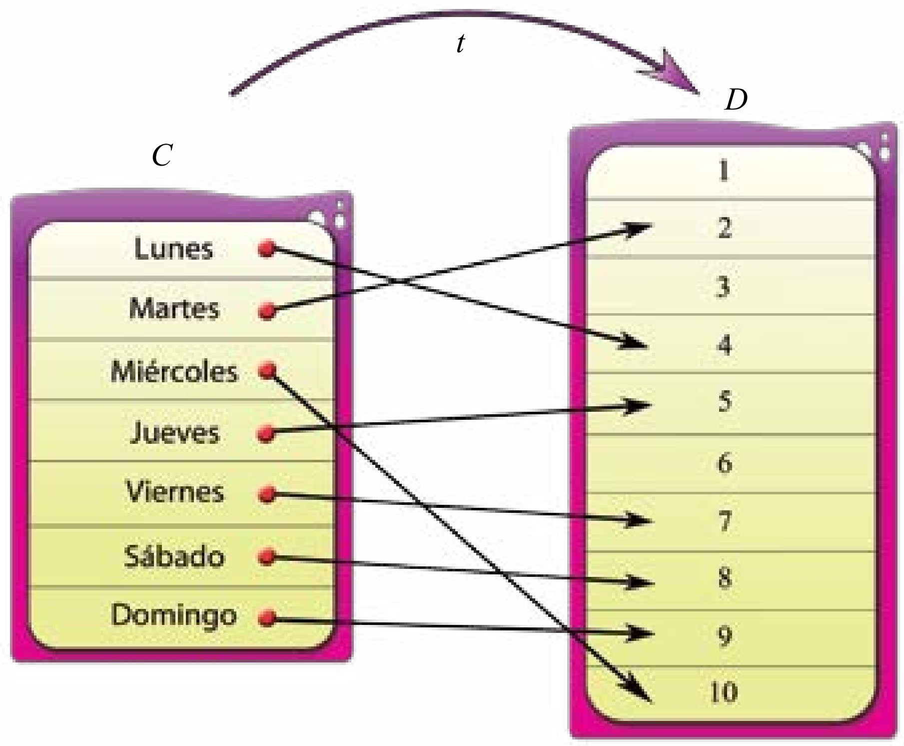
Sea f una función biyectiva con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** tiene dominio B y rango A y está definida por:

$f^{-1}(y) = x$ si, y sólo si, $f(x) = y$ para cualquier y en B.

Es importante no confundir el -1 en f^{-1} con un exponente. f^{-1} no significa $\dfrac{1}{f(x)}$. Eso sería un error.

Ilustremos este concepto con un nuevo ejemplo.

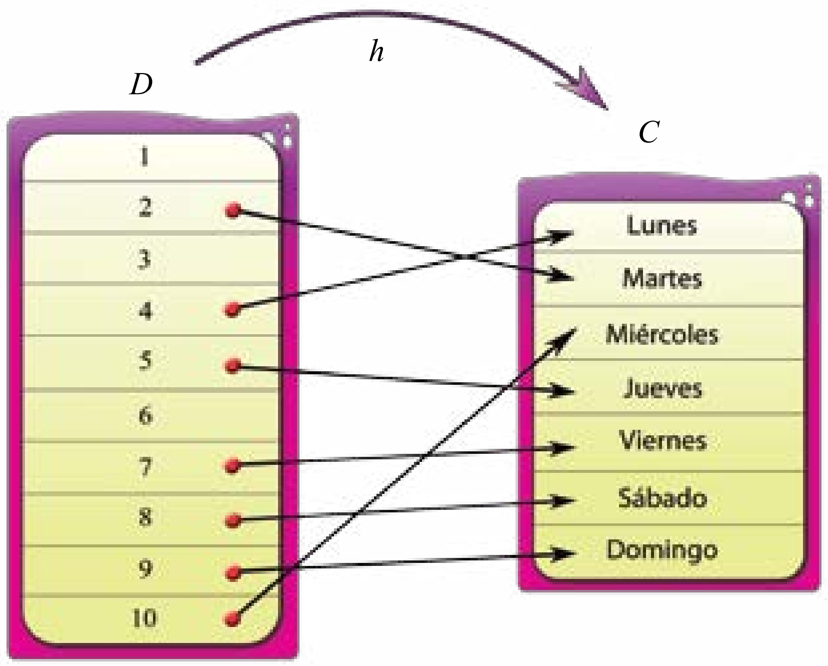
Recordemos la función $t : C \to D$ que asigna a cada día de la semana del conjunto C el número de bebés nacidos ese día del conjunto D.



Sabemos que t es inyectiva. Además, los elementos 1, 3 y 6 del conjunto D no son imágenes de ningún elemento de C. Por tanto, t no es **sobreyectiva**.

Ahora bien, llamaremos h a la **relación inversa** de t. Esta relación $h : D \to C$ asigna a cada número del conjunto D un día de la semana, que corresponde a la cantidad de bebés nacidos ese día.

El diagrama sagital de h es:

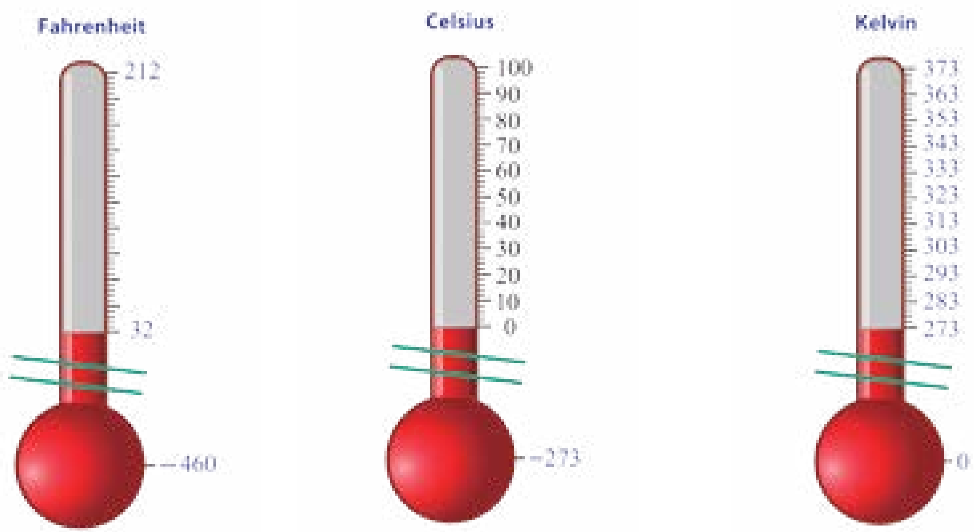


En el conjunto D los elementos 1, 3 y 6 no tienen una imagen en C. Entonces, h no es una función, por lo tanto, la función t no tiene función inversa.

Pero la función r definida de E en F, que hace corresponder a cada niño o niña nacida en 2010 su día de nacimiento, establece la relación inversa de r.

Escalas de temperatura

Las escalas más comunes para la medición de la temperatura son la Celsius, la Kelvin y la Fahrenheit.



La relación entre la escala Fahrenheit (ºF) y la escala Celsius (ºc) está dada por la ecuación:

$$(T_F) = \frac{9}{5}T_C + 32\ ºF$$

Para saber cómo se construye esta ecuación, trabajen junto a sus compañeras, compañeros, profesora o profesor y apóyense en las ideas de punto medio, ecuación de la recta y pendiente de una recta.

- ¿Cuántos ºC son 18 ºF ? ¿Cuántos *ºC* son –17 ºF? ¿Cuántos *ºC* son 100 ºF ? ¿Cuántos *ºC* suman 18 ºF y –17 ºF ?
- ¿Qué conjuntos se relacionan a partir de la ecuación $(T_F) = \frac{9}{5}T_C + 32\ ºF$? ¿Cuál es el conjunto de partida? y ¿Cuál es el conjunto de llegada?
- ¿Es la relación anterior una función? ¿Por qué?
- Representen gráficamente la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(T_F) = \frac{9}{5}T_C + 32\ ºF$. ¿Es la función F biyectiva? ¿Por qué?

Al despejar la variable grados Celsius de la ecuación $(T_F) = \frac{9}{5}T_C + 32\ ºF$, obtenemos lo siguiente:

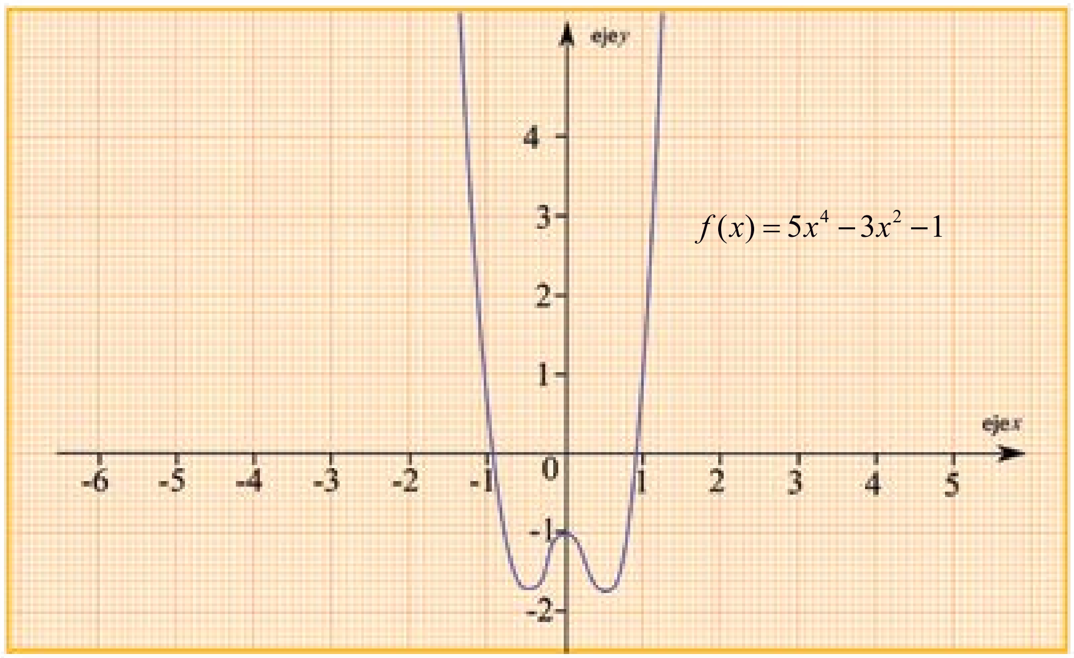
$$T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\ ºF\right).$$

- ¿Qué conjuntos se relacionan a partir de la ecuación $T_C = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\ ºF\right)$? ¿Cuál es el conjunto de partida? y ¿cuál es el conjunto de llegada?
- ¿Define la relación anterior una función? ¿Por qué?
- ¿Cuántos *°F* son 64,4 *ºC* ? ¿Cuántos *°F* son –27,2 *ºC* ? ¿Cuántos *°F* son 37,7 *ºC* ? ¿Cuánto *ºF* suman 64,4 *ºC* y –27,2 *ºC*?
- Representen en un mismo plano cartesiano las dos funciones anteriores. ¿Qué observan?
- Tomen en cuenta la tabla de datos y las representaciones gráficas de las funciones, ¿qué podemos afirmar a partir ellas?

Simetría en la gráfica de funciones

Algunas gráficas de funciones tienen ciertas características especiales de simetría. Pueden ser simétricas con respecto al eje de las coordenadas (eje y), o con respecto al origen del sistema cartesiano.

La gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=5x^4-3x^2-1$ es:



Gráfica 9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ***dada por*** $f(x)=5x^4-3x^2-1$

Para su construcción nos hemos apoyado en uno de los software libres que permite la graficación de funciones en el Plano Cartesiano. Ustedes pueden descargar uno de tantos software e instalarlo en sus computadores. El eje de las coordenadas puede verse como el eje de simetría de la gráfica de f. Es decir, si dobláramos el papel donde está dibujada la gráfica por el eje de las ordenadas, eje y, veríamos que coinciden perfectamente ambos lados.

¿Qué ocurre con la imagen de 1 y la imagen de -1 a través de la función $\boldsymbol{f}$?

Los cálculos que exponemos a continuación permitirán responder esta cuestión.

$$\begin{aligned} f(1) &= 5(1)^4-3(1)^2-1 \\ &= 5.1-3.1-1 \\ &= 5-3-1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(-1) &= 5(-1)^4-3(-1)^2-1 \\ &= 5.1-3.1-1 \\ &= 5-3-1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así, $f(1)=f(-1)$

¿Será que en esta función f siempre se cumple que $f(x)=f(-x)$?

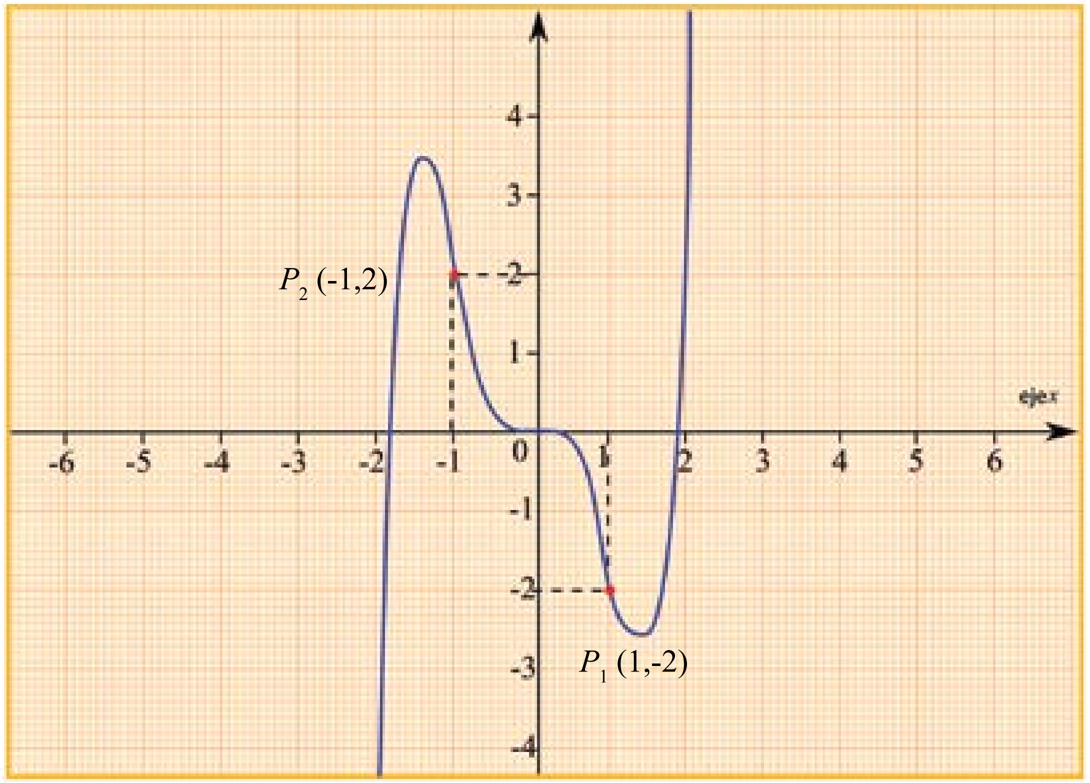
$f(-x)=5(-x)^4-3(-x)^2-1$ — Por definición de $\boldsymbol{f}$

$f(-x)=5x^4-3x^2-1$ — Por ser el exponente par

$f(-x)=f(x)$ — Por definición de $f(x)$

Como se cumple que, para todo $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(-x)$ diremos que $\boldsymbol{f}$ es una función par.

Ahora, en la gráfica de esta función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $g(x)=x^5-3x^3$:



Gráfica 10. Función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ***dada por la regla*** $g(x)=x^5-3x^3$

¿Qué pueden decir al respecto de las imágenes de 1 y de -1 a través de la función g? Para responder esto evaluaremos a la función g en los puntos 1 y -1:

$$g(-1)=(-1)^5-3(-1)^3 \qquad g(1)=1^5-3(1)^3$$
$$=-1-3(-1) \qquad =1-3$$
$$=2 \qquad =-2$$

Observa que, $g(-1)=2=-(-2)=-g(1)$

Además, en este caso cumple que $g(-x)=-g(x)$:

$g(-x)=(-x)^5-3(-x)^3$	Por definición de g
$=-x^5+3x^3$	Por ser el exponente impar
$=-(x^5-3x^3)$	Por propiedad distributiva
$=-g(x)$	Por definición de $g(x)$

Actividades

1 Ahora les invitamos a representar gráficamente las siguientes funciones:

- $t:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\ t(x)=x^2$
- $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\ h(x)=x^3$

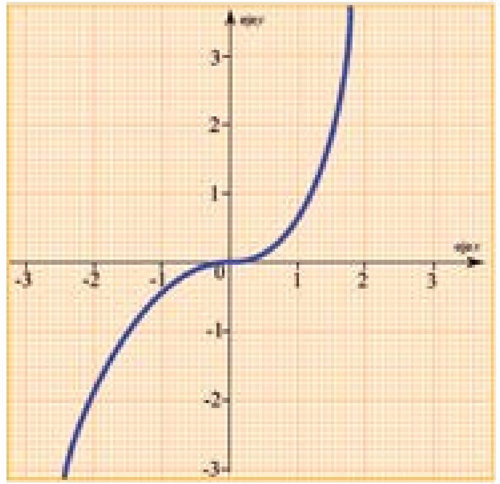
2 Discutan con sus compañeras y compañeros si estas funciones son pares o impares, y por qué.

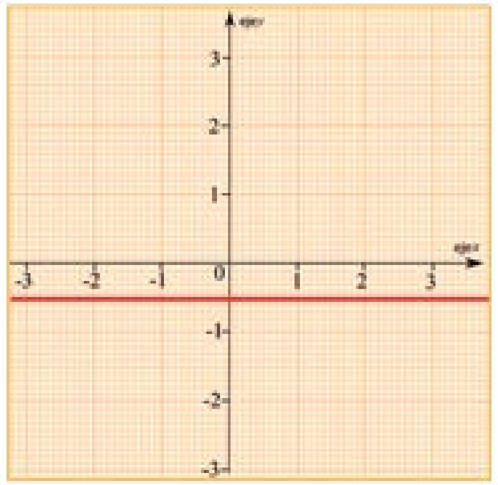
3 Construyan, con ayuda de su profesora o profesor, la ecuación y la gráfica de una función par y de una función impar.

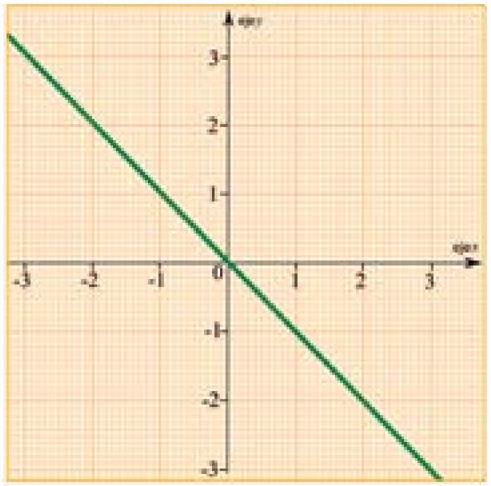
4 Obtengan datos sobre la masa (comúnmente llamado "peso") en función de la edad en un niño o niña. Representen estos datos gráficamente y determinen si esta función es creciente constante o decreciente.

5 Busquen datos sobre el número de nacimientos vivos en su comunidad en el período de tiempo que ustedes seleccionen. Construyan la gráfica correspondiente y respondan si esta función es creciente, constante o decreciente.

6 Hagan algo similar considerando las curvas que siguen:

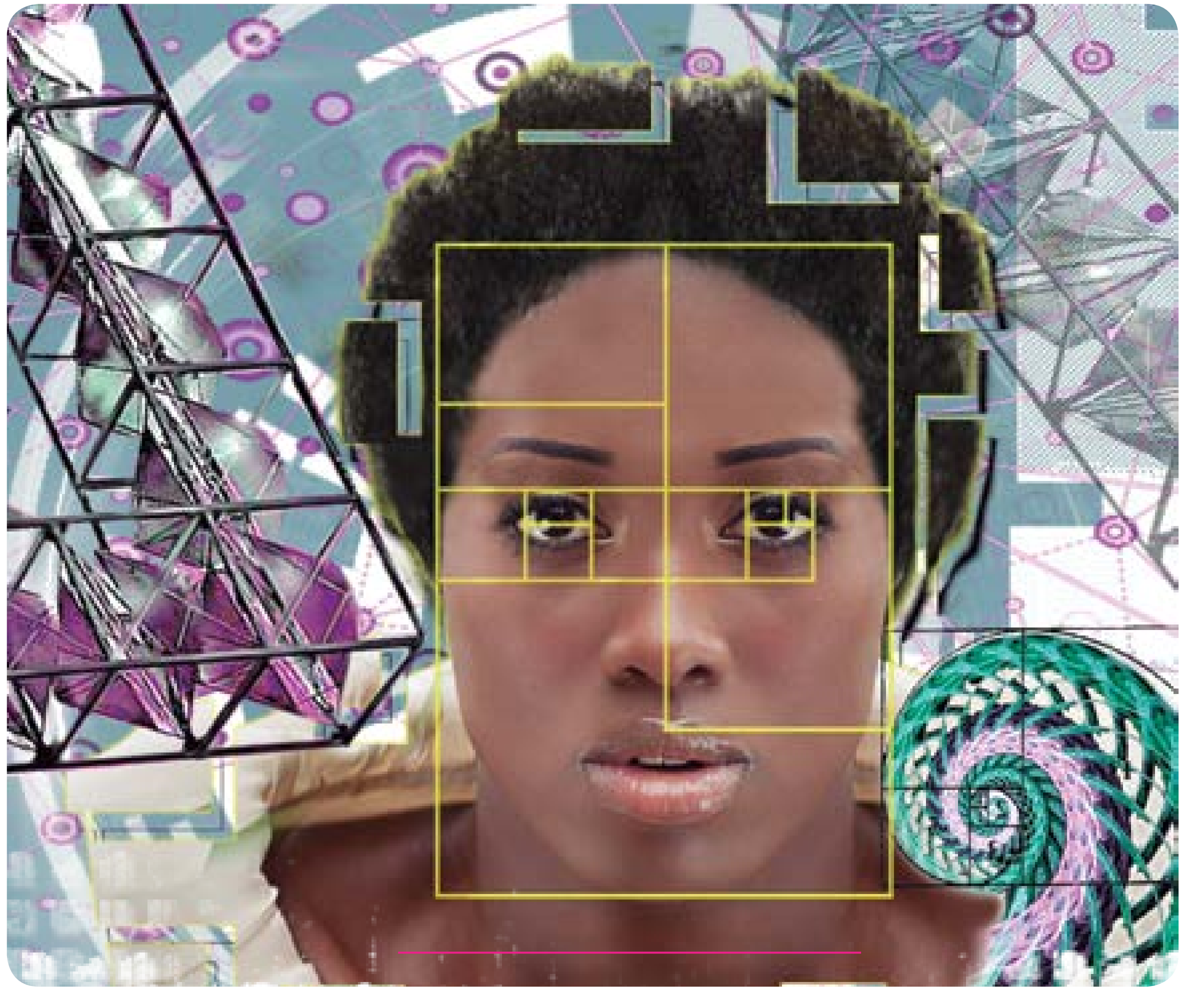

f


g


h

LA MATEMÁTICA DE LA BELLEZA

Razones y proporciones. Media geométrica. El número Phi. Semejanza, criterios y propiedades



La belleza y la imposición de un tipo de belleza

El concepto de **belleza** en la era moderna ha sido manejado publicitariamente de una forma alejada de la ética, los valores, e incluso, de la salud y educación física. Por ejemplo, algunos programas televisivos promueven, implícitamente o no, ciertos parámetros, características o medidas corporales vinculadas a un **concepto comercial de belleza**, tal es el caso de la idea del "90-60-90" como patrón para las damas o el culto al cuerpo masculino. Esta idea tergiversada de belleza representa un modelo, un mal modelo, para nuestros jóvenes, niñas y niños. Así, algunos jóvenes han buscado parecerse a estos modelos: destacándose las prótesis en los senos y en el pecho (para la mujer y el hombre, respectivamente), la decoloración y coloración artificial del cabello, la liposucción en los casos no medicados, los tratamientos a base de colágeno, entre otros.

Además, son conocidos los numerosos problemas de salud relacionados con esa búsqueda vacía de la belleza impuesta desde algunos medios. Conversen con las compañeras y los compañeros y sus docentes lo expresado en el siguiente artículo y sus implicaciones en la salud.

Radio Nacional de Venezuela informa CARACAS, viernes 6 de Enero, 2012

Prótesis PIP

"La empresa PIP sustituyó el gel sanitario por otro de uso industrial para rellenar el 75% de los implantes con la intención de obtener mayores ganancias".

Caracas.- Luego de la polémica que se ha generado por las prótesis mamarias de la fábrica francesa *Poly Implant Prothèse* (PIP) y el quiebre de dicha organización al detectarse casos de usuarias con cáncer de mama, así como una tendencia a la ruptura de las mismas por estar fabricadas con un material de uso industrial y no médico, diversas personas cuestionan los abusos de la cirugía estética.

El pasado miércoles, el presidente de la República, Hugo Chávez Frías, hizo un llamado al Ministerio del Poder Popular para la Salud a realizar un seguimiento al caso y a estar alerta, así como a la población femenina a reflexionar sobre el tema. "Tengan cuidado, porque primero le meten en la cabeza que necesitan eso para ser bellas (…). Hay que decirles que para alcanzar la belleza no es indispensable tener unas prótesis", afirmó. Asimismo, atribuyó el boom de la cirugía estética mamaria al capitalismo, que busca mercantilizar la salud y degenerar ideas acerca de la belleza femenina. "Hay veces que hay padres que les regalan a sus hijas (una cirugía de implantes mamarios) cuando cumplen 15 años. Un llamado a pensar un poquito, eso es parte de la publicidad capitalista", dijo.

En esta lección estudiaremos la belleza del cuerpo humano, tanto de la mujer como del hombre, desde un punto de vista matemático, basados precisamente en un importante número que ya tratamos en la segunda lección, el número de oro:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El cual corresponde a la inicial en griego de *Phidias* creador del Partenón (*Phi*, Ø). Y desde allí abordaremos las ideas de razón, proporción, media geométrica y semejanza.

El punto central del cuerpo humano con extremidades extendidas

Leonardo Da Vinci en sus investigaciones anatómicas, consideró los análisis hechos por el arquitecto romano Marcos Vitruvius Pollio.

Marcos Vitruvius Pollio: "en el cuerpo humano el punto central es, naturalmente, el ombligo. Ya que si se coloca un hombre estirado, con manos y pies extendidos, y con un compás centrado en el ombligo, los dedos de manos y pies tocarán la circunferencia del círculo que describen desde el mismo".

Leonardo Da Vinci: "has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo".

Estos dos investigadores expresaron que el punto central del cuerpo humano es el ombligo: si se coloca una mujer o un hombre, con manos y pies extendidos (tal como muestra el *gráfico* 1), los dedos de manos y pies tocarán la circunferencia que se describe.

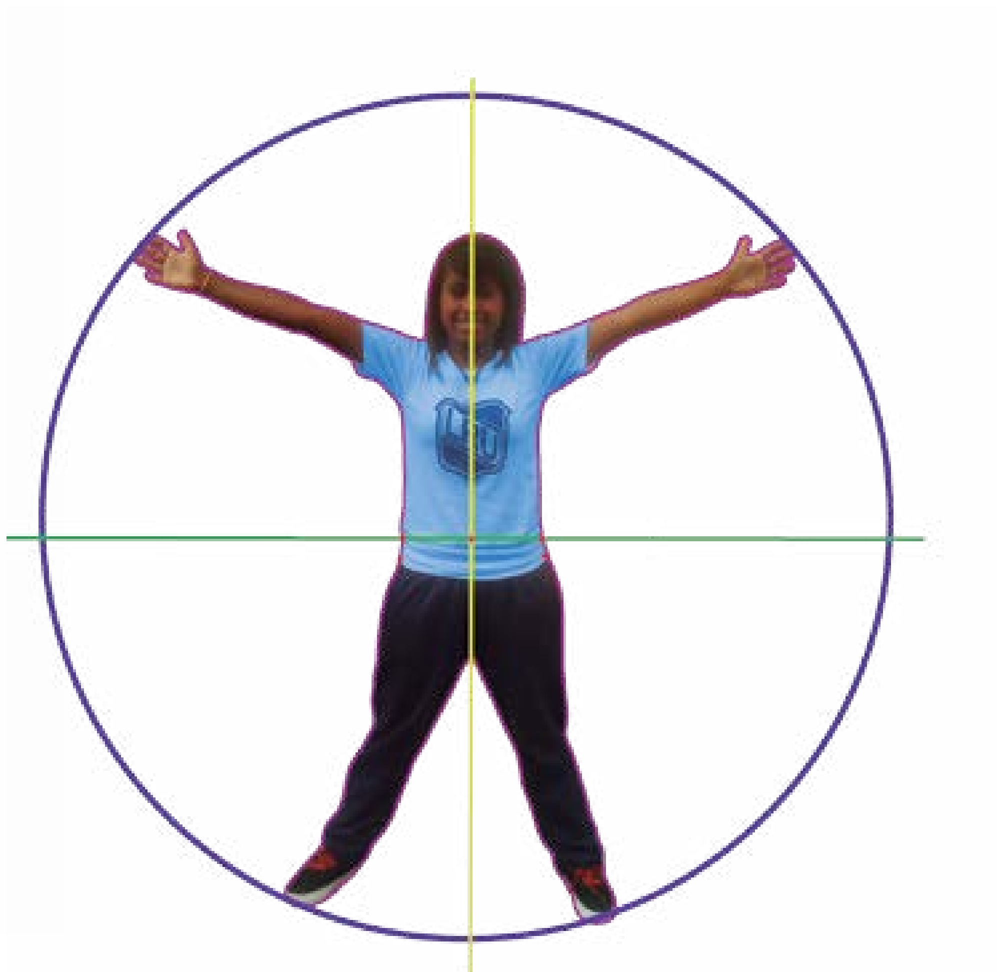


Gráfico 1

Actividades

Les proponemos desarrollar colectivamente las actividades que siguen:

- Elijan a un compañero o compañera y según lo descrito por Vitruvio y Da Vinci, midan las distancias desde su ombligo hasta cada una de sus extremidades extendidas (tal como en el *gráfico* 1.
- Realicen un dibujo (a escala) de esta persona, indicando en el mismo las diversas medidas obtenidas.
- Conversen con sus compañeros y compañeras ¿qué se puede concluir con respecto a los resultados de esas medidas?

El cuadrado y el cuerpo humano

Veamos ahora otro aspecto que muestra otra importante característica de nuestro cuerpo.

- Para ello, elijan a una compañera o compañero (éste debe colocarse tal como se muestra en el *gráfico* 2) y midan la distancia entre el dedo medio de una de sus manos y el dedo medio de la otra mano. Además, midan su altura.
- Comparen estas medidas y conversen sus conclusiones.

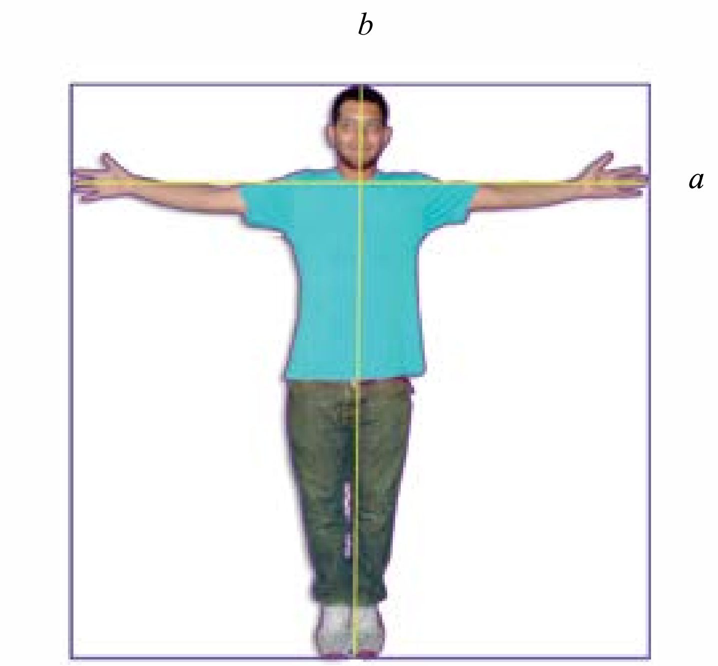


Gráfico 2

Hasta ahora hemos mostrado dos patrones que se verifican en el cuerpo humano, tanto en la mujer como en el hombre. La verdadera belleza no radica entonces en la fisonomía o en los estereotipos, sino en las propiedades matemáticas de nuestro cuerpo. Pero sigamos ahondando en este apasionante tema.

La razón entre mi estatura y la distancia del piso a mi ombligo

En la lección 2 de este libro, titulada “dibujando con los antiguos”, se hizo referencia al número **φ**, conocido como el número de oro, y se presentó una tabla con unos datos obtenidos en el municipio Montes del estado Sucre. Queremos invitarlos a realizar una actividad similar y ver si ese número también puede ser obtenido con datos tomados de sus cuerpos. Para ello, reúnanse en grupo de cinco estudiantes. Procedan a medir con una cinta métrica la estatura, en centímetros, de cada uno de ustedes. Luego midan la altura, en centímetros, que hay desde el ombligo de cada uno de ustedes hasta el piso. Después calculen el cociente o razón que se tiene entre esas dos cantidades (con al menos cuatro cifras decimales). Pueden ayudarse utilizando una calculadora. Recuerden que:

La **razón** es una comparación entre dos cantidades y esa comparación se representa mediante un cociente o división.

Pueden registrar sus resultados, en sus cuadernos, en una tabla como la siguiente:

E_n: estudiante	A: altura (cm)	DOP: distancia del ombligo al piso (cm)	$\frac{A}{DOP}$

Conversen con sus compañeras y compañeros el valor de los cocientes obtenidos para cada una de las razones. ¿Tienen alguna similitud esos valores entre sí? Ustedes, seguramente, han obtenido valores que, en la mayoría de los casos pueden estar alrededor del valor $1{,}6\ cm$. Si hubiesen continuado dividiendo, probablemente, habrían obtenido una gran cantidad de cifras decimales. El número al cual se aproxima esta razón es el número de oro (*Phi*), el cual denotamos como sigue:

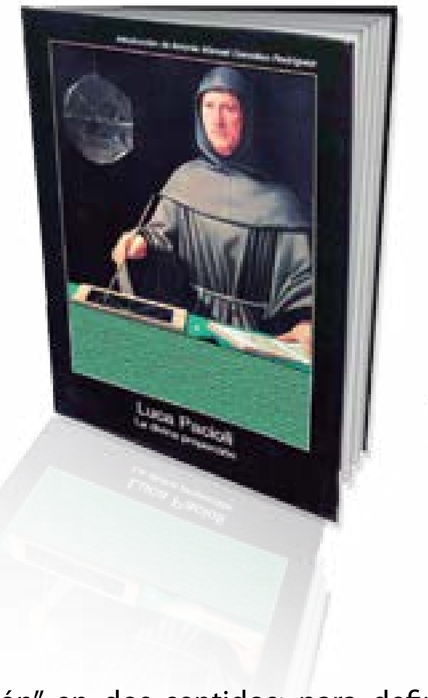
$$\varphi = 1{,}618033988749894\ldots$$

Este número, como vimos en la lección citada, es irracional.

Con la actividad realizada por ustedes podemos afirmar que por más diferentes que nos veamos, nos aproximamos a un lenguaje natural que se manifiesta, a través de las proporciones de nuestro cuerpo, en el número *Phi*. Y son esas diferencias las que nos sumergen en un universo maravilloso de matices y contrastes, inherentes a cada ser humano.

¡En cada uno de nosotros hay belleza! Tal y como señala Vitruvio Pollio en su libro De Architectura (25 *a.n.e*):

“…las medidas del cuerpo humano han sido dispuestas por la naturaleza, valorarlas y no desfigurarlas es el fin”.



Ese interesante número irracional, como es *Phi* (φ), también recibe los nombres: “Número Áureo”, “Proporción Áurea” o “Razón Áurea”. En un libro que se publicó en Italia, a principios del siglo XVI (décimo sexto), se le denominó, la “Divina Proporción”.

Proporciones

En nuestra vida diaria, utilizamos la palabra “proporción” en dos sentidos: para definir la relación comparativa que establecemos entre las partes de algo en relación con el tamaño o la cantidad, o cuando describimos una relación armónica entre diferentes partes de un todo. En Matemática ya hemos estudiado que:

Una **proporción** es una igualdad de dos razones.

Es decir, en la actividad realizada por ustedes, para establecer la razón entre la altura de una persona y la distancia del piso a su ombligo, si llamamos A_1 a la altura del primer estudiante y DOP_1 es su distancia del ombligo al piso, y A_2 y DOP_2 las medidas del segundo estudiante, asumiendo que los cocientes obtenidos son iguales, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{A_1}{DOP_1} = \frac{A_2}{DOP_2}$$

En una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a los términos a y d los denominamos **extremos** y a los términos b y c los denominamos **medios**.

Además recordamos que en una proporción se cumple lo siguiente:

El producto de los valores de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.
Es decir, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$.

Conociendo algo más de las proporciones

Dada la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ¿si sumamos 1 en ambos lados de la igualdad, a qué conclusión podemos llegar? Dada la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ¿si restamos 1 en ambos lados de la igualdad, a qué conclusión podemos llegar? Ustedes deben haber conversado con sus compañeras y compañeros que a partir de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ también se cumple que:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

y que,

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Con el conocimiento que han desarrollado sobre ecuaciones pueden llegar a esas conclusiones sin necesidad de memorizarlas. Ustedes mismos pueden hacer esas deducciones y aplicarlas cuando sean necesarias.

Consideremos ahora la siguiente proporción: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. A partir de ella, realicen y expresen la igualdad que resulta de multiplicar los términos extremos y los términos medios. ¿Qué se obtiene? Deben haber obtenido que se cumple: $a \cdot c = b \cdot b$. Aplicando lo que conocemos acerca de potenciación, de la propiedad simétrica de las igualdades y de radicación deben llegar a lo siguiente:

$$b=\sqrt{a \cdot c}$$

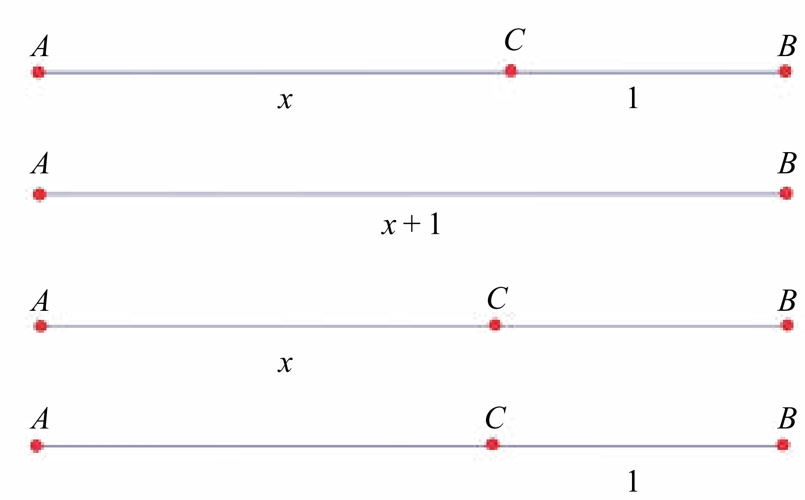
Entonces definimos que b es la **media geométrica** entre a y c. Lo cual lo expresamos como $b=\sqrt{a \cdot c}$

Una manera de obtener el número irracional $\varphi = 1{,}618033988749894\ldots$

En la lección 2 de este libro estudiamos una forma de construir el número de oro. A lo largo de la aventura matemática recorrida por ustedes, han adquirido nuevas herramientas. Haciendo uso de ellas podemos ver una manera alternativa de obtener φ. Utilizaremos el concepto de proporción y sus conocimientos acerca de la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Para encontrar el valor de φ, es importante observar la figura y considerar lo siguiente:

Siendo la longitud de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ iguales a x y 1 respectivamente, es decir, $AC = x$ y $CB = 1$, decimos que: si la proporción de $x+1$ (longitud del segmento $\overline{AB}$) a x es la misma que de x a 1, entonces el segmento ha sido dividido en proporción media y extrema razón.



Por lo tanto, al sustituir en la expresión $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$ las longitudes de cada uno de los segmentos, tenemos que: $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$. Multipliquen ambos miembros por x: $(x)\left(\frac{x+1}{x}\right)=\left(\frac{x}{1}\right)(x)$ para obtener una ecuación de segundo grado, como la siguiente:

$$x+1=x^2$$

¿Qué resulta si restamos $x + 1$ a ambos miembros de la igualdad?

Nos queda: $x^2-x-1=0$ y recordando que las ecuaciones cuadráticas son del tipo:

$$ax^2+bx+c=0$$

Es importante considerar al momento de sustituir en la ecuación general de segundo grado $x=\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}$, los coeficientes a y b, y el término independiente c. Observemos que la ecuación general de segundo grado tienes dos soluciones indicadas por el signo "±", por lo tanto la ecuación para cada una de las soluciones son las siguientes: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b-4ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b-\sqrt{b-4ac}}{2a}$
En la ecuación de segundo grado para encontrar a phi: $x^2-x-1=0$, tenemos que: $a=1$, $b=-1$ y $c=-1$.

Si sustituimos esos valores en la ecuación general, ¿cuáles son las soluciones?

Deben haber obtenido las siguientes soluciones:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{1-\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

¡Verifiquen que son las soluciones correctas de la ecuación de segundo grado que se ha planteado!

La solución x_1 (positiva), nos revela el número obtenido de la **proporción media** y **extrema razón** entre $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$. Este **número irracional** resultante, determinado por la mitad de la suma de $1+\sqrt{5}$, está presente en la medida de nuestros cuerpos, y resulta ser, efectivamente, **φ**= 1,618033988749894…, es decir:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033988749894...$$

Esa expresión es similar a la que se había obtenido a través de la construcción que hiciste en la lección 2.

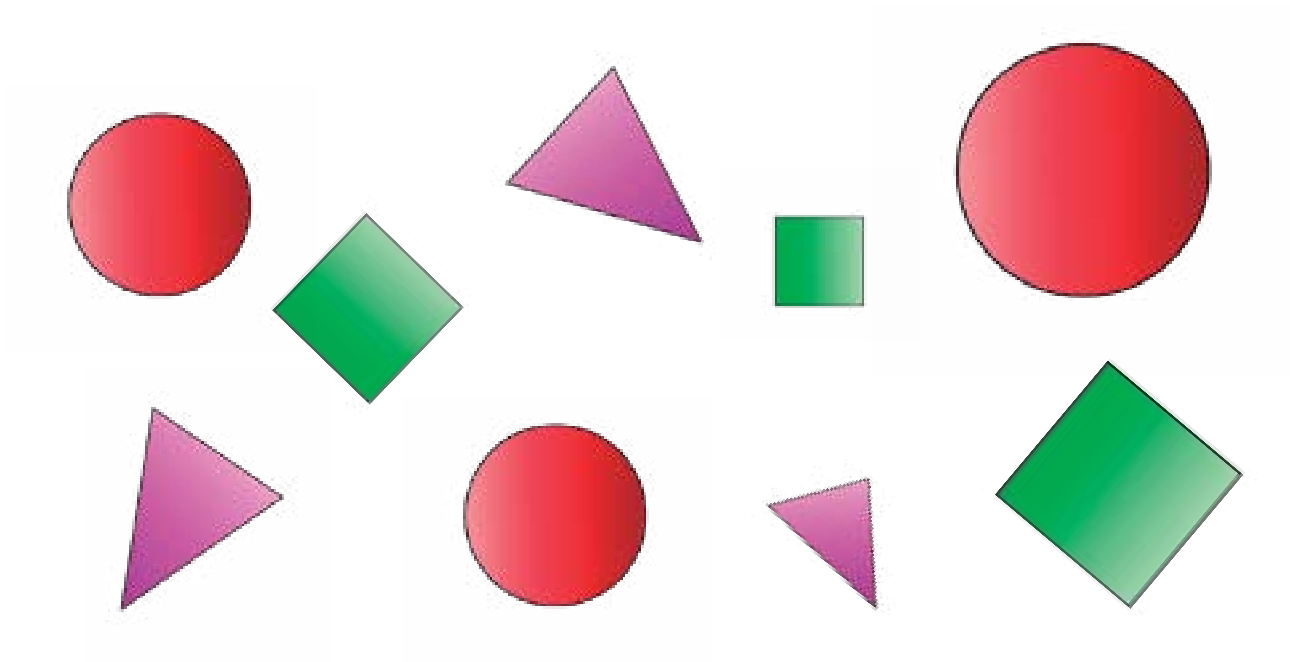
¿Por qué no consideramos la otra solución?

Semejanza de figuras

A través de las diferentes actividades que hemos hecho a lo largo de esta lección, vimos que los seres humanos nos parecemos, a pesar de tener diferencias; por ejemplo: unos tienen una mayor estatura que otros, sin embargo, utilizando las medidas de nuestro cuerpo vemos que compartimos proporciones que se asemejan. Es decir, tenemos semejanzas, de hecho nos referimos a otras personas como nuestros semejantes.

Coloquialmente hablando, dos figuras cualesquiera son semejantes si cambian su tamaño y orientación, pero no se altera su forma. Los artistas plásticos han utilizado figuras semejantes en sus creaciones, así como ingenieros, arquitectos y otros profesionales.

En particular en Matemática, nos interesan las semejanzas de figuras geométricas. Por ejemplo, en las siguientes figuras geométricas hay grupos que son semejantes:



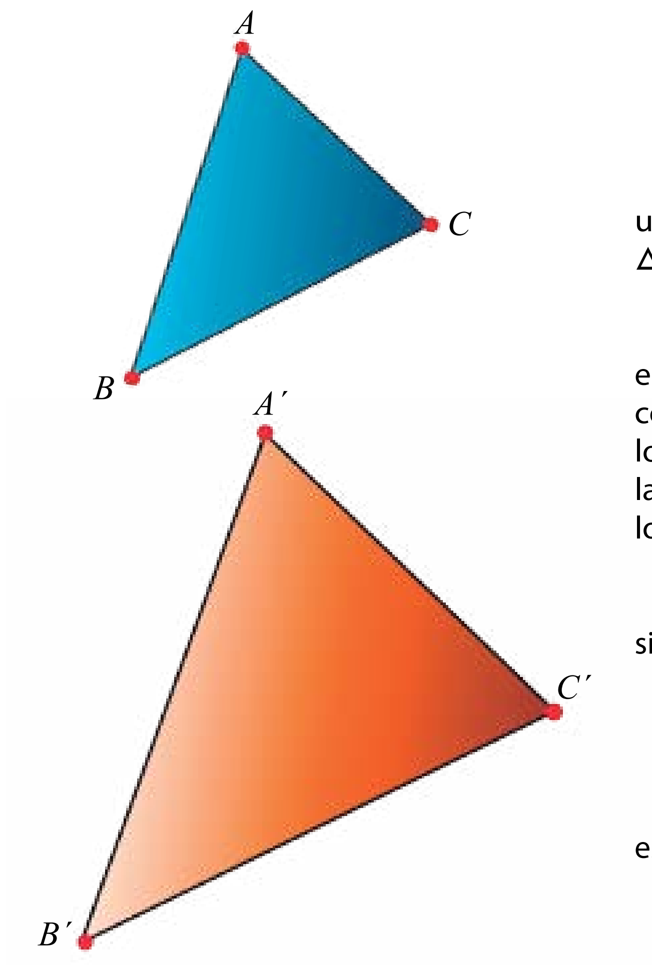
Una manera alternativa de expresar que dos figuras son semejantes es que una de ellas sea un modelo idéntico, a escala de la otra. Por tanto, podemos obtener un factor de escala entre ambas.

Semejanza de triángulos

En la construcción, así como en el arte, es común el uso de estructuras construidas a base de figuras geométricas semejantes y de estas el triángulo, por su belleza, fortaleza y versatilidad cobra gran importancia.

Los triángulos resultan de gran importancia y utilidad en Matemática para estudiar su semejanza.

Abra Solar
Alejandro Otero



Consideremos un ΔABC y hagamos una ampliación del mismo que llamaremos $\Delta A'B'C'$.

Para hacer el estudio de la semejanza entre esos dos triángulos tenemos que establecer una correspondencia entre los ángulos del ΔABC con los ángulos del $\Delta A'B'C'$. Así mismo establecemos la correspondencia entre los lados respectivos de los dos triángulos.

Con la ayuda del transportador midan los siguientes ángulos:

$$\angle A, \angle B, \angle C, \angle A', \angle B', \angle C'$$

¿Cuáles pares de ángulos son congruentes?, es decir, que tienen medidas iguales.

Con la ayuda de la regla determinen la medida de los siguientes lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{A'C'}$, a partir de esas medidas, calculen las siguientes razones:

$$\frac{AB}{A'B'}, \frac{AC}{A'C'} \text{ y } \frac{BC}{B'C'}$$

¿Qué pueden concluir a partir de las razones obtenidas? De los resultados obtenidos podemos afirmar lo siguiente:

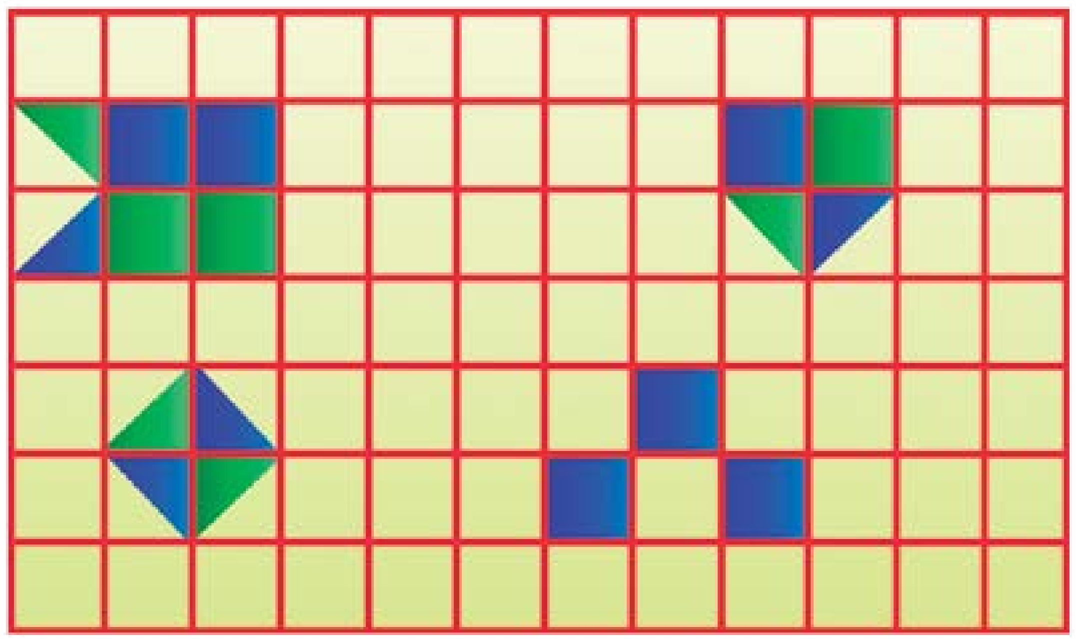
Dada la correspondencia entre dos triángulos, si los ángulos correspondientes son congruentes, y los lados correspondientes son proporcionales entonces los triángulos son **semejantes.**

La afirmación anterior la podemos escribir matemáticamente de la manera siguiente:

ΔABC es semejante al $\Delta A'B'C'$, que se denota $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, si y solamente si $\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

Actividades

1 En una hoja de papel milimetrado tracen las figuras que tengan lados tres veces mayores que los de la figura siguiente y que estén coloreadas de manera similar.



2 Construyan dos triángulos, uno con lados de: $1\ cm$, $1{,}5\ cm$ y $2\ cm$ y, otro con lados $4\ cm$, $6\ cm$ y $8\ cm$ de longitud respectivamente. Emitan una conjetura acerca de la semejanza de triángulos que sólo tienen lados proporcionales.

3 En un día soleado salgan y midan alturas de objetos y de sus sombras. Usen los datos reunidos por el grupo y construyan las gráficas correspondientes. ¿Qué concluyen?

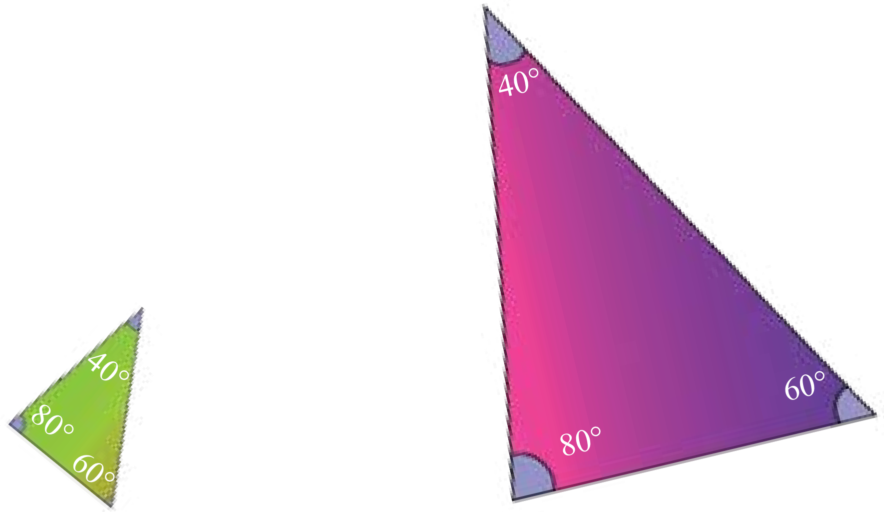
4 ¿Dos cubos son semejantes? Justifiquen su respuesta. ¿Y dos esferas de distinto radio?

Criterios para la semejanza de triángulos

Una pregunta que surge cuando necesitamos determinar la semejanza entre triángulos es la siguiente: ¿será necesario medir todos los ángulos para determinar la congruencia entre ellos y medir todos los lados para ver la proporcionalidad entre los mismos?

Consideremos un ejemplo para tratar de dar respuesta a esa pregunta:

Se tienen dos triángulos cuyos ángulos miden $80°$, $60°$ y $40°$, conocemos que el lado opuesto al ángulo de $80°$ mide 6 unidades de largo en el primer triángulo y 2 unidades de largo en el segundo.



Al observar la figura anterior, vemos que esos triángulos tienen la misma forma. ¿Qué conclusión pueden obtener? ¿Son los dos triángulos semejantes? ¿Cómo son los pares de ángulos correspondientes? Podemos conjeturar entonces, que si los ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes entonces los triángulos son semejantes.

Tracen un par de triángulos en donde sus ángulos correspondientes sean congruentes y sus lados correspondientes de diferentes medidas. ¿Qué conclusión pudieron obtener?

Afirmamos entonces que esa proposición, en general, siempre es verdadera. Esa es la propiedad **Ángulo**, **Ángulo**, **Ángulo** para la semejanza de triángulos. Esa propiedad la abreviamos como AAA, por la inicial de la palabra ángulo y podemos utilizarla como un **criterio** para determinar la **semejanza entre dos triángulos**. En general podemos afirmar que:

Dada la correspondencia entre dos triángulos, si los ángulos correspondientes son congruentes entonces los triángulos son **semejantes**.

La afirmación anterior la podemos escribir matemáticamente de la manera siguiente:

ΔABC es semejante al $\Delta A'B'C'$, que se denota $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, si $\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$.

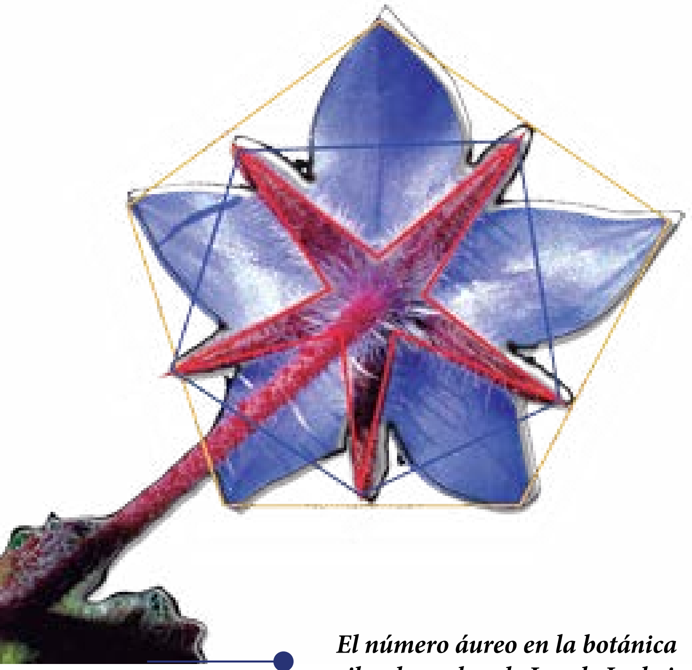
Con lo que conocemos hasta ahora podríamos preguntarnos si necesitamos medir todos los ángulos de dos triángulos para determinar su semejanza. Para ello te invitamos a discutir con tus compañeras y compañeros las siguientes preguntas:

- Si conocemos las medidas de dos ángulos cualesquiera de un triángulo, ¿podemos determinar la medida del tercer ángulo? Justifiquen su respuesta.

- En función de su respuesta anterior, si dos ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo, ¿qué podemos afirmar del tercer par de ángulos correspondientes? En consecuencia, ¿nos bastará con conocer si dos ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo para afirmar que son triángulos semejantes?

- Con sus respuestas planteen una proposición al respecto.

Esa proposición que han hecho, en general, siempre es verdadera. Esa es la propiedad **Ángulo, Ángulo** para la semejanza de triángulos. Esa propiedad la abreviamos como AA. Esta proposición es consecuencia de la anterior proposición AAA, en Matemática esto se conoce con el nombre de **Corolario.**



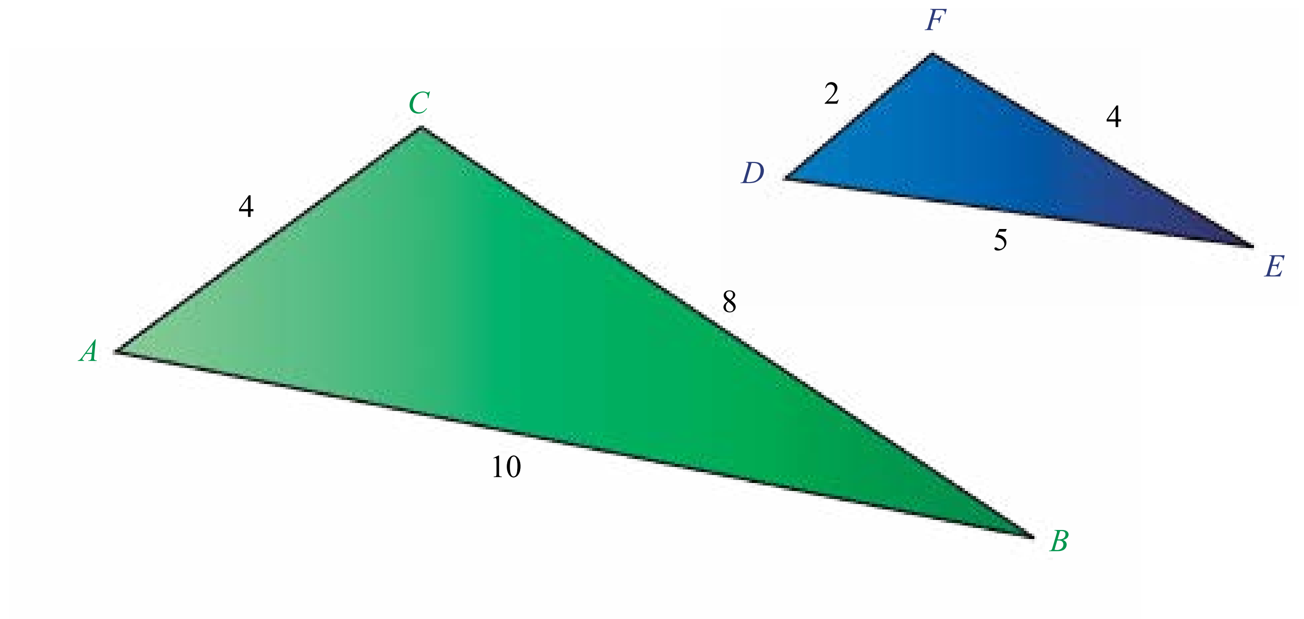
El número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwing

En general podemos afirmar que:

Dada la correspondencia entre dos triángulos, si dos ángulos de uno de los triángulos son congruentes con los dos ángulos correspondientes del otro triángulo entonces los triángulos son **semejantes**.

En Arquitectura e Ingeniería, para la construcción adecuada y eficiente de puentes, edificios, entre otras construcciones, además de la estética y belleza de la obra, muchas veces se deben preservar las proporciones. Así, los profesionales que desarrollan este tipo de obra deben contar con formas apropiadas y eficientes de discernir si dos figuras triangulares conservan una relación de proporcionalidad entre sus lados correspondientes.

Observen el siguiente par de triángulos:



A partir de ellos determinen las siguientes razones:

$$\frac{AC}{DF}, \frac{AB}{DE} \text{ y } \frac{CB}{FE}$$

- ¿Qué pueden afirmar con respecto a las tres razones obtenidas?
- ¿Será cierto que los ángulos correspondientes entre los dos triángulos dados son congruentes?
- ¿Qué podemos concluir? ¿Son semejantes los dos triángulos?

Afirmamos entonces que se cumple la propiedad **Lado**, **Lado**, **Lado** para la semejanza de triángulos. Esa propiedad la abreviamos como LLL, por la inicial de la palabra lado y podemos utilizarla como un criterio para determinar la **semejanza entre dos triángulos**.

En general, podemos afirmar lo siguiente:

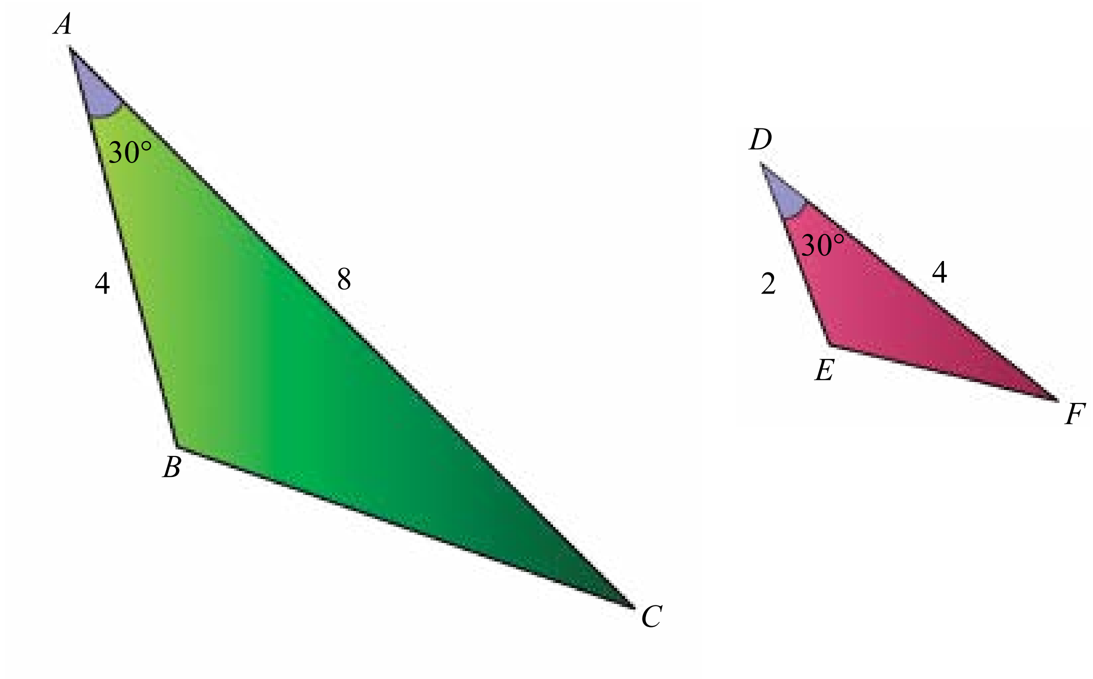
Dada la correspondencia entre dos triángulos, si los lados correspondientes son proporcionales entonces los triángulos son **semejantes**.

La afirmación anterior la podemos escribir matemáticamente de la manera siguiente:

ΔABC es semejante al $\Delta A'B'C'$, que se denota $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, si $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

Actividades

1 Vamos a considerar otro criterio que nos permita determinar la semejanza entre dos triángulos, para ello observemos los siguientes triángulos:



A partir de ellos determinen las siguientes razones:

$$\frac{AB}{DE} \text{ y } \frac{AC}{DF}$$

- ¿Es cierto que se establece una proporción entre esas dos razones?
- ¿Cómo son, entre sí, el ángulo comprendido entre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del ΔABC, y el ángulo comprendido entre los lados $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ del ΔDEF?

Con base en sus respuestas, podemos afirmar que tenemos otro criterio que nos permite determinar la semejanza entre dos triángulos. Esa propiedad se conoce como **Lado**, **Ángulo**, **Lado** para la semejanza de triángulos y la abreviamos como ***LAL***, por la inicial de las palabras lado y ángulo y es utilizada como un criterio para determinar la semejanza entre dos triángulos.

En general, podemos afirmar lo siguiente:

Dada la correspondencia entre dos triángulos, si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes comprendidos entre esos dos lados son congruentes, entonces los triángulos son **semejantes**.

La afirmación anterior la podemos escribir matemáticamente de la manera siguiente:

ΔABC es semejante al ΔDEF, que se denota $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$.

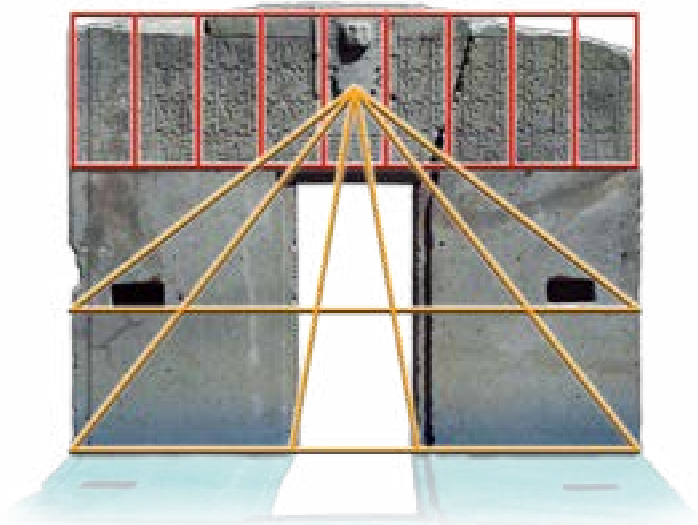
10

HERMOSAS PROPORCIONES

Teoremas de Euclides: del cateto y de la altura. Teorema de Thales

La proporcionalidad

En la lección anterior, "La Matemática de la Belleza", hemos podido apreciar la importancia que tiene, no sólo en Matemática sino en la vida cotidiana, el concepto de proporcionalidad. Una de las habilidades más importantes que posee el ser humano, es la de percibir relaciones y proporciones. Esta habilidad se hace indispensable para artistas plásticos, quienes necesitan saber, percibir y distinguir, como decimos coloquialmente, los árboles del bosque. En las llamadas bellas artes, dibujos, pinturas, esculturas, en fin, en las artes plásticas en general, la proporcionalidad ha jugado un papel muy importante en su desarrollo, se trate de realismo, impresionismo o arte abstracto. Pero también la proporcionalidad permite realizar estimaciones de tamaño, habilidad indispensable para aquellos que ejercen profesiones como odontología y mecánicos dentales, así como, cirujanos, sastres y por supuesto ingenieros y arquitectos.



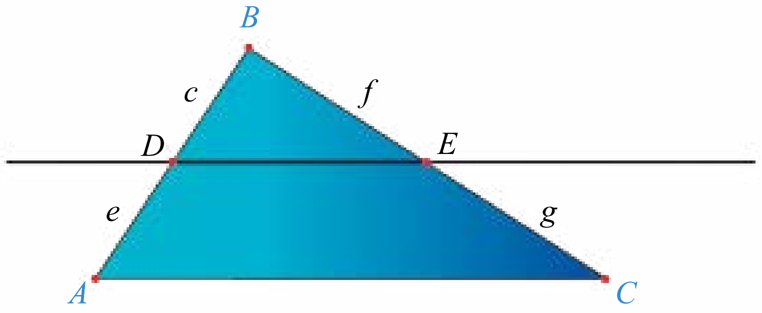
La Puerta del Sol de Tiwanaku
Bolivia

En el caso de la Matemática, hemos visto que los triángulos son figuras geométricas que resultan de gran importancia y utilidad en Matemática para estudiar tanto su congruencia como su semejanza. Utilizando las ideas de proporción y semejanza, los matemáticos a lo largo de la historia de la humanidad han podido formular una serie de proposiciones que han permitido relacionar triángulos semejantes con propiedades referidas a las proporciones.

En esta lección queremos invitarles a hacer parte de ese recorrido para que nos acompañen en la construcción de algunas de esas proposiciones.

El Teorema Fundamental de la Proporcionalidad: el teorema de Thales

Consideremos el siguiente triángulo:



En el triángulo de la figura se tiene la condición de que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$. A partir de esa condición respondan las siguientes preguntas, justificando cada una de sus respuestas:

- ¿Cómo son las medidas de los $\angle BDE$ y $\angle BAC$? ¿Son congruentes esos dos ángulos?
- ¿Cómo son las medidas del $\angle ABC$ y del $\angle DBE$? ¿Son congruentes esos dos ángulos?
- ¿Qué podemos afirmar sobre los ΔABC y ΔDBE ?

A partir de tus respuestas, deben haber llegado a la conclusión de que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.

En consecuencia, podemos afirmar que: $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$. Esto lo decimos con base en que si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales.

Las longitudes de cada uno de esos segmentos pueden ser expresadas como sigue:

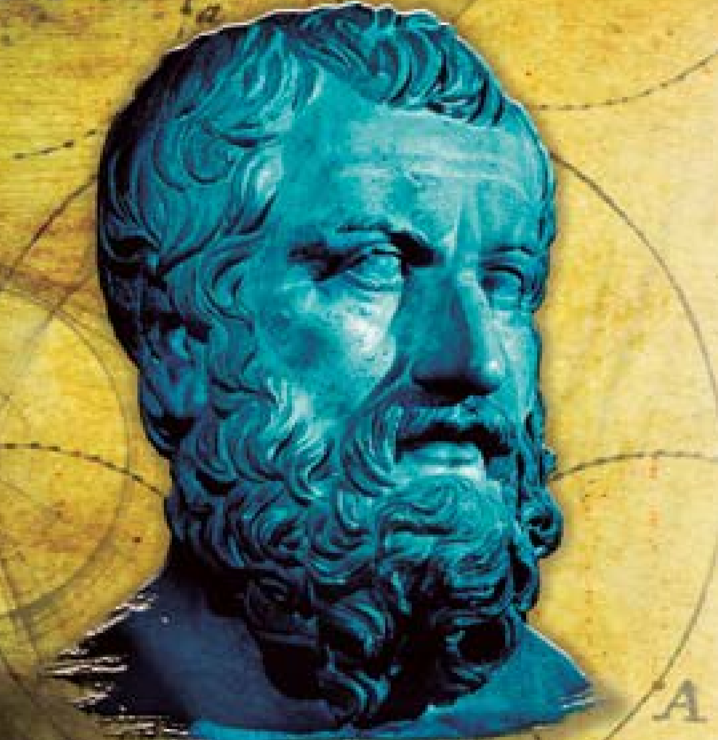
$$BA = c + e$$
$$BD = c$$
$$BC = f + g$$
$$BE = f$$

En consecuencia, la proporción $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{c+e}{c} = \frac{f+g}{f}$$

Realizando las respectivas operaciones y aplicando propiedades de la adición y de las proporciones tendremos:

$\frac{c}{c} + \frac{e}{c} = \frac{f}{f} + \frac{g}{f}$	Descomponiendo cada lado de la igualdad en dos fracciones
$1 + \frac{e}{c} = 1 + \frac{g}{f}$	Simplificando mediante la fracción unidad
$\frac{e}{c} = \frac{g}{f}$	Elemento simétrico de la adición, sumamos (-1) en ambos lados de la igualdad
$e \cdot f = g \cdot c$	Multiplicando ambos lados de la igualdad por $f \cdot c$
$\frac{c}{e} = \frac{f}{g}$	Dividendo ambos lados de la igualdad por $g \cdot e$ y aplicando propiedad simétrica de las igualdades



El resultado al cual hemos arribado es conocido como el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad o **teorema de Thales**, el cual puede ser expresado de la siguiente manera:

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca los otros dos lados en puntos distintos entonces divide a esos lados en segmentos que son proporcionales.

Thales fue un filósofo y matemático griego que nació en Mileto (Jonia), ciudad situada a las orillas del Mar Egeo, alrededor del año 630 a.n.e. y murió hacia el año 546 a.n.e. Fue considerado uno de los Siete Sabios de Grecia. Su filosofía, basada en la razón, se interesó por el estudio del universo y de la naturaleza.

Si consideramos el triángulo dado también se puede afirmar que si $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$ entonces se cumple que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$. Esto es lo que se conoce en Matemática como el recíproco del teorema.

En consecuencia, también podemos afirmar que:

Si una recta intersecta dos lados de un triángulo y divide esos lados en segmentos que son proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado.

En la Historia de la Matemática se reseña que se le acredita a Thales de Mileto la obtención de la altura de la Gran Pirámide de Egipto usando las razones que relacionaban sombras. Les invitamos a utilizar esa idea para la siguiente actividad.

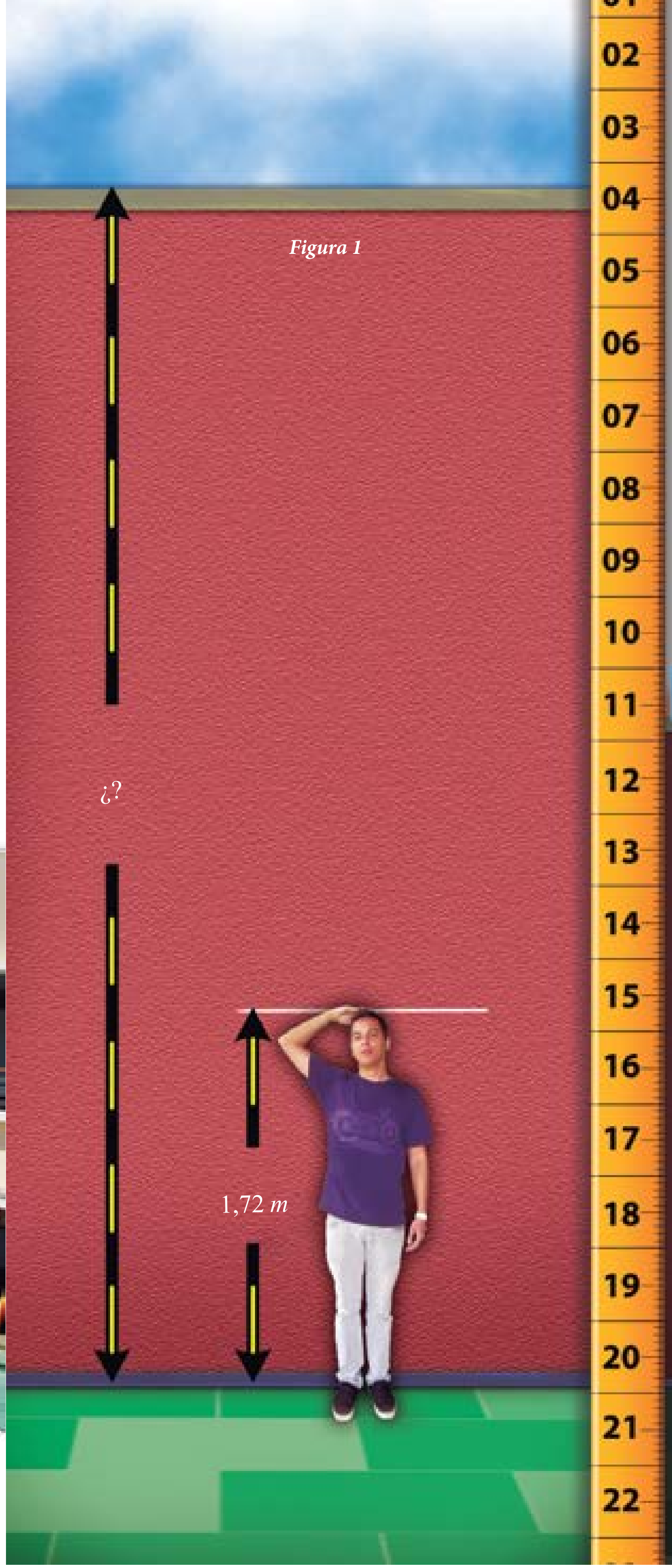
Recuperando espacios escolares

Producto de las lluvias y el sol, en ocasiones algunos espacios de nuestras instituciones se van deteriorando. La participación de la comunidad en el mantenimiento y la recuperación de los mismos es importante. Son nuestros espacios y con ellos nos beneficiamos todos los miembros de la colectividad. Algunos estudiantes de liceo, conjuntamente con sus profesoras, profesores y miembros de los consejos comunales, se han propuesto recuperar los espacios de las instituciónes escolares de su comunidad.

A nosotros nos toca recuperar algunas paredes de la institución en donde estudiamos. Iniciamos por una de las paredes exteriores (*figura 1*). Debemos presentar el presupuesto para comprar la pintura y se hace necesario calcular el área de la misma. No contamos de inmediato con una escalera pero sabemos que la pared tiene $20\ m$ de largo y nos hace falta la medida de su altura.

A veces no tenemos todas las herramientas para completar una tarea y se hace necesario implementar ideas que permitan resolver una situación problemática. En muchos de esos casos tenemos que acudir a la geometría, como es el caso que nos han encomendado. ¿Cómo podríamos hacer para determinar la altura de la pared que vamos a recuperar?

Liceo Libertador
estado Mérida



Calculando la altura de la pared

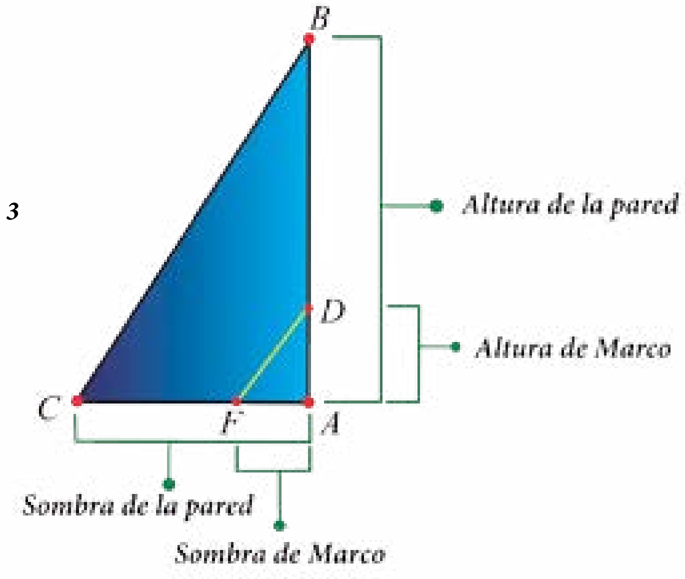
Para resolver el problema del cálculo del presupuesto de la pintura, hace falta calcular el área de la pared. Como no tenemos una escalera para medir su altura, les toca a ustedes determinarla con los datos que hemos obtenido y que a continuación se presentan. Marco, ha marcado con una tiza su altura en la pared. Marco mide $1{,}72\ m$ (*figura* 1).

A las diez de la mañana ($10{:}00\ am$) con ayuda de sus compañeras y compañeros, Marco, ha medido la sombra de la pared y ésta midió $4{,}32\ m$. A esa misma hora la sombra de Marco midió $1{,}36\ m$, como se muestra en la *figura* 2.

Revisen con sus compañeras y compañeros las siguientes interrogantes.

- ¿Son los triángulos ΔBCA y ΔDFA, representados en la *figura* 3, triángulos semejantes?
- ¿Cuáles son los ángulos correspondientes y cuáles los lados homólogos?
- ¿Cuáles son las proporciones que pueden establecerse con los datos que tienen?
- ¿Se podrá calcular con estos datos la altura de la pared?
- A nosotros nos dio que la altura de la pared es de aproximadamente 5,46 m de altura. ¿Podrían explicar cómo se obtuvo este valor? ¿Cómo aplicamos el teorema de Thales para dar con la respuesta?

Figura 3



¿Pueden ahora calcular el área de la pared?

Resolvamos problemas

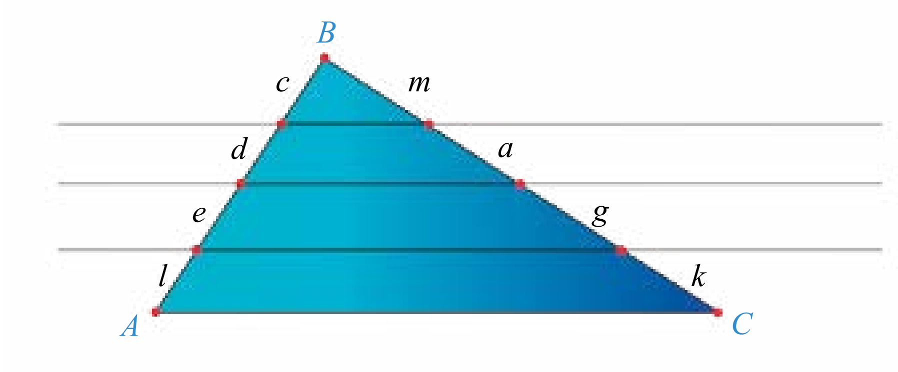
En un día de sol, un grupo de estudiantes quieren determinar la altura de un árbol. Para ello, hacen las siguientes actividades: miden la longitud de la sombra proyectada por el árbol, la cual resulta ser de 30 metros; luego una de las estudiantes camina hacia al árbol a lo largo de la sombra del mismo hasta que la punta de su cabeza toca la sombra del árbol. La altura de la estudiante es de 1,60 m y la longitud de su sombra es de 3 m. ¿Cuál es la altura, aproximada, del árbol?

Usando el método anterior determina la altura de algún árbol que esté en el patio de tu Liceo o en las cercanías.

Un rombo se inscribe en un $\Delta\, ABC$ de tal manera que uno de sus vértices coincide con A y dos de sus lados están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si $AC = 12\,cm$, $AB = 24cm$, $BC = 16\,cm$, ¿cuál es la longitud del lado del rombo?

Extendiendo el teorema de Thales

Observemos ahora el siguiente triángulo:

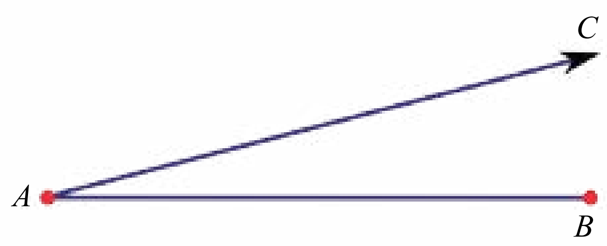


En el $\Delta\ ABC$ se tienen rectas paralelas al lado $\overline{AC}$ que intersectan a dos de los lados del triángulo, de manera que $c = d = e = l$. Verifiquen que se cumple que $m = a = g = k$. El resultado obtenido lo podemos enunciar de la siguiente manera en forma general:

> Si rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre una transversal, entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier transversal.

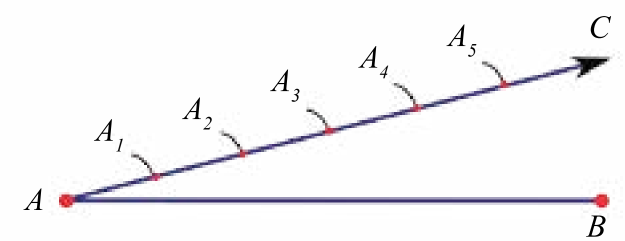
Esta última proposición la podemos utilizar para dividir un segmento dado en cualquier número de partes congruentes. En la lección 2 del presente libro estudiamos una manera de dividir un segmento en n segmentos congruentes. Ahora haremos, nuevamente esa división de un segmento utilizando el teorema que acabamos de formular. Vamos a proceder entonces, utilizando solamente una regla no graduada y un compás, a dividir un segmento $\overline{AB}$ en cinco partes congruentes:

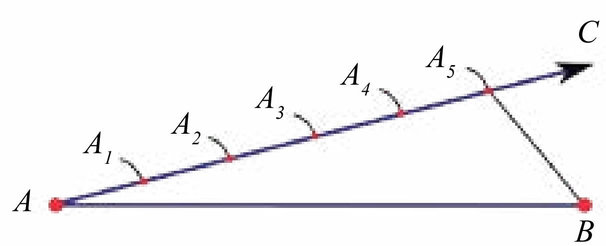
Tenemos el segmento $\overline{AB}$ para dividirlo en cinco partes congruentes.



Trazamos un rayo $\overrightarrow{AC}$ tal que A, B y C no sean colineales.

Con cualquier abertura del compás, y a partir del punto A, hacemos cinco marcas consecutivas, congruentes, sobre $\overrightarrow{AC}$.

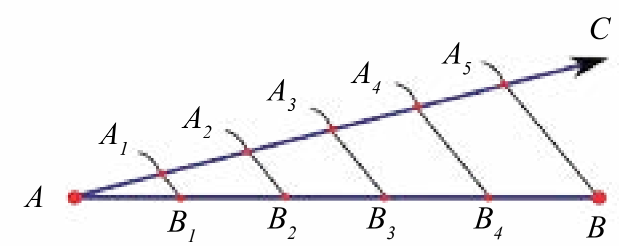




Trazamos el segmento $\overline{A_5B}$.

Por A_4, A_3, $\underline{A_2}$, A_1, se trazan segmentos paralelos a $\overline{A_5B}$.

El teorema formulado anteriormente, nos garantiza que hemos dividido el segmento $\overline{AB}$ en cinco segmentos de igual medida, es decir en cinco segmentos congruentes.



Av. Valmore Rodríguez
Upata

Delimitando terrenos

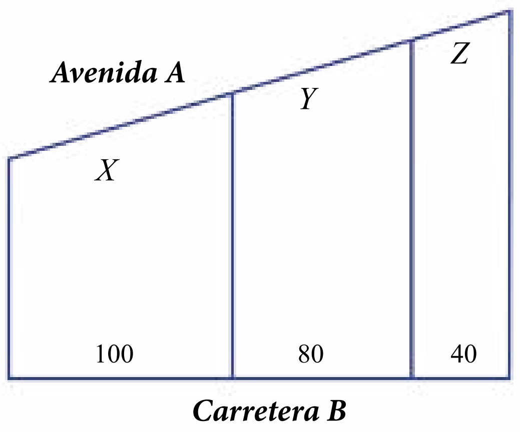


Figura 4

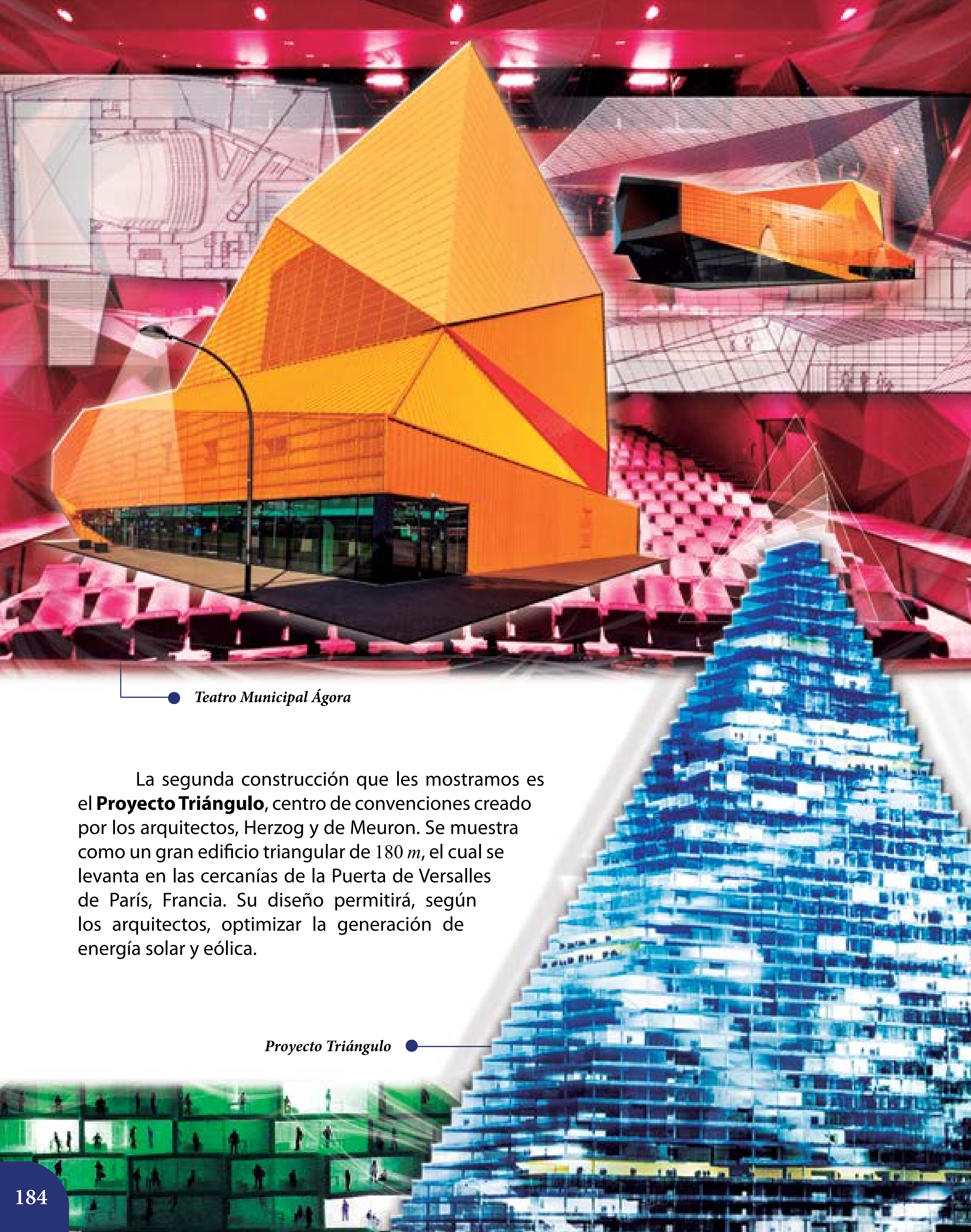
Un Consejo Comunal de la población de Upata, en el estado Bolívar, decidió repartir entre distintas familias un terreno por lo tanto tiene la tarea de hacer la medición de tres lotes de terreno que se extienden entre una Carretera, que llamaremos A, y una Avenida que denominaremos B. Los linderos, o lados límite, de cada lote son perpendiculares a la Carretera B. Ellos conocen el metraje de cada uno de los frentes que están sobre la Carretera B y saben que el frente que limita con la Avenida A tiene una extensión total de $330m$. Necesitan conocer la extensión de cada uno de los frentes de los lotes de terreno que limitan con la Avenida A.

En la *figura* 4 les presentamos un gráfico con la descripción dada, para que ustedes les ayuden a resolver la situación planteada.

Semejanzas en los triángulos rectángulos

El uso de los triángulos en el diseño y la construcción, bien por su belleza o utilidad, ha llevado a arquitectos, no sólo a mantenerlos presentes en sus estructuras, sino a hacerlos protagonistas de sus trabajos. Les presentamos dos ejemplos de arquitectura contemporánea, en donde el triángulo ocupa un lugar preponderante.

El primero de ellos, el ***Teatro Municipal Ágora***, en la ciudad de Lelystad, Holanda el cual se yergue majestuoso desde 2007. Creado por el arquitecto Ben van Berkel, quien coloca al triángulo como el gran protagonista, el exterior va mostrando múltiples perspectivas, presentando rasgos diferenciados y en su interior se colocaron placas triangulares superpuestas en diferentes ángulos.

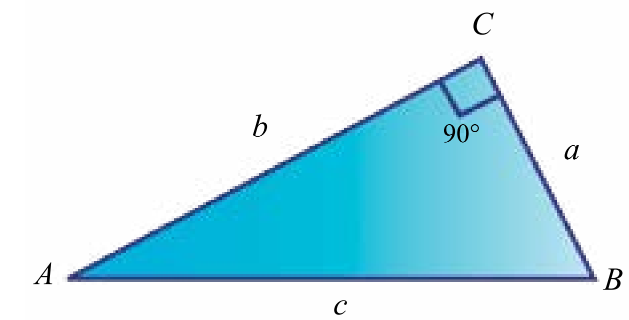


Teatro Municipal Ágora

La segunda construcción que les mostramos es el **Proyecto Triángulo**, centro de convenciones creado por los arquitectos, Herzog y de Meuron. Se muestra como un gran edificio triangular de $180\ m$, el cual se levanta en las cercanías de la Puerta de Versalles de París, Francia. Su diseño permitirá, según los arquitectos, optimizar la generación de energía solar y eólica.

Proyecto Triángulo

Aprendamos entonces a dibujar estos polígonos tan útiles como estilizados. Veamos el caso de los triángulos rectángulos.



Dibujen un triángulo ΔABC, rectángulo en C, es decir que el ángulo recto coincida con el vértice C. Recuerden que al ser un triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras, por lo tanto, $c^2 = a^2 + b^2$.

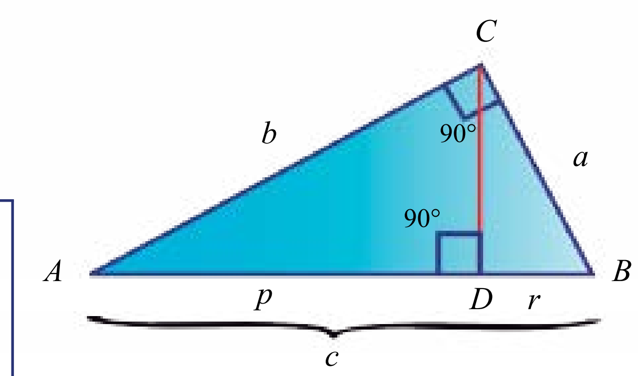
Proyecten sobre el segmento $\overline{AB}$ (la hipotenusa), los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, como mostramos en la figura.

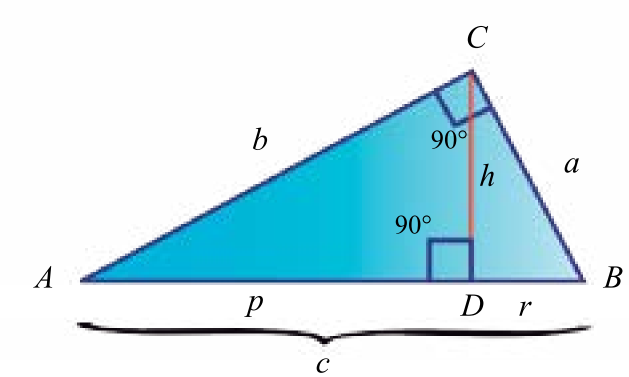
En nuestro caso, $AC = p$ (proyección de $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa $\overline{AB}$) y $CB = r$ (proyección de $\overline{CB}$ sobre la hipotenusa $\overline{AB}$).

Por lo tanto: $c = p + r$

El punto D es la proyección del punto C sobre la hipotenusa.

Por otra parte, el segmento $\overline{CD}$, cuya medida llamaremos $\boldsymbol{h}$, es la altura con respecto a la hipotenusa $\overline{AB}$.





Aplicando los conocimientos sobre semejanza de triángulos, tenemos que:

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, ACD \sim \Delta\, CBD$ (son semejantes)

Estos triángulos son semejantes, entre sí, porque cumplen con el criterio de semejanza AA, es decir, poseen dos ángulos con igual medida, uno de ellos mide 90^0, pero:

- ¿Por qué decimos que al analizar cada par de triángulos, ellos tienen otro par de ángulos correspondientes de la misma medida?
- ¿Qué pasa con el tercer ángulo?
- Pueden explicar, ¿por qué si los triángulos tienen sus ángulos correspondientes de igual medida, no son congruentes?

Con base en lo realizado hasta ahora podemos formular un teorema sobre la semejanza en triángulos rectángulos que podemos enunciar de la siguiente manera:

> En cualquier triángulo rectángulo, la altura con respecto a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos que son semejantes entre sí, y con el triángulo original.

Simbólicamente, esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

> Sea $\Delta\, ABC$ un triángulo rectángulo, con su ángulo recto en C, y sea $\overline{CD}$ la altura con respecto a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces se cumple que: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ACD \sim \Delta\, CBD$.

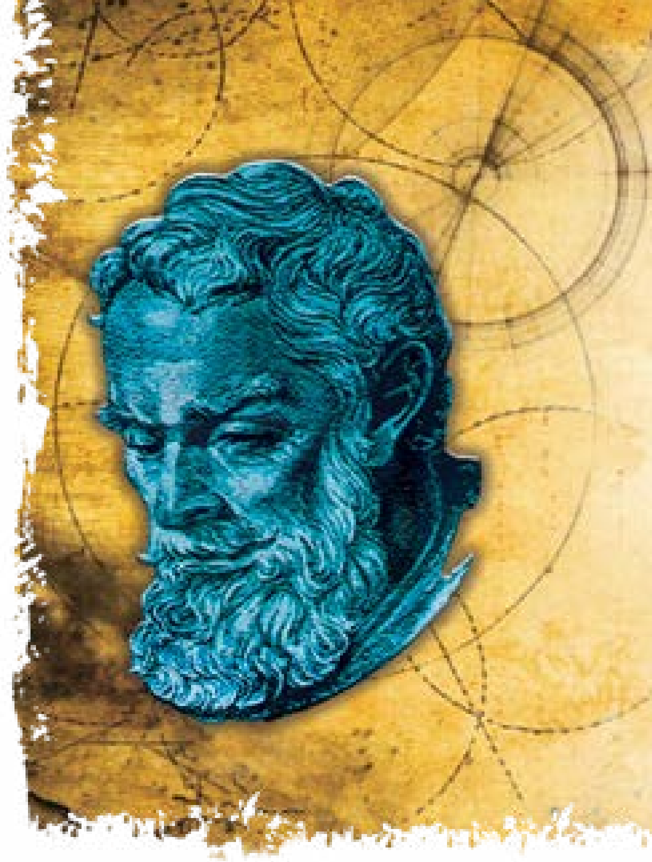
Teorema de Euclides y la semejanza en los triángulos rectángulos

Ya hemos visto cómo medir alturas basándonos en razones que relacionan sombras.

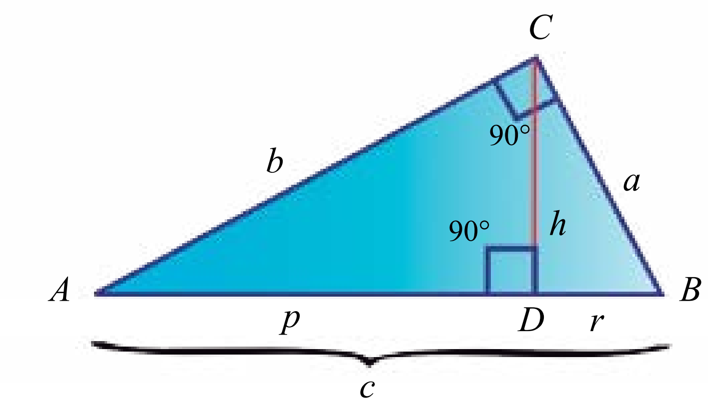
En ese procedimiento hemos utilizado una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Desde la antigüedad, dicho procedimiento fue usado en la arquitectura para llevar adelante una serie de mediciones que permitieron construcciones que han perdurado en el tiempo y que aun hoy admiramos por sus proporciones y belleza.

La semejanza en los triángulos rectángulos fue sistematizada por el gran matemático griego Euclides de Alejandría.

Euclides de Alejandría (325 a.n.e. – 265 a.n.e.) es fundamentalmente conocido por su obra *Los Elementos* Una recopilación de 13 libros que incluyen temas de geometría y aritmética. A través de su obra se establece un modelo de razonamiento lógico, comenzando con un conjunto de afirmaciones que se asumen como verdaderas.



Haciendo uso de las construcciones que hicieron en la actividad anterior, podemos afirmar lo siguiente:



Al ser ambos triángulos semejantes:

$$\Delta CBD \sim \Delta ACD$$

Podemos decir que los lados correspondientes son proporcionales, por lo tanto se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

Esto es igual a decir que $\frac{p}{h} = \frac{h}{r}$. Por tanto, $h^2 = p \cdot r$.

De forma análoga, tenemos que los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (son semejantes).

En consecuencia se cumple: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ esto es igual a decir que:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{p}\text{, por tanto, } b^2 = c \cdot p$$

Ahora les invitamos a que hagan el estudio para $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Conversen con sus compañeras y compañeros, y con su profesor o profesora sobre los resultados de esta actividad. ¿A qué conclusión pueden llegar en relación a los catetos, la hipotenusa y la proyección de los catetos sobre la hipotenusa en cada par de triángulos estudiados?

Esta conjetura a la cual ustedes y su docente deben haber arribado es lo que se conoce como los teoremas de Euclides, en el triángulo rectángulo. Podemos entonces, apoyándonos en la conclusión obtenida antes, que:

> Dado un triángulo rectángulo y la altura con respecto a la hipotenusa, se cumple que la altura es media geométrica entre los segmentos que dicha altura determina sobre la hipotenusa.

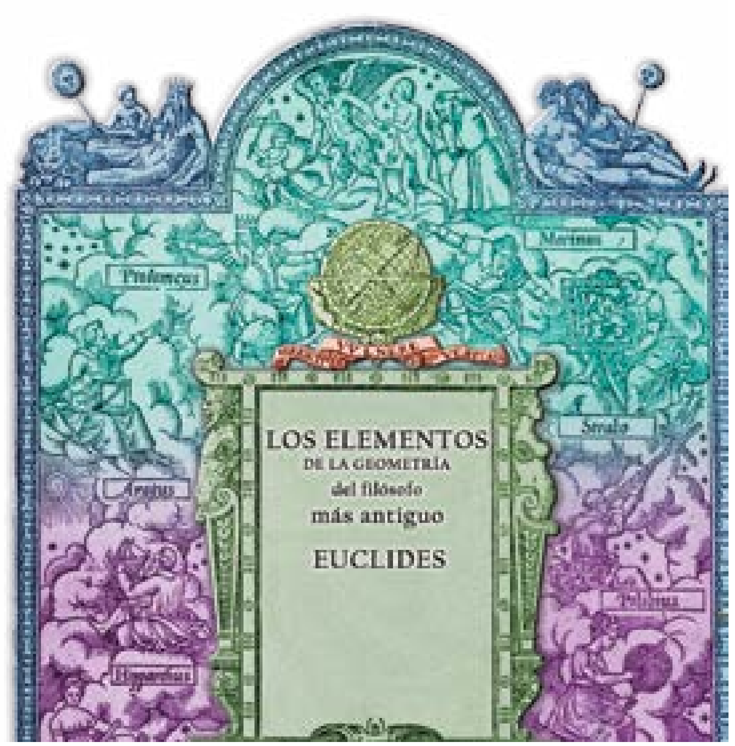
Así mismo, con los resultados de la actividad que acabamos de realizar, en donde obtuvimos que $b^2 = c \cdot p$ y $a^2 = c \cdot r$, podemos enunciar el **Primer teorema de Euclides**.

> En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del mismo cateto sobre la hipotenusa. Es decir, cada cateto es media geométrica de la hipotenusa y el segmento de hipotenusa adyacente a dicho cateto.

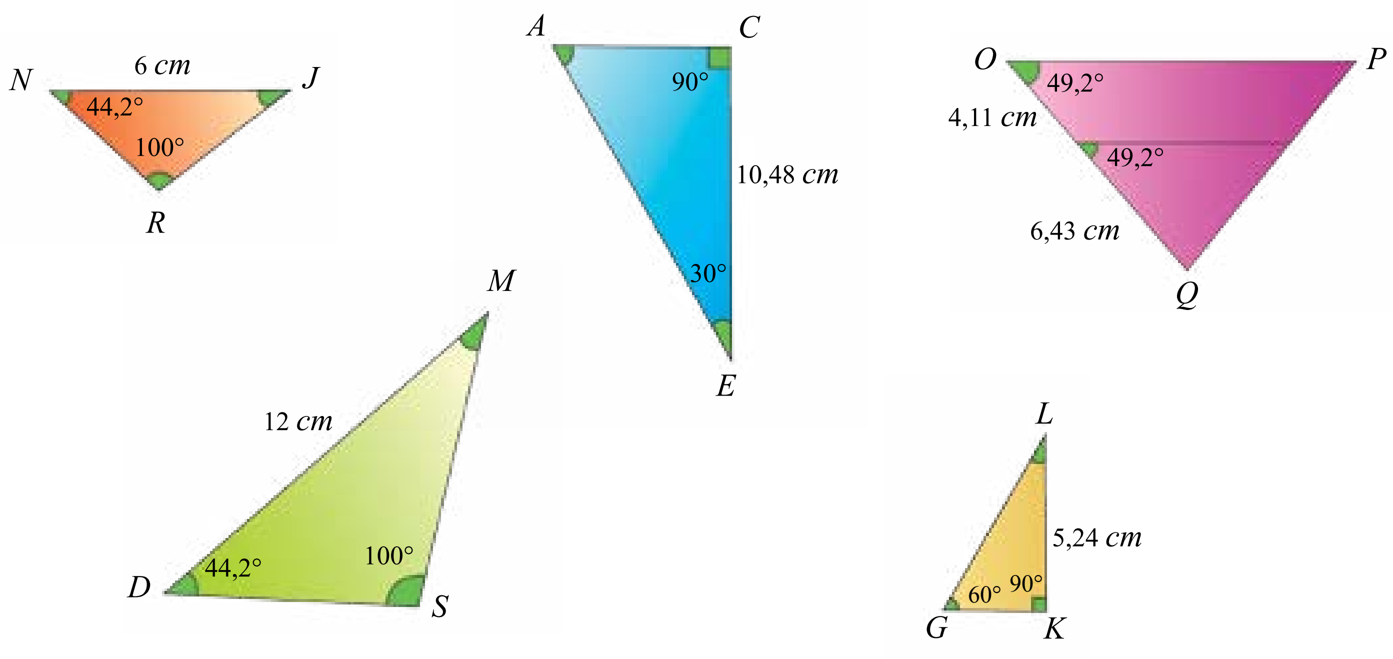
Resolvamos problemas

1 ¿Dos triángulos rectángulos cualesquiera siempre son semejantes? Justifiquen su respuesta.

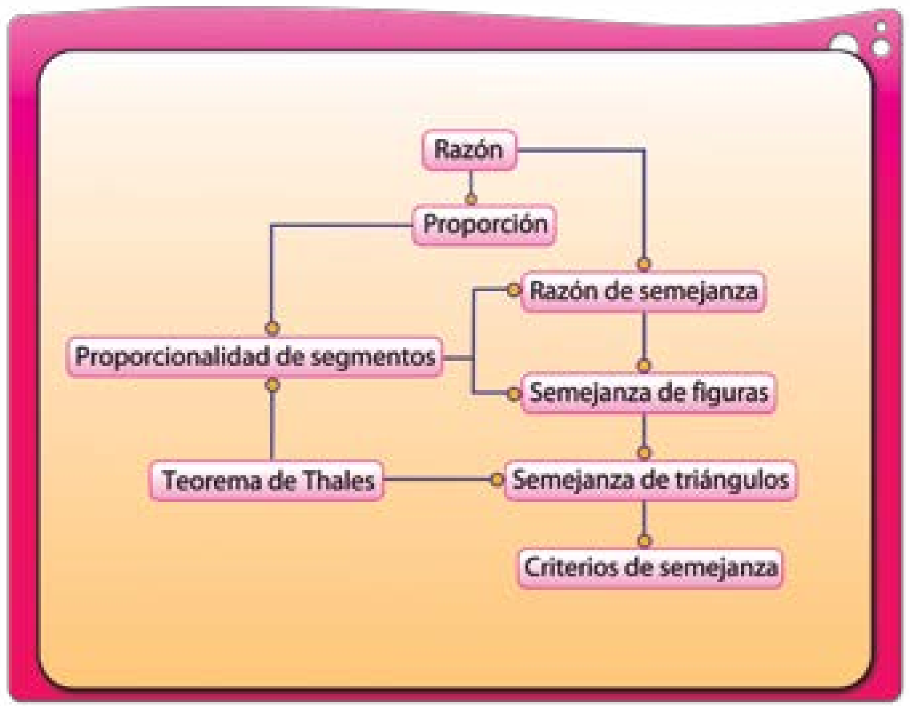
2 ¿Cuál es el área de un terreno cuyos lados forman un triángulo rectángulo, si la altura con respecto a la hipotenusa la divide en dos segmentos de longitudes 4 m y 18 m?



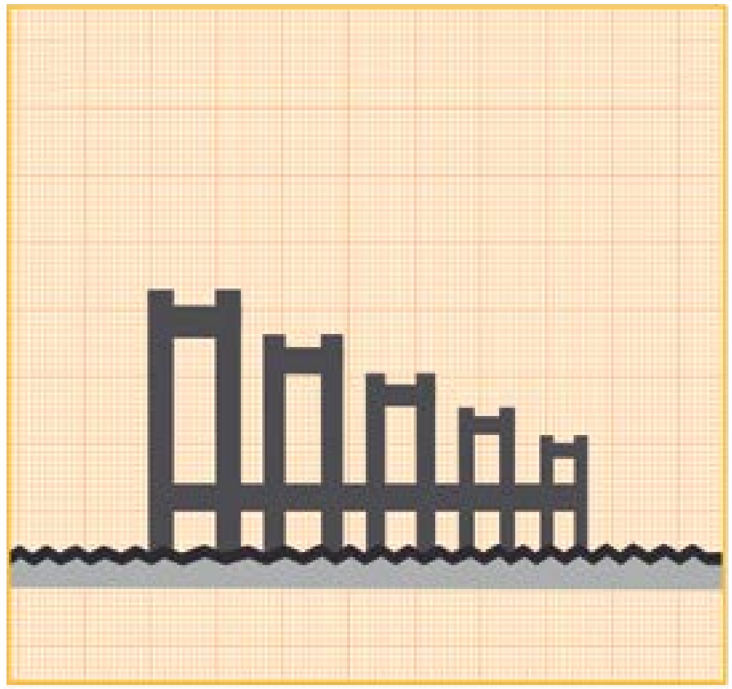
3 Observen los siguientes triángulos e indiquen ¿cuáles son semejantes? Justifiquen su respuesta.

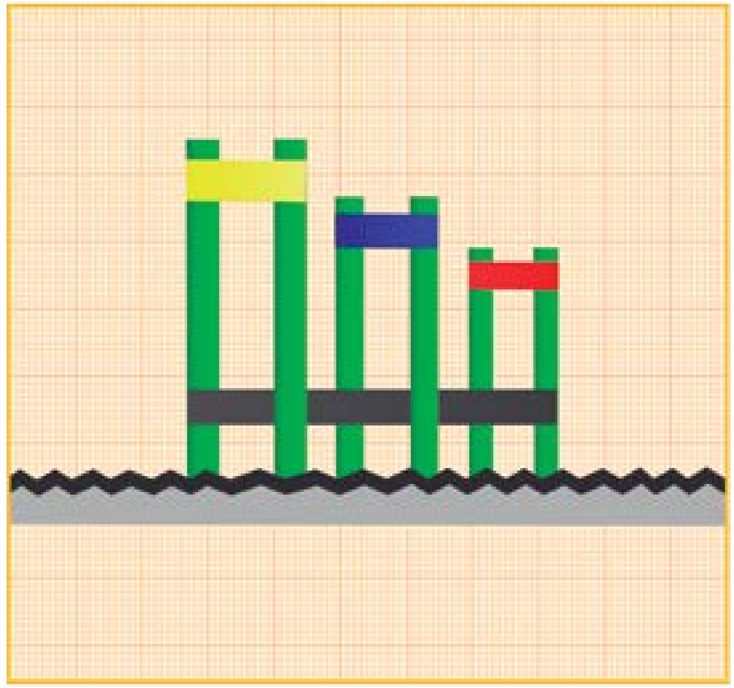


4 En el siguiente esquema podemos visualizar los conceptos referidos a proporcionalidad y semejanza y las relaciones entre los mismos. Socialícen con sus compañeras, compañeros y profesor o profesora, y establezcan el tipo de relación existente entre los términos aquí empleados. Por ejemplo, la relación entre **Razón y Proporción** es: la igualdad de dos razones definen una proporción.



5) Tracen y coloreen en una hoja de papel milimetrado figuras a escala, que tengan lados tres veces mayores que los de las figuras que se presentan a continuación:

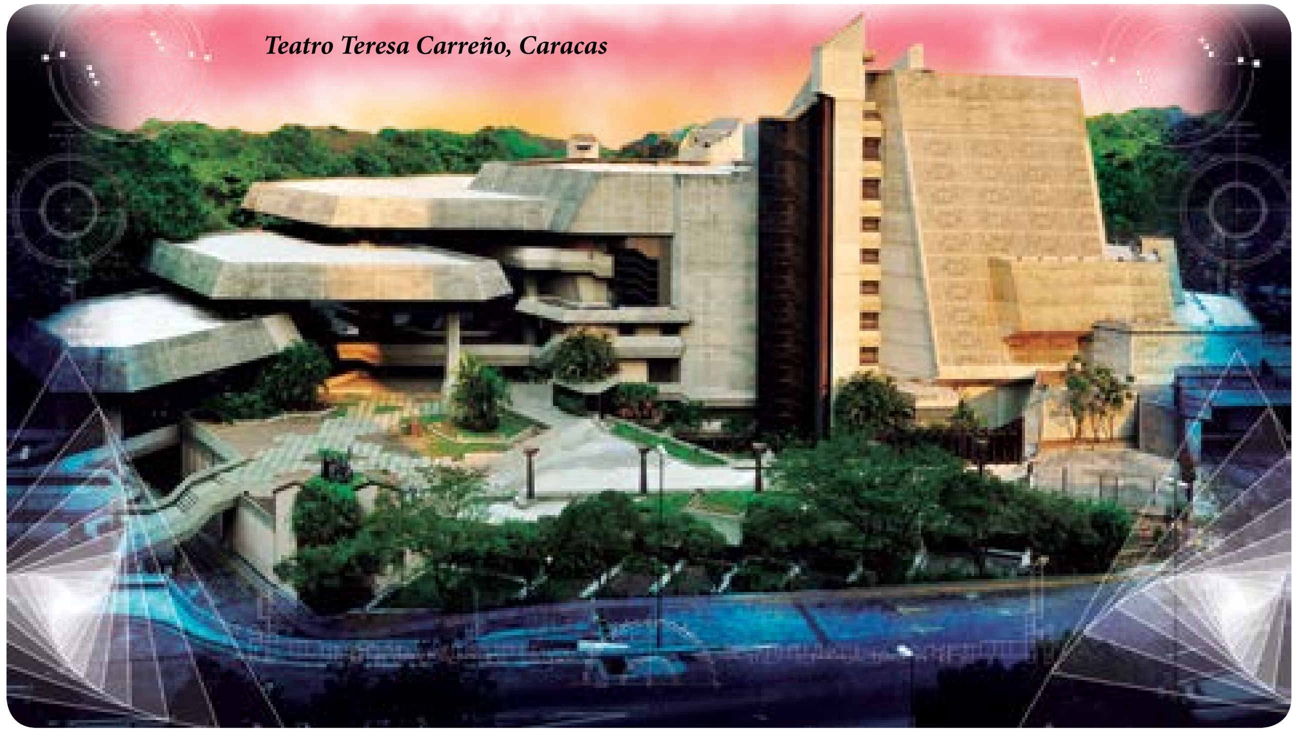




6) Construyan dos triángulos, el ΔABC con lados de $3\ cm$, $4\ cm$ y $5\ cm$, respectivamente y el $\Delta\ DEF$ con lados $6\ cm$, $8\ cm$ y $10\ cm$ de longitud respectivamente. De los dos triángulos construidos, emitan una conjetura acerca de la semejanza de triángulos, considerando que sólo tienen lados proporcionales.

7) El dibujo de abajo, pretende simular un puente atirantado, como el puente Orinoquia ubicado entre los estados Anzoátegui y Bolívar. Este puente tiene una Galiba de Navegación (altura sobre el nivel del mar) de $40\ m$ y torres de hasta $120\ m$ de alto. Consideren que la separación entre cada torre es de $190\ m$ y que sirven de anclaje para los cables que sujetan el tablero de acero con losa de concreto armado, reforzado por un tramo atirantado.

Según todo lo descrito y observado en el dibujo anterior, hallen la medida del cable de acero que hemos destacado, así como la medida de cada uno de los lados del triángulo determinado por éste.


Teatro Teresa Carreño, Caracas

11 LA TIERRA Y LA AGRIMENSURA

Estudio del triángulo rectángulo. Razones trigonométricas: seno, coseno, tangente

El triángulo rectángulo en la agrimensura

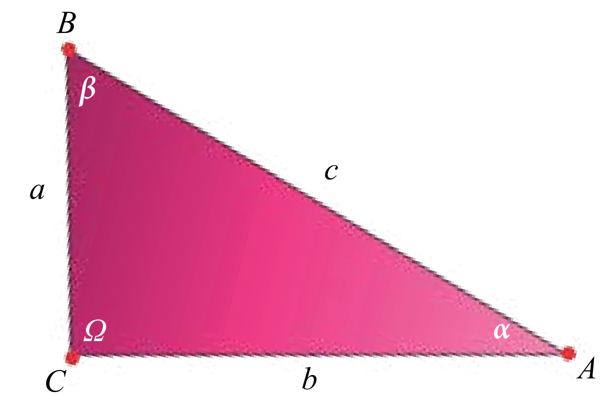
El cultivo de las tierras ha sido una fuente central para la subsistencia de muchos de los pueblos del mundo a lo largo de la historia. La Madre Tierra (o Pacha Mama) alimenta al ser humano y lo cobija satisfaciendo sus necesidades para vivir, por ello, compartir las tierras ha sido trascendental en el devenir de la humanidad. En este proceso, la matemática ha jugado un papel fundamental para la distribución de las tierras entre los miembros de una comunidad, así como para parcelar las que se han destinado al cultivo. Además, se han desarrollado diversas técnicas de medición de tierras que permiten cumplir tan importante labor. Uno de los profesionales cuyo trabajo fundamental se basa en medir la tierra es el *Agrimensor*.

Dentro de los instrumentos de medición empleados por los agrimensores se encuentran: la *Groma*, la *Dioptra*, el *grafómetro*, el *gnomon* y el *teodolito*.

En la medición de terrenos existe una figura matemática de gran utilidad, ésta es el triángulo rectángulo. Su uso se ha hecho frecuente por las diversas propiedades geométricas que posee, las cuales (como veremos) no se limitan al teorema de Pitágoras, y estudiaremos a lo largo de esta lección.

¿Recuerdan el teorema de Pitágoras? Comenten su enunciado a todo el grupo.

Consideremos el triángulo que mostramos en seguida (de lados con medidas a, b y c, donde c es la medida de la hipotenusa, y sus ángulos son $\alpha, \beta\ y\ \Omega$).



Debemos saber que:

Se llama **cateto opuesto a un ángulo** al cateto que no es un lado del ángulo.
Se llama **cateto adyacente de un ángulo** al cateto que es un lado del ángulo.

Iniciemos entonces nuestro estudio. Para ello, les proponemos que copien en su cuaderno el siguiente cuadro y lo completen con base en el triángulo que mostramos aquí. Además, socialicen sus ideas con sus compañeras y compañeros.

Ángulo	Cateto adyacente	Cateto opuesto
Alfa α		
Beta β		

Tabla 1

Mediciones en el terreno

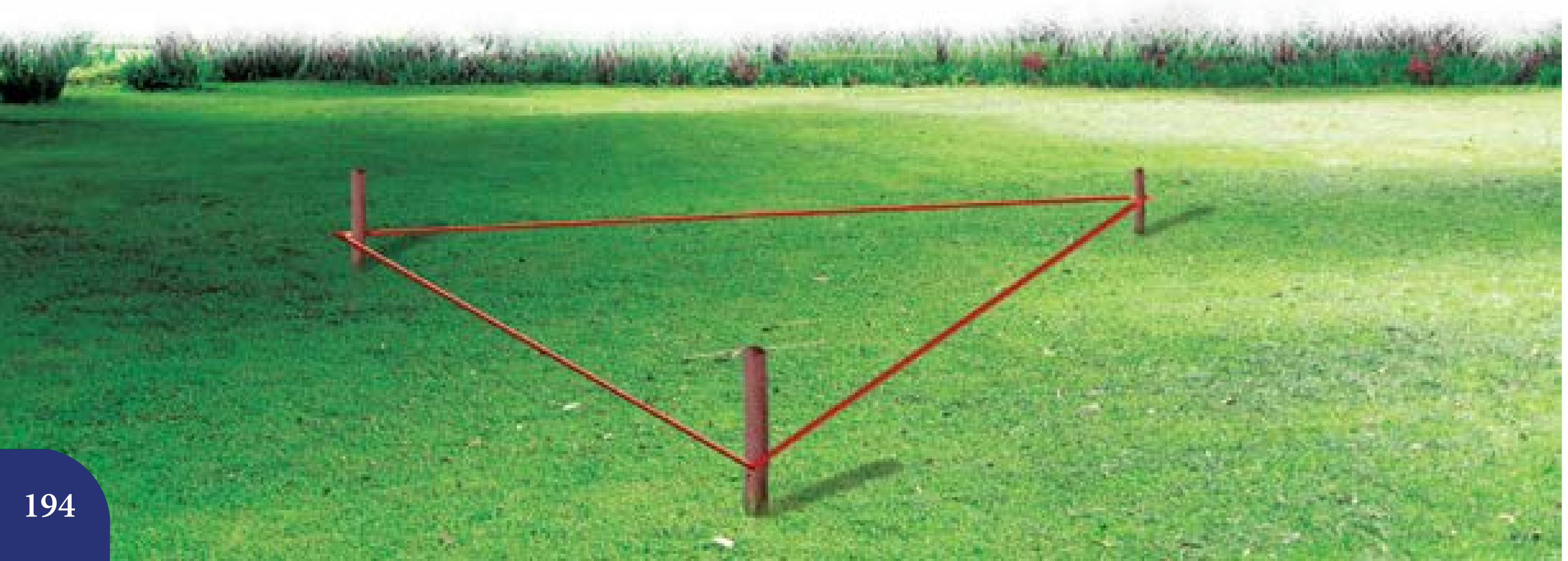
Organícense en pequeños grupos y con la asesoría de su profesora o profesor lleven a cabo la actividad que pasamos a describir. Para ello necesitarán materiales como pabilo o nailon, estacas, martillo, transportador, juego de escuadra, cinta métrica, calculadora científica, cuaderno y lápiz. Puede desarrollarse (a) en las áreas verdes de la institución para demarcar una región que se dedicará a la jardinería, (b) en algún otro espacio de la comunidad e incluso, (c) en el aula, sustituyendo las estacas y el martillo por cinta plástica. En este punto es necesaria la creatividad del grupo.

Utilizando el martillo claven una estaca en el suelo.

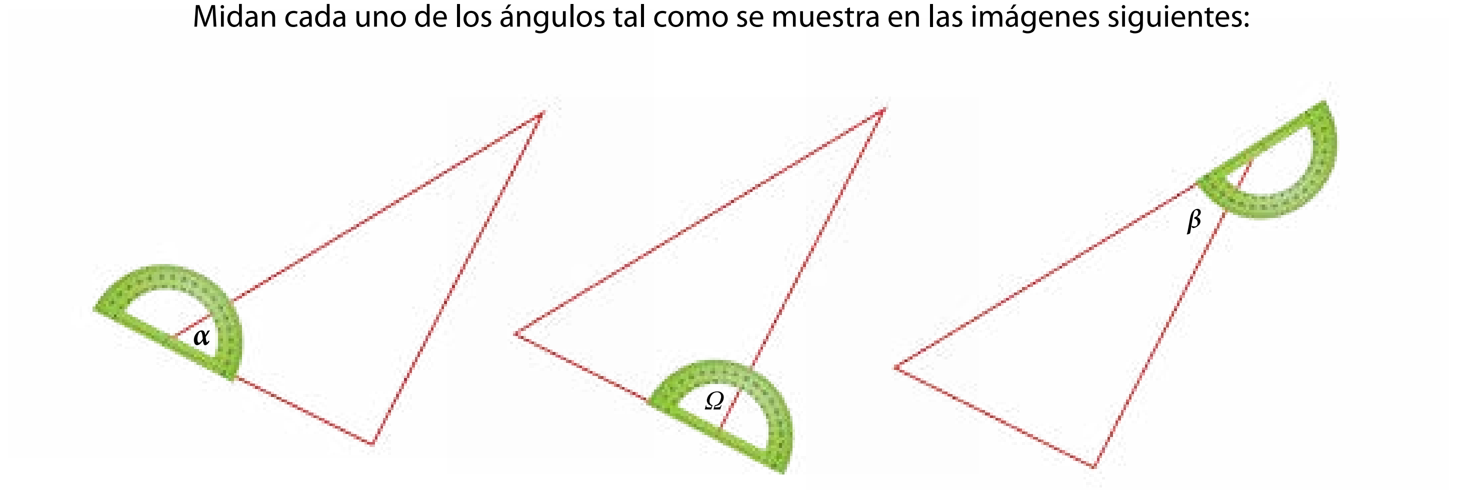
Coloquen otra de las estacas.

Claven una tercera estaca que forme junto a la primera y la segunda estaca un ángulo de 90°. Aquí pueden utilizar la escuadra o el transportador.

Ahora, con el pabilo o nailon dispongan los lados del triángulo rectángulo que se forma.



Midan cada uno de los ángulos tal como se muestra en las imágenes siguientes:



Además, midan cada uno de los lados del triángulo y completen las tablas que aquí mostramos:

Ángulo del Triángulo	Medida
Ángulo Alfa α	
Ángulo Omega Ω (ángulo de 90°)	
Ángulo Beta β	

Tabla 2

Lados	Medida
Cateto a	
Cateto b	
Hipotenusa c	

Tabla 3

Ángulo	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
Ángulo Alfa α			
Ángulo Beta β			

Tabla 4

Representen en una hoja de papel el triángulo que construyeron e indiquen en él las medidas obtenidas. Ya estamos en condiciones de responder las preguntas:

- Tomando en cuenta las medidas de los lados del triángulo, ¿qué tipo de triángulo es?
- ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos del triángulo? ¿Cuánto deberían sumar?
- ¿Sucede esto en cualquier triángulo?

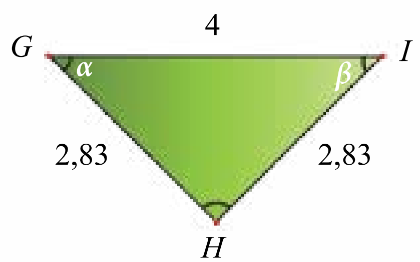
Lo realizado en la tabla 4 se conoce en matemáticas como **cocientes trigonométricos** o **razones trigonométricas**.

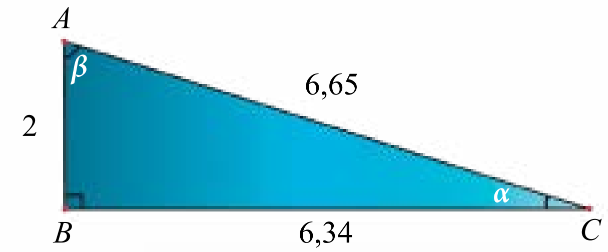
Pero, ¿qué es la razón entre dos números?

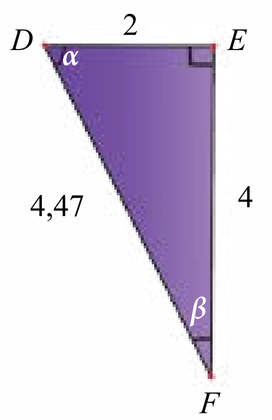
En matemáticas se dice que un número r es la razón de dos números a y b si r resulta de la división de dichos números, para ello se deben dar las siguientes condiciones: a, b y r deben pertenecer al conjunto de los números reales, y b debe ser distinto de cero, esto en símbolos matemáticos se escribe de la forma:

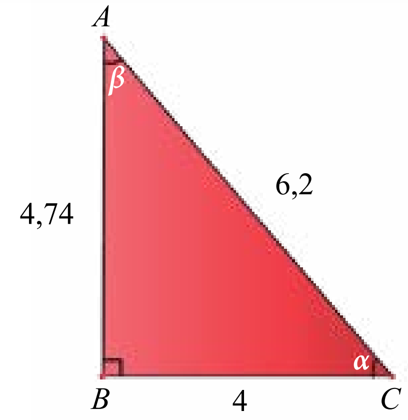
$$\frac{a}{b} = r \text{ tal que } a, b, r \in \mathbb{R}, \text{ con } b \neq 0$$

Consideremos ahora los triángulos:









Determinen en cada caso las razones trigonométricas indicadas en la *tabla* 5:

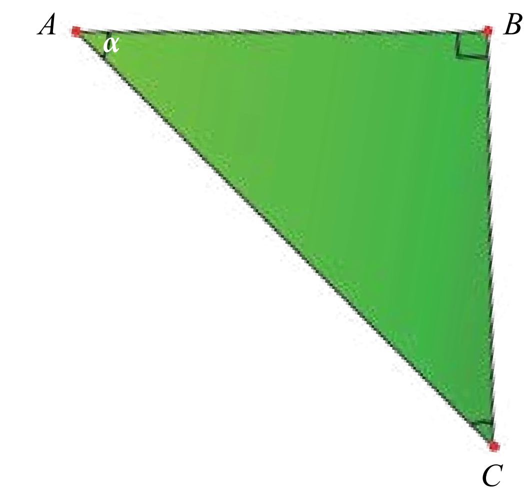
Ángulo	Cateto opuesto / Hipotenusa	Cateto adyacente / Hipotenusa	Cateto opuesto / Cateto adyacente
Ángulo Alfa α			
Ángulo Beta β			

Tabla 5

Razones Trigonométricas del Triángulo Rectángulo

Las relaciones entre las medidas de los lados del triángulo y la medida de sus ángulos se conocen en matemática como **razones trigonométricas** y a la parte de la matemática que trabaja utilizando estas relaciones se le denomina **Trigonometría**. La palabra Trigonometría es de origen griego. Un *trigon* es un triángulo, por tanto, la palabra Trigonometría significa "medición de triángulos". Las razones trigonométricas con las cuales trabajamos anteriormente son: **seno**, **coseno** y **tangente**.

Para formalizar estos conceptos consideremos el siguiente triángulo $\triangle ABC$ y el ángulo alfa ($\measuredangle\alpha$) de dicho triángulo.



Llamaremos **seno del ángulo alfa** (denotado por $sen\,\alpha$) a la razón entre el cateto opuesto al ángulo alfa y la hipotenusa, es decir:

$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{BC}{AC} \quad \leftrightarrow \quad sen\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

El **coseno del ángulo alfa** (denotado por $\cos\alpha$) es la razón entre el cateto adyacente al ángulo alfa y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{AB}{AC} \quad \leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}$$

Y la **tangente del ángulo alfa** (denotada por $tan\,\alpha$) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo alfa.

$$tan\,\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{BC}{AB} \quad \leftrightarrow \quad tan\,\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Usando la calculadora

En su calculadora científica existen algunas teclas con los símbolos del seno, coseno y tangente del ángulo. La mayoría de estas calculadoras utilizan como idioma el inglés, por lo que en vez de ver el símbolo $sen\,\alpha$ encontrarán $sin\,\alpha$. El resto de los símbolos $\cos\alpha$ y $tan\,\alpha$ aparecen iguales.

Cuando necesiten calcular el:

$$sen\,\alpha\,,\ \cos\alpha \text{ o } tan\,\alpha$$

deben presionar la tecla correspondiente al seno, coseno o tangente y la medida de dicho ángulo.

La utilidad de estas propiedades desde el punto de vista práctico es muy diversa: una de ellas es que sabiendo las medidas de los lados de un triángulo rectángulo podemos obtener las medidas de los ángulos agudos de dicho triángulo. Conociendo la medida de un ángulo agudo del triángulo rectángulo y la medida de uno de los lados del triángulo es sencillo obtener la medida de los otros lados del triángulo rectángulo. Estas propiedades de los triángulos son aprovechadas por los Agrimensores en sus trabajos.

Utilizaremos los datos recopilados en la actividad práctica y veremos algunas de las aplicaciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo.

Ángulos del triángulo	Medida	Seno del ángulo	Coseno del ángulo	Tangente del ángulo
Ángulo Alfa α				
Ángulo Beta β				

Tabla 6

Ángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
Ángulo Alfa α					
Ángulo Beta β					

Tabla 7

- Comparen los resultados de la tercera, cuarta y quinta columna de la tabla 6 con la cuarta, quinta y sexta de la tabla 7.
- ¿Qué pueden decir sobre estas medidas?
- ¿Son exactos los resultados? Consulten con su profesora o profesor de matemática al respecto.

La Groma

La Groma es un instrumento antiguo utilizado por los egipcios y romanos en sus construcciones, en especial por los agrimensores, ésta permitía formar triángulos rectángulos con un buen grado de aproximación. La Groma se basaba en una estructura con forma de cruz de la cual se sostenían cuatro hilos con plomadas fijadas a sus extremos.

- Los lados del triángulo se alineaban apoyándose en las varas puntiagudas y en los hilos.

Utilizando la groma

Investiguen y construyan con sus compañeras y compañeros (en grupos de tres o cuatro integrantes) una groma para ser utilizada en clase. Para ello soliciten la asesoría de su profesora o profesor de matemática así como la de un carpintero de su comunidad. Además de la Groma necesitarán tres o más varas largas y puntiagudas en uno de sus extremos (los cuales de denominan "jalones"), una cinta métrica o metro, clavos de tres pulgadas de largo o estacas, martillo, pabilo o nailon, nivel de albañilería, transportador, juego de escuadra, lápiz, papel y calculadora.

Lo primero será clavar la groma en la tierra y nivelarla utilizando el nivel de albañilería. Dejen caer la plomada del centro de la groma de manera tal que éste será el vértice del ángulo de $90°$.

Con la ayuda de sus compañeras y compañeros, utilicen los jalones para ubicar los vértices y los hilos de la groma como guía de alineación. Utilicen el nailon para trazar el perímetro del triángulo.

Hagan una representación del triángulo construido (en una hoja de papel) y coloquen las medidas que van a tomar. Utilizando el metro y el transportador midan un cateto y el ángulo agudo opuesto a él, y a partir de las razones trigonométricas podemos determinar las medidas de los otros dos lados del triángulo.

¿Cómo lo hacemos?

Primero debemos saber cuáles son las razones trigonométricas que involucran al cateto opuesto y a la medida de un ángulo. Tenemos que éstas son: el seno y la tangente. Con respecto al seno del ángulo se tiene que:

$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

Como nosotros tenemos la medida del ángulo y del cateto opuesto, por tanto, despejando la ecuación obtenemos la medida de la hipotenusa del triángulo.

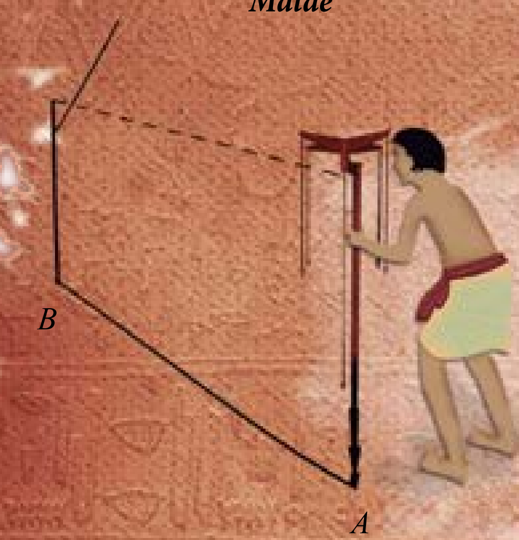
$$Hipotenusa = \frac{Cateto\ Opuesto}{sen\,\alpha}$$

Ya en este punto utilicemos la calculadora.

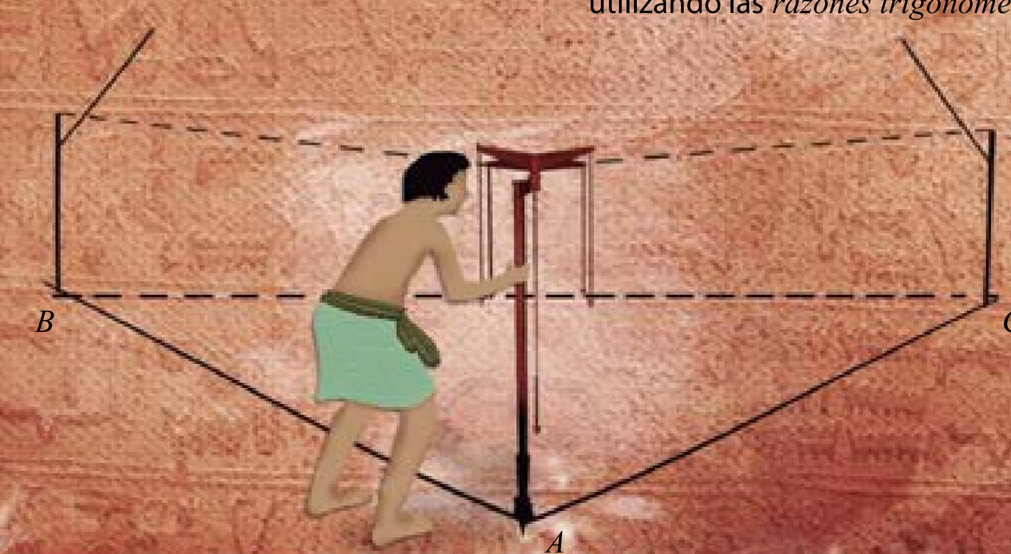
Ahora, sabemos que la tangente del ángulo está dada por la expresión:

$$tan\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ \ Adyacente}$$

Instrumento topográfico
Uso de la groma



- Fijamos la *Groma* y la nivelamos con el nivel de albañilería. La plomada central debe apuntar al vértice de nuestro triángulo. Colocamos una marca o estaca en ese lugar.
- Utilizamos los hilos y las plomadas de la *Groma* para alinear los jalones y formar el triángulo rectángulo (para ello necesitarán la ayuda de las compañeras y compañeros).
- Donde fueron colocados los jalones ahora se colocan las estacas. Usamos el hilo para trazar el perímetro del triángulo.
- Representamos el triángulo en una hoja, medimos un cateto y su ángulo opuesto. A partir de allí podemos calcular las medidas desconocidas utilizando las *razones trigonométricas.*



Y realizando un procedimiento análogo al anterior obtenemos que:

$$Cateto\ \ Adyacente = \frac{Cateto\ Opuesto}{tan\ \alpha}$$

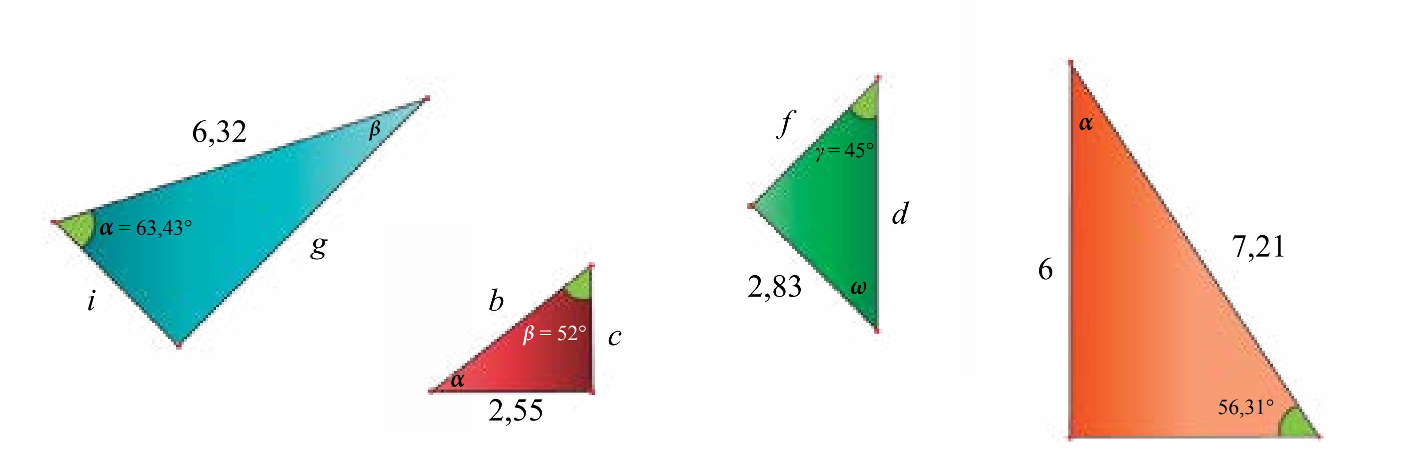
Midan ahora la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo alfa y contrasten los resultados con los obtenidos usando las razones trigonométricas.

¿Es mucha la diferencia entre las medidas tomadas y las obtenidas a través del uso de las razones trigonométricas?

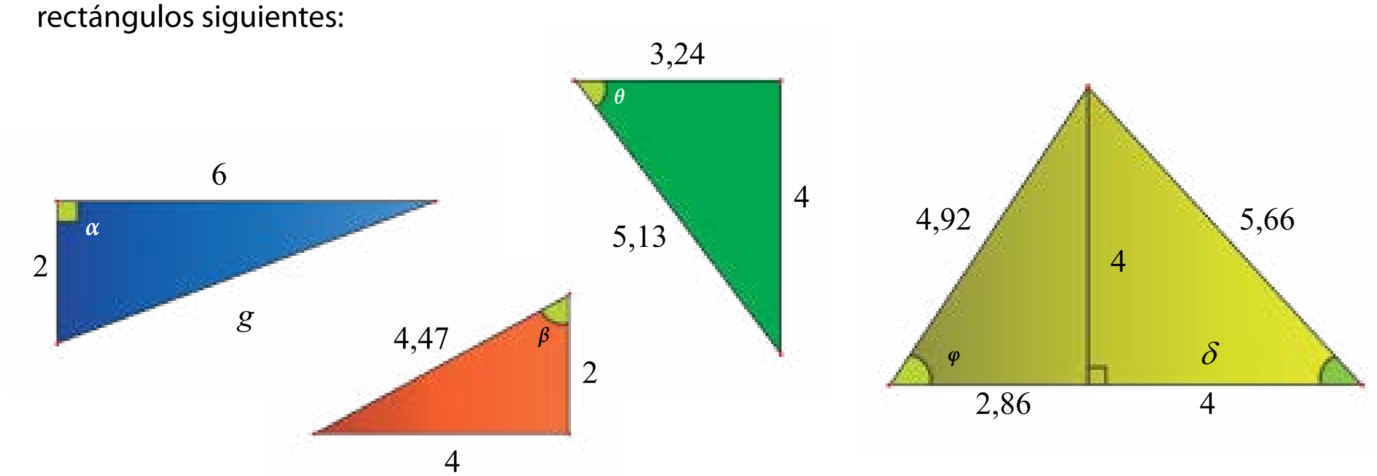
¿A qué se debe que haya o no gran diferencia? Debatan los resultados de esta actividad con los demás grupos.

Resolviendo algunos ejercicios aplicando las Razones Trigonométricas

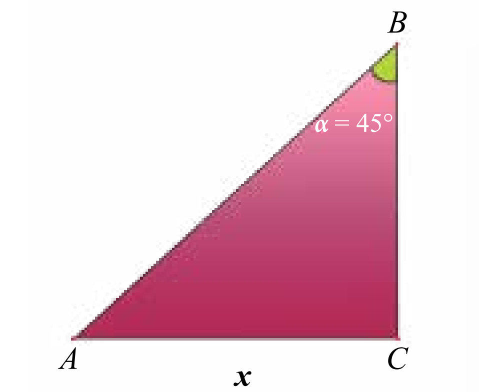
1 En cada uno de los triángulos siguientes hallen las medidas de los lados y ángulos desconocidos aplicando las razones trigonométricas de los ángulos agudos.



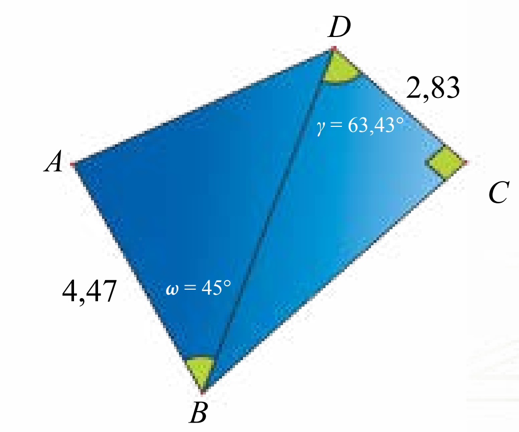
2 Determinen el seno, coseno y tangente de los ángulos en los cuatro triángulos rectángulos siguientes:



3 Consideren el triángulo adjunto. Si la medida del ángulo α es igual a 45° y el cateto opuesto tiene una longitud igual a x. Calculen la medida de los demás lados del triángulo. ¿El triángulo es isósceles? ¿Cómo son el seno y el coseno del ángulo alfa?

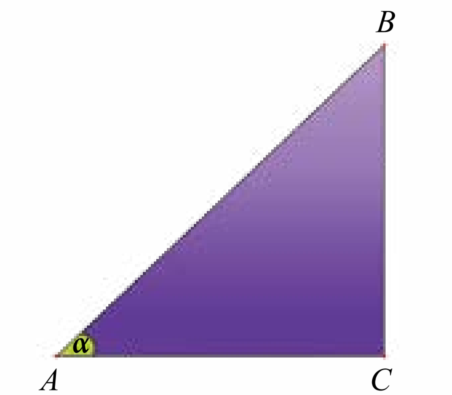


4 Con los datos que suministra la figura dada determinen el área del polígono.



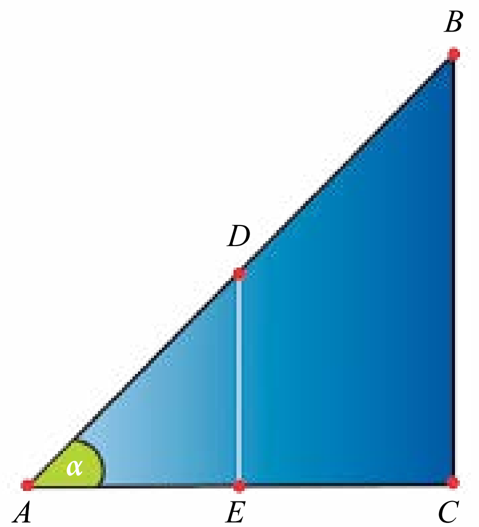
¿El seno de un ángulo es único?

Dibujemos un triángulo ΔABC, y consideremos el ángulo alfa ($\measuredangle\alpha$) de dicho triángulo.



Teodolito
Equipo topográfico

Ubiquemos un punto D en la hipotenusa y haciendo uso de la escuadra tracemos a partir de D un segmento perpendicular al segmento $\overline{AC}$. Así trazamos el segmento $\overline{DE}$, tal que $\overline{AC} \perp \overline{DE}$.



De esta manera tenemos al triángulo ΔAED que tiene en común el ángulo alfa ($\measuredangle\alpha$) con el ΔABC.

Aplicando las razones trigonométricas al ΔABC, tenemos que:

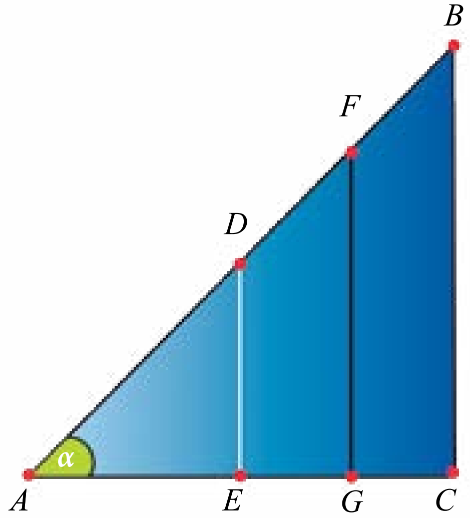
$$sen\ \alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} \quad \text{esto es} \quad sen\ \alpha = \frac{BC}{AB}$$

Haciendo lo mismo con el ΔAED nos queda que:

$$sen\,\alpha = \frac{DE}{AD}$$

Ahora midan los segmentos y sustituyan los valores respectivos en cada caso.

Comparen sus resultados con los de sus compañeras y compañeros. ¿Qué ocurrió al respecto?

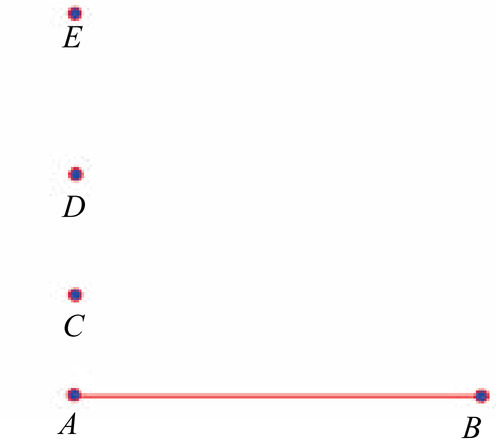


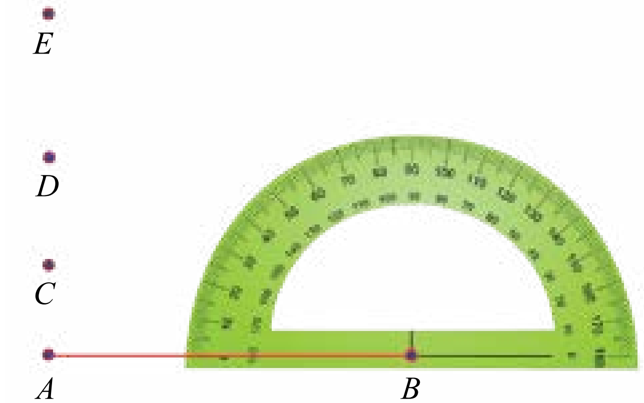
¿Si trazamos el segmento $\overline{FG}$ perpendicular a $\overline{AC}$, qué ocurrirá en relación con el seno de α? Verifiquen lo que ocurre con el coseno y la tangente del ángulo alfa haciendo las mediciones correspondientes en los triángulos ΔAED, ΔACB y ΔAGF. ¿Estos resultados tendrán que ver con el *Teorema de Thales*?

Midiendo en el terreno y aplicando las razones trigonométricas

Junto a sus compañeras y compañeros (en grupos de tres o cuatro miembros) ubiquen la groma en un punto A y coloquen una estaca o clavo en un punto B.

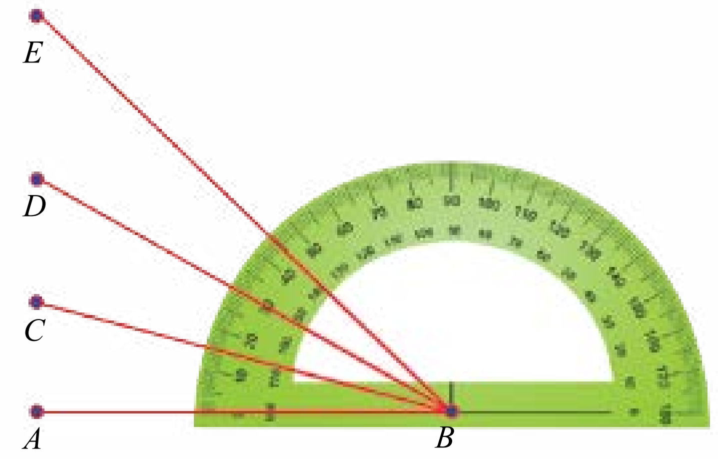
Alineen tres estacas correspondientes a los puntos C, D y E, contenidos en una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en el punto A.





Ubiquen un transportador en el punto B, tal como se muestra en la figura.

Utilizando el nailon o pabilo unan los puntos B y C, B y D, y por último B y E. Con el transportador midan los ángulos: $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ABD$ y $\measuredangle ABE$.



- Ahora midan el $\overline{AB}$ y apliquen las razones trigonométricas.

- Hallen las medidas de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$, además de la distancia entre los puntos A y C, A y D, así como la distancia entre los puntos A y E.

- Por último, calculen las áreas de los triángulos: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ y $\triangle ABE$.

- Socialicen la información recolectada con sus compañeras y compañeros, y reflexionen al respecto.

Actividad

1. Las razones trigonométricas permiten medir distancias desde puntos inaccesibles, como la altura de un edificio, para ello es importante que investiguen junto a sus compañeras y compañeros cómo se construye un astrolabio. Luego deben reunirse en grupos de tres o cuatro estudiantes para construir uno y emplearlo para medir la altura de algunos edificios cercanos. Soliciten la ayuda de su profesora o profesor de matemáticas.

Materiales para la construcción del astrolabio

- Elemento vertical de apoyo (vara o madera). Puede ser algún otro material que le dé soporte al astrolabio.
- Transportador.
- Instrumento de medición de abertura de ángulos (dos varillas de madera unidas mediante un tornillo mariposa) para abrir en forma de compás.
- Cinta métrica (5 m aproximadamente).
- Mecate o cuerda.
- Nivel (usado normalmente en las construcciones).
- Cuaderno, lápices y calculadora.

Se recomienda:

- Realizar varias mediciones para obtener mayor precisión.
- Realizar un dibujo representativo del experimento.
- Contrastar sus resultados con los demás grupos.
- Discutir de manera razonada los resultados obtenidos y deducir los posibles errores.

12

NUESTRO TIEMPO LIBRE

Medidas de tendencia central y medidas de dispersión. Análisis de datos estadísticos

Sobre el uso del tiempo "libre"

Muchas veces hemos escuchado o nos han enseñado que para llevar una vida equilibrada deberíamos distribuir las actividades que realizamos a diario de la siguiente manera: 8 horas para las actividades laborales (si estamos en edad laboral) o las estudiantiles (si estamos en edad escolar), 8 horas para el sueño y 8 horas para alimentarse, trasladarse y para aprovechar el tiempo "libre" –el cual es necesario para el desarrollo integral del ser humano. Sin embargo, esta proporción no es la misma para todas las personas. En todo caso, queremos destacar aquí que el uso inadecuado del tiempo libre podría ser perjudicial tanto para la formación integral de las y los jóvenes, así como para la sociedad en su conjunto.

En esta lección nos interesa aprender a analizar datos estadísticos relativos al uso del tiempo libre y otras variables de interés, recabadas en diversos tipos de personas y así conocer el comportamiento de estas características.

Lo primero que debemos plantearnos en la clase de matemática es una conversación acerca de:

- Los datos que serían necesarios recabar.
- Las variables a estudiar.
- La fuente de obtención de los datos.
- Las técnicas e instrumentos de recolección de los datos.
- La cantidad de datos que podríamos obtener.

Estas ideas se han estudiado en los cursos de matemática de 1er año y 2do año del nivel de Educación Media.

En esta oportunidad asumiremos que ya manejamos estos conceptos y daremos información que servirá de base para el análisis.

Supongamos que decidimos recopilar datos de los habitantes de las comunidades circunvecinas y de estudiantes de un liceo sobre las variables edad, ocupación, género, horas dedicadas para el sueño en los últimos 7 días, horas semanales dedicadas para el estudio, horas dedicadas para el trabajo, horas dedicadas para actividades varias: como las deportivas, las artísticas (música, lectura, escritura, fotografía, y otras), lúdicas, ciertas distracciones, relaciones sociales y otras que indiquen los encuestados.

Liceo Juan Bautista Arismendi

En otro estudio que se realizó, la encuesta se aplicó a 120 estudiantes del liceo y a 80 personas de distintas edades que habitan en las áreas vecinas al liceo. Los datos obtenidos se dispusieron en una matriz como la que sigue y que les puede servir de guía en la aplicación que ustedes hagan:

				Horas										
Sujeto	Edad	Ocupación	Género	Sueño	Trabajo	Deportes	Música	Lectura	Escritura	Fotografía	Juegos	Distracciones	Amistades	Otras
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														

Es importante que abrevien las respuestas en las variables ocupación y género. Como estas variables son cualitativas, las respuestas correspondientes ocuparían más espacio del que disponemos en esta matriz. Por ejemplo, para la variable "ocupación", tal vez nos interesen las opciones "estudiante, trabajadora o trabajador, desocupado, jubilado, otro"; así que podríamos utilizar las abreviaturas (códigos): E, T, D, J, O, respectivamente. Y en el caso del género, pueden usar F y M para designar a las personas de género femenino y masculino. El resto de las variables son cuantitativas, ya que sus datos están expresados numéricamente, y no requieren de códigos para su procesamiento.

Podemos, además, organizar los datos en dos grandes grupos: (1) los que corresponden a estudiantes del liceo referido, y (2) los que corresponden a los vecinos de este liceo. Con ello podríamos analizar el comportamiento de las variables para cada grupo y comparar los resultados.

El análisis estadístico de los datos puede comenzar desde que estamos organizándolos, porque nos vamos dando cuenta de qué resultados se repiten, con qué frecuencia lo hacen, cuáles son los valores: mínimo y máximo. Sin embargo, no es hasta que calculemos y apliquemos algunas medidas estadísticas, que verdaderamente estaremos realizando un análisis estadístico. En esta lección vamos a trabajar con las **medidas de tendencia central** y **las medidas de dispersión**.

Tomemos la variable edad y examinemos qué ocurre con estos datos:

Edades estudiantes del liceo (años cumplidos):

12, 12, 13, 11, 12, 13, 14, 14, 12, 14, 15, 15, 14, 16, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 14, 16, 15, 17, 16, 15, 16, 15.

Edades de vecinos del liceo (años cumplidos):

7, 25, 20, 43, 2, 55, 30, 21, 18, 20, 19, 27, 43, 40, 68, 50, 33, 26, 21, 19, 18, 10, 1, 22, 35, 17, 48, 51, 39.

En el caso de las edades de estudiantes del liceo,

- ¿Cuántos datos hay?
- ¿Consideran que ese sería el total de estudiantes de ese liceo?

Si les parece que es el total de edades de los estudiantes de ese liceo, utilicen la letra N (en mayúscula) como etiqueta. Pero si este número representa una porción o muestra de las edades de los estudiantes de ese liceo, utilicen la letra n (en minúscula) para indicar cuántos casos hay en ese subconjunto. De manera que ustedes establecerán si lo correcto es decir $N = 28$ datos o $n = 28$ datos.

Para designar el tamaño de una **población estadística**, o total de mediciones de una variable en todos los elementos de interés, utilizaremos la letra N.

Para el caso del tamaño de una **muestra estadística**, o subconjunto de la población, utilizaremos la letra n.

Al examinar las edades de los vecinos,

- ¿Cuántos datos tenemos?
- ¿Se corresponden con una población o con una muestra estadística? Señalen en su cuaderno, el tamaño de la población o muestra, con la nomenclatura apropiada (N o n).

Ahora, analicemos (en ambos casos) cuál es el **Modo**, la **Mediana** y la **Media aritmética** de los datos que tenemos y comparemos sus resultados. Estas tres medidas representan *las medidas de tendencia central* utilizadas para resumir el comportamiento de una gran cantidad de datos.

- ¿Cuál es la edad que más se repite entre los estudiantes?
- ¿Hay una sola edad que se repita más?

Ayúdense contando la frecuencia o veces que se repite cada valor. Las edades que tengan la mayor frecuencia se considerarán el Modo. Si hay un sólo **Modo** se dice que la variable edad es *unimodal*, si tiene dos modos es *bimodal*, si tiene más de dos modos es *multimodal* y si no hay ningún valor que se repita más que otro, se dirá que la variable es *amodal*.

- ¿Es correcto plantear que esta variable es bimodal y que uno de sus modos es la edad de 15 años?

Para obtener la **Mediana** se requieren ordenar los valores de menor a mayor o de mayor a menor, esto se hace para obtener el valor que ocupa la posición central de todos los datos y que los dividirá en dos partes iguales (mitad y mitad). Si el total de datos de una muestra es un número par, calcularemos el puesto que ocupa la Mediana con $\frac{n}{2}$ y si el tamaño de la muestra es un número impar, el puesto que ocupe la Mediana será $\frac{(n+1)}{2}$.

- ¿Estaremos en lo correcto si se dice que la mitad de los estudiantes, en este caso, tienen la edad de 14 años o menos?

Otra medida que es muy utilizada para resumir el comportamiento de los datos es la **Media aritmética** o punto de equilibrio. Esta medida requiere que sumemos todos los datos y que ese resultado lo dividamos entre el tamaño de la muestra o de la población, según sea el caso. Comprueben con sus propios cálculos si la Media aritmética en el caso de los estudiantes es la edad de 14 años, lo cual indicaría que alrededor de esa edad giran el resto de las edades de esos estudiantes.

Algo que puede ayudarles a considerar que el valor de las medidas de tendencia central es el correcto es saber que ninguno de los valores del Modo, Mediana o de la Media aritmética debe estar fuera del rango de valores (entre el mínimo y el máximo). En nuestro caso, la edad en este grupo de estudiantes está entre 11 y 17 años.

Observen en esta presentación de datos cómo se distribuyen las edades de estudiantes de este liceo:

Apoyándonos en las ideas anteriores, (1) calculen el Modo, la Mediana y la Media aritmética de las edades de los vecinos de ese liceo. (2) ¿creen ustedes que la edad que más se repite en estos vecinos es también 14 y 15 años? ¿La edad que divide en dos mitades a esos valores es la misma que la de las y los estudiantes del liceo?

Sabiendo que los vecinos pueden tener una mayor diversidad de edades que quienes estudien en un liceo: ¿creen ustedes que la media aritmética o edad promedio de éstos sea una edad menor o mayor a la de los liceístas?

La única forma de contestar estas interrogantes, en este caso, es calculando y comparando los resultados de ambos grupos. Esto nos permitirá ver que a pesar de que estamos midiendo la misma variable (edad), el que lo hagamos en distintos grupos puede originar resultados diferentes.

Cuando tengan los datos de las restantes variables que recolecten en su liceo o en su comunidad circunvecina, también debemos analizar sus resultados aplicando las medidas de tendencia central.

Es importante que tengamos presente que cuando una variable es cualitativa (como el género, por ejemplo), la única medida de tendencia central que se puede obtener es el Modo, dado que las exigencias que hacen la Mediana y la Media aritmética, no son satisfechas por este tipo de variables (ordenar y sumar valores).

Midiendo y analizando la variabilidad de los datos

Cuando estamos en presencia de variables cuantitativas además de medir y analizar su tendencia central, también es sumamente importante conocer y analizar qué tan parecidos o no son los datos entre sí, en especial cuando debemos comparar los resultados para fundamentar la toma de decisiones o para emitir conclusiones, ya que dos o más grupos pueden tener, por ejemplo, la misma media aritmética y, sin embargo, podrían tener una variación de datos muy distinta, lo que por demás se conoce como variabilidad o dispersión de los datos.

Una manera de medir la variabilidad de los datos es a través de la **Amplitud** o **Recorrido** de la variable. Para esto se utiliza la fórmula:

$$A = (V_M - V_m) + 1$$

donde:

V_M = Valor máximo

V_m = Valor mínimo

La cual indica cuántos datos posibles hay en el intervalo total de valores de una variable. Mientras mayor sea el valor de la **Amplitud**, mayor será la variabilidad o dispersión posible en una característica.

La dispersión o variabilidad de la edad de los vecinos que hemos presentado al inicio de la lección tiene como valor máximo 68 años, la edad mínima es de 1 año. Por tanto, la Amplitud la obtenemos de la siguiente forma:

$$A = (68 - 1) + 1 = 68$$

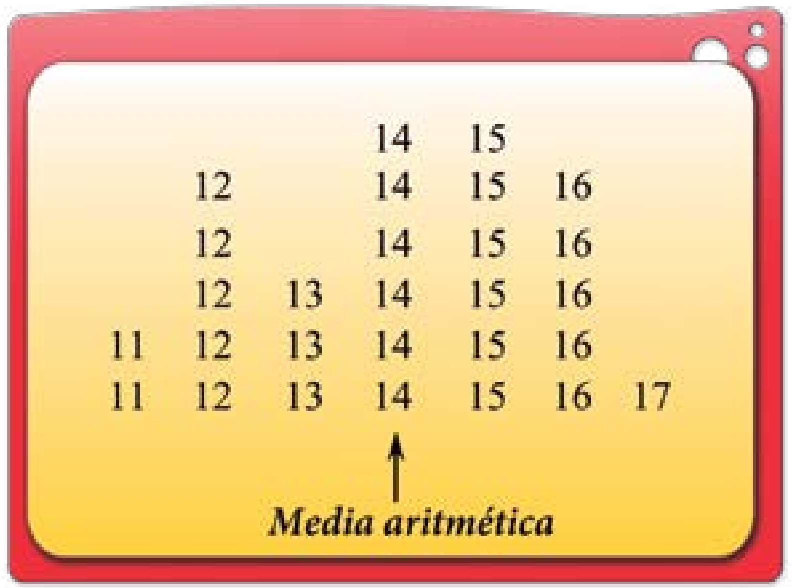
Esto significa que pueden encontrarse 68 datos distintos (correspondientes a la edad) entre esos vecinos. Claro está que no se observan todos esos 68 valores por cuanto el grupo apenas es de tamaño 29, pero es una medida que fácilmente puede expresarnos qué tan variable es la característica medida.

¿Cuál será la variabilidad de las edades que hemos estado trabajando de las y los estudiantes de este liceo? ¿Su Amplitud será menor a la de los vecinos? ¿A qué creen que se deba esta diferencia?

La Amplitud es muy fácil de obtener pero tiene una limitación matemática que sólo toma en cuenta dos valores de la variable para indicar la variabilidad, el máximo y el mínimo y no nos permite conocer qué ocurre con el resto de los valores. En este sentido, los estadísticos ensayaron con otras medidas que permitieran conocer más sobre la variabilidad de los datos.

En este caso, mostraremos cómo calcular una medida de variabilidad que toma en cuenta todos los valores y todos los casos, tal como se hizo con la Media Aritmética que antes calculamos.

Tomemos las edades de los estudiantes del liceo JBA y observemos qué tan diferentes o lejos están de su Media aritmética.



Nos interesa medir qué tan diferente o alejado está **cada valor** de su Media aritmética o punto de equilibrio. Para medir esto vamos a calcular la diferencia de cada dato con respecto a la Media aritmética y luego tendremos que sumar todas estas diferencias. La Media aritmética es 14 años de edad. En este sentido, los cálculos son:

$$\begin{aligned}&(11-14)+(11-14)+\\&(12-14)+(12-14)+(12-14)+(12-14)+(12-14)+\\&(13-14)+(13-14)+(13-14)+\\&(14-14)+(14-14)+(14-14)+(14-14)+(14-14)+(14-14)+\\&(15-14)+(15-14)+(15-14)+(15-14)+(15-14)+(15-14)+\\&(16-14)+(16-14)+(16-14)+(16-14)+(16-14)+\\&(17-14)\end{aligned}$$

Suma que podemos abreviar como sigue (apoyándonos en las propiedades conmutativa y asociativa de la adición):

$$2(11-14)+5(12-14)+3(13-14)+6(14-14)+6(15-14)+5(16-14)+(17-14)$$

Y simplificando, obtenemos:

$$2(-3)+5(-2)+3(-1)+6(0)+6(1)+5(2)+(3)=0$$

Pero esto se convirtió en un problema dado, que si al medir la variabilidad, nos da cero, es como decir que no hay variabilidad, cosa que no es cierta porque los valores son distintos entre sí y no todos son iguales a su Media aritmética.

Bueno, como seguramente se les ocurrió a ustedes, los matemáticos y estadísticos buscaron una salida a esta situación: elevar al cuadrado cada diferencia y después de totalizarla y calcular su promedio al dividirla entre n, calcularle la raíz cuadrada para que la potencia vuelva a ser igual a uno.

En nuestro caso como son 28 diferencias vamos a abreviar las operaciones de suma a través del producto de cada diferencia al cuadrado por la frecuencia de aparición:

$$\begin{aligned}&2(-3)^2+5(-2)^2+3(-1)^2+6(0)^2+6(1)^2+5(2)^2+(3)^2=\\&2\cdot 9+5\cdot 4+3\cdot 1+6\cdot 0+6\cdot 1+5\cdot 4+9=\\&18+20+3+0+6+20+9=\\&76\end{aligned}$$

A este resultado lo dividimos entre el número de datos (28), para calcular el promedio de las diferencias al cuadrado, y calcularle la raíz cuadrada a ese resultado (ya que las edades al cuadrado no tienen sentido lógico), entonces:

$$\sqrt{\frac{76}{28}}\approx\sqrt{2{,}71429}\approx 1{,}6475 \text{ años de edad}$$

La variabilidad de las edades de la muestra de estudiantes del liceo Juan Bautista Arismendi es un poco menor de dos años de diferencia promedio, por lo que como la diferencia de edad no es mucha, podemos decir que esa muestra de estudiantes se caracteriza por ser bastante parecida u homogénea (en cuanto a la edad se refiere).

Esta medida se conoce como la **Desviación Estándar** o **Típica** y su nomenclatura es una S:

$$S=\sqrt{\frac{suma\,(\mathrm{x}_i - media\ aritmética)^2}{n}}$$

Al analizar los datos cuantitativos se recomienda calcular la Media aritmética y acompañarla de su Desviación Estándar para medir el eje de los valores y el grado en que varían los datos alrededor de ese eje, esto también indica el grado de *heterogeneidad de la variable*.

Ahora, basados en esta explicación, en sus cuadernos calculen y analicen el grado de variabilidad o heterogeneidad de la variable "edad de los vecinos del liceo estudiado". Además, respondan en forma argumentada estas interrogantes:

- ¿El valor de esta nueva desviación estándar es mucho mayor o mucho menor a la de la edad de los estudiantes de ese liceo que fue 1,65 años? ¿A qué se debe esa diferencia?
- ¿Por qué estos resultados no son iguales a los de la Amplitud, siendo que ambas medidas son de variabilidad?

Cuando recopilen los datos que sugerimos al inicio de esta lección (acerca de la distribución del tiempo de cada persona), deben considerar que la mayoría de las variables son cuantitativas, por tanto, pueden aplicar las tres medidas de tendencia central vistas en esta lección y calcular y analizar tanto la **Amplitud** como la **Desviación estándar** de cada variable. Trabajen en equipos de tres o cinco personas para que se ayuden en la comprensión de los procesos que se están llevando a cabo, revisión y corrección de resultados y para socializar los análisis que realicen de sus resultados.

Si poseen alguna calculadora científica y aún guardan su manual, es muy conveniente que revisen las instrucciones para obtener entre sus funciones estadísticas, de manera más rápida y posiblemente más precisa, tanto la Media aritmética (llamada algunas veces "promedio") como la Desviación Estándar. Esto permitirá obtener los resultados de estas medidas sin invertir más tiempo en el cálculo que en el análisis del resultado.

Otra manera de obtener estas medidas con ayuda tecnológica, consiste en utilizar las funciones estadísticas que aparecen en diversas "hojas de cálculo" computarizadas, en las que no importando la cantidad de datos y variables, pueden obtenerse de manera inmediata las medidas explicadas.

Observen algunas pantallas alusivas a las instrucciones para obtener las medidas estadísticas Modo, Mediana, Media aritmética y Desviación Estándar.

Los invitamos a introducir los datos que recopilen y organicen sobre la temática sugerida o cualquier otra que ustedes quieran y en consenso lleguen a escoger para realizar en el curso, en una hoja de cálculo (por ejemplo, Libre Office Calc.) y obtener las diversas medidas estadísticas a ser analizadas.

Fíjense en las siguientes instrucciones que se le suministran para realizar tanto el procesamiento como la obtención de medidas de análisis estadístico univariado.

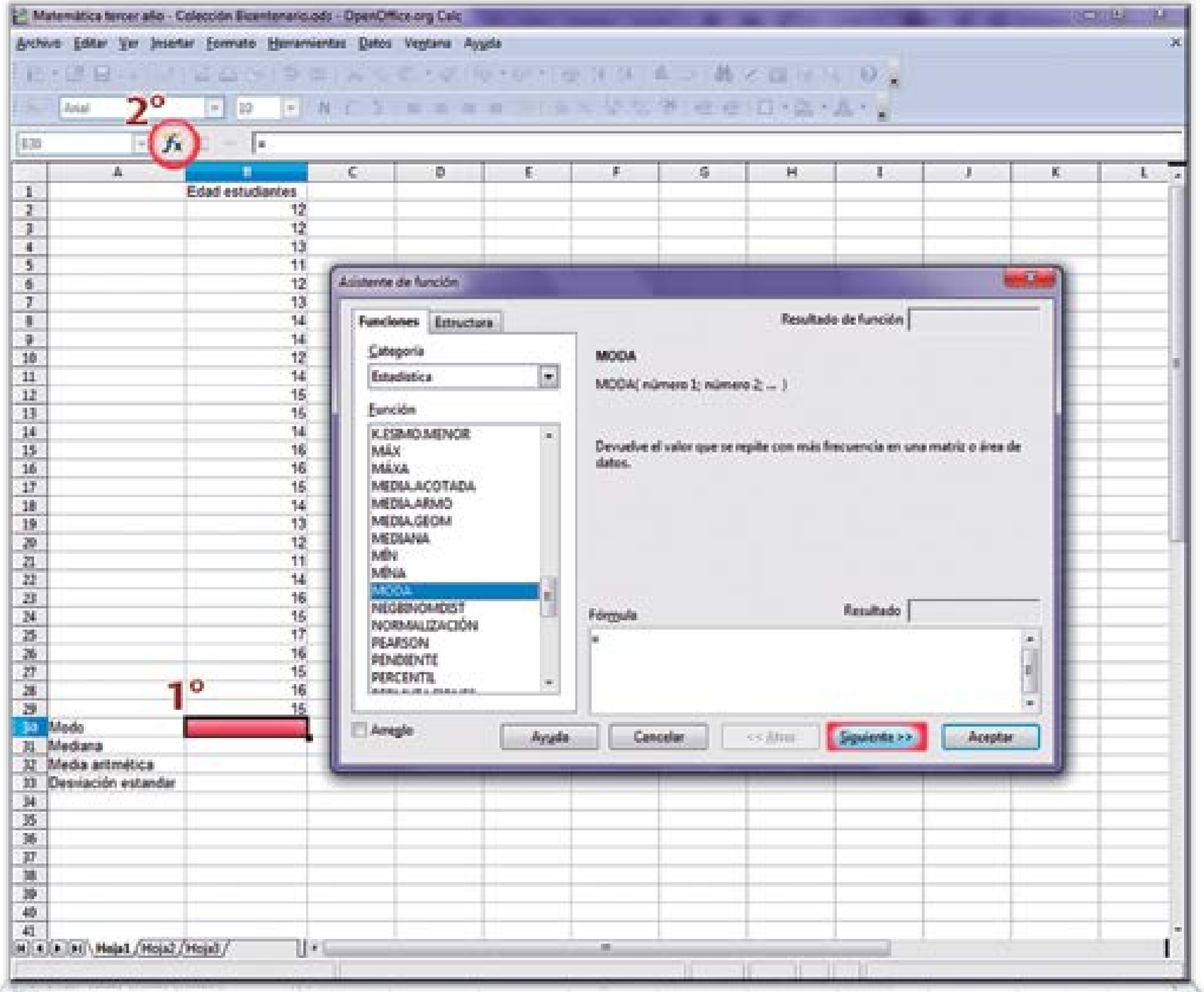


Figura 1. Pantalla de computador que muestra instrucciones para calcular el Modo

Para calcular cualquier medida estadística deben colocarse en la celda que quieran que aparezca el resultado, observen que el cursor de la computadora está colocado al lado de la celda que dice Modo porque ahí se quiere que aparezca ese resultado.

Hagan click en el ícono de funciones (*fx*) para que aparezca el asistente de funciones y se despliegue la ventana de donde escogerán las funciones estadísticas (ver la ventana "Categoría") y al desplegarse las funciones , seleccionen Modo (las funciones aparecen en orden alfabético). Marquen "Siguiente" (parte inferior derecha), para continuar.

Cuando aparezca la próxima pantalla escriban en el paréntesis al lado de la instrucción:

$$= Modo\ (\ )$$

Las coordenadas de columna y celda de inicio de la columna donde están los datos, separado de dos puntos, hasta la celda final de esa columna. Para nuestro ejemplo es:

= *Modo* (*b*2:*b*29) Ya que inicia en la celda *b*2 y termina en la celda *b*29, tal y como se muestra en la *figura* 1 y 2 de esta sección.

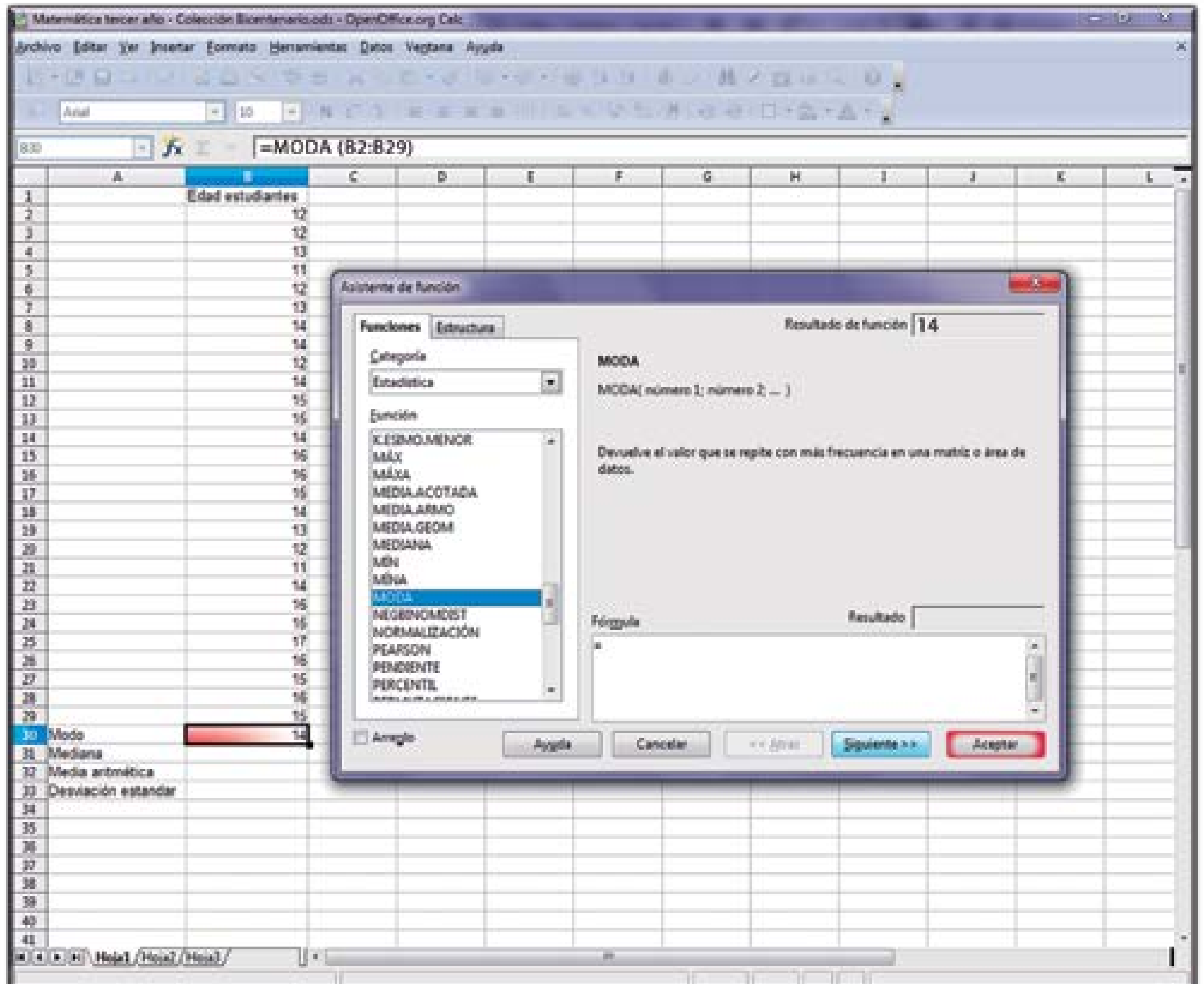


Figura 2. Pantalla del computador que muestra el resultado del Modo luego de dar las instrucciones.

Cuando se trabaja con la hoja de cálculo ésta va a reseñar el valor más bajo del Modo, así que debemos estar atentos a esto.

Para obtener la Mediana, se procede de la misma manera: se ubican en la celda justo al lado de donde escriban mediana, marcan el ícono de *fx*, para desplegar la ventana del asistente, escogen la categoría Estadística, seleccionan la función Mediana, marcan siguiente, le suministran las coordenadas de la variable que se quiere analizar, para nuestro ejemplo siguen siendo las mismas (*b*2:*b*29) para ustedes dependerá de la cantidad de valores que estén procesando y de la ubicación que le den en la hoja de cálculo, y al cliquear *Enter* aparecerá el resultado en la celda respectiva.

Una ganancia en este caso es que no necesitamos ordenar nuestros valores previamente, ya que la computadora hace ese proceso de manera inmediata y sin que nos demos cuenta. Lo cual ahorra tiempo en el procesamiento y cálculo, tiempo que necesitaremos para analizar los resultados que obtengamos.

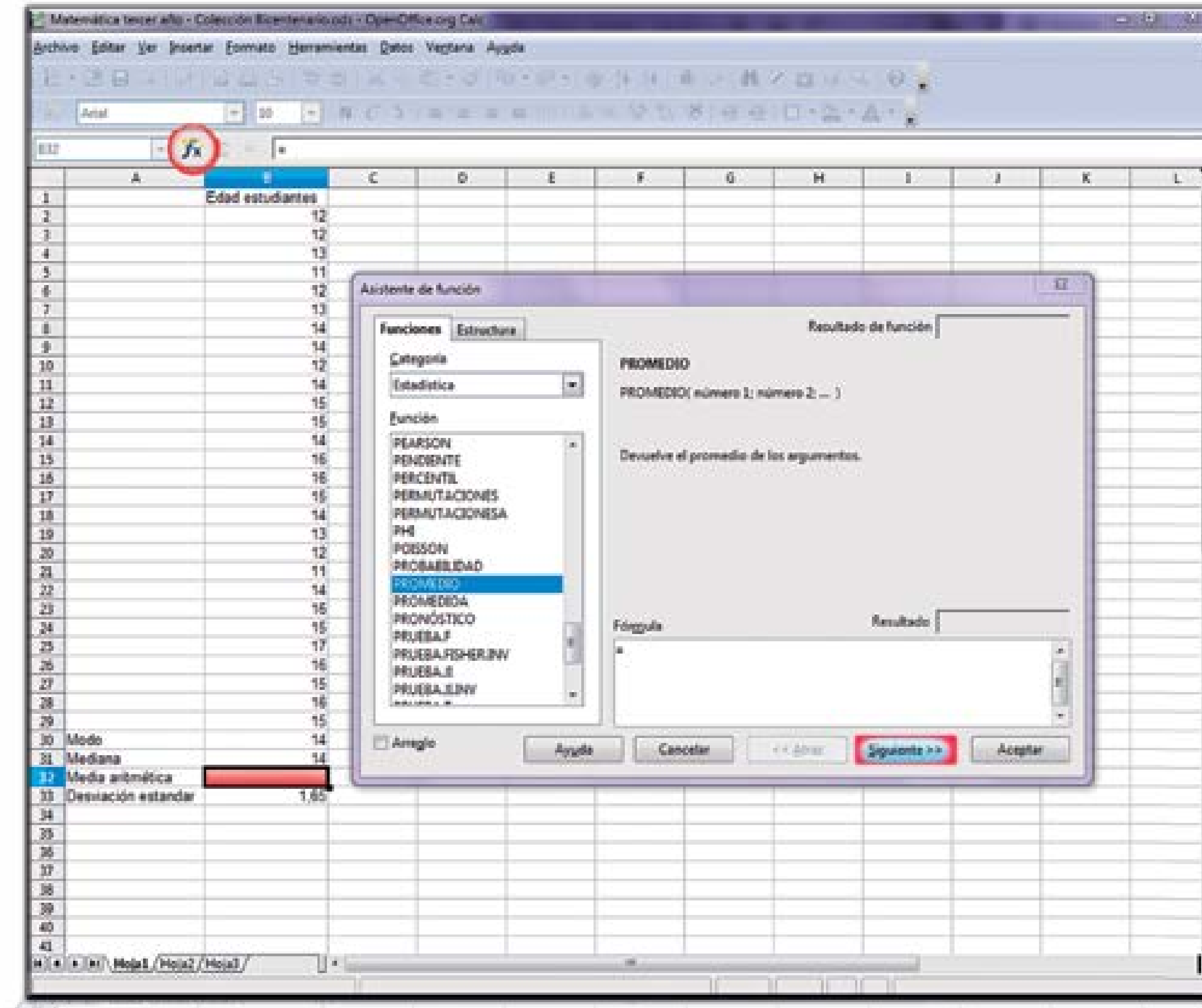


Figura 3. Pantalla que muestra los comandos para calcular la media aritmética.

En el caso de la Media aritmética se trabajará con el comando Promedio, siguiendo las mismas instrucciones que se dieron para la Mediana y el Modo. La pantalla ofrece los comandos previos. En la *figura* 3 aparece el resultado de esta medida.

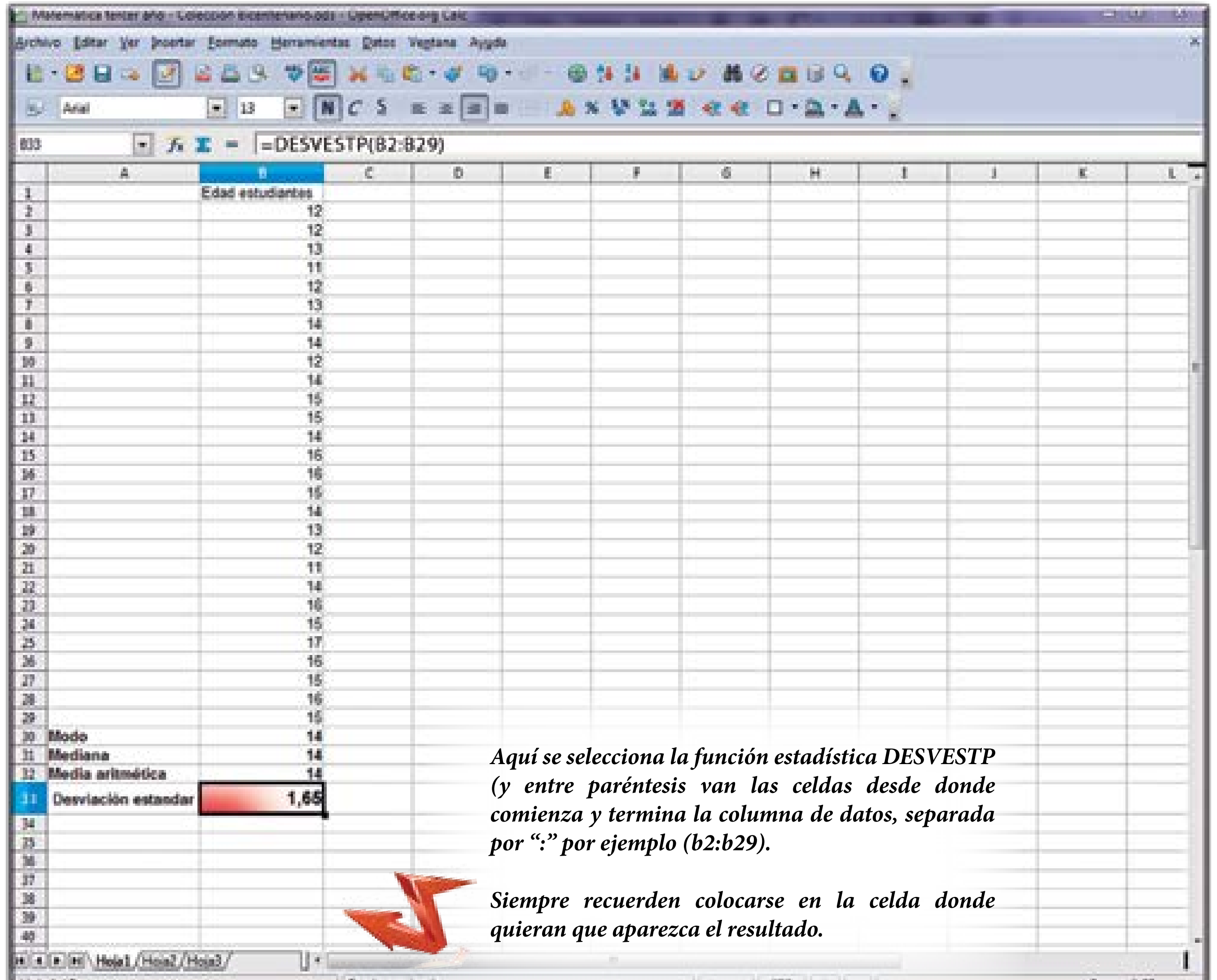


Figura 4. Pantalla que muestra los comandos para calcular la desviación estándar.

Observen en la pantalla dos comentarios que permiten decidir cuál es el comando apropiado para calcular la Desviación Estándar y que nos suministre el mismo valor, sea hecho por nuestra cuenta, con ayuda de la calculadora o de este tipo de hoja de cálculo.

Como habrán notado, los resultados obtenidos con este paquete de cálculo coinciden con los que obtuvimos a lo largo de esta lección.

Actividades

1. Queda entonces de su parte, construir el instrumento apropiado para la recolección de datos ligados a la distribución del tiempo diario que hacen las personas que se planteó al inicio de esta lección, calcular y analizar las medidas de Tendencia Central (como el Modo, la Mediana y la Media aritmética) y obtener y analizar la Amplitud y la Desviación estándar (como medidas de la variabilidad de los datos).

2. Comparen los resultados obtenidos y logren concluir en qué dedican más tiempo las personas encuestadas en: estudiar, trabajar, distraerse, dormir u otra.

3. Elaboren una cartelera alusiva a los resultados obtenidos y aspectos teóricos sobre el uso del tiempo libre para cada etapa de la vida. De igual forma, investiguen los cambios que han impulsado nuestras leyes para la formación integral del hombre y de la mujer.

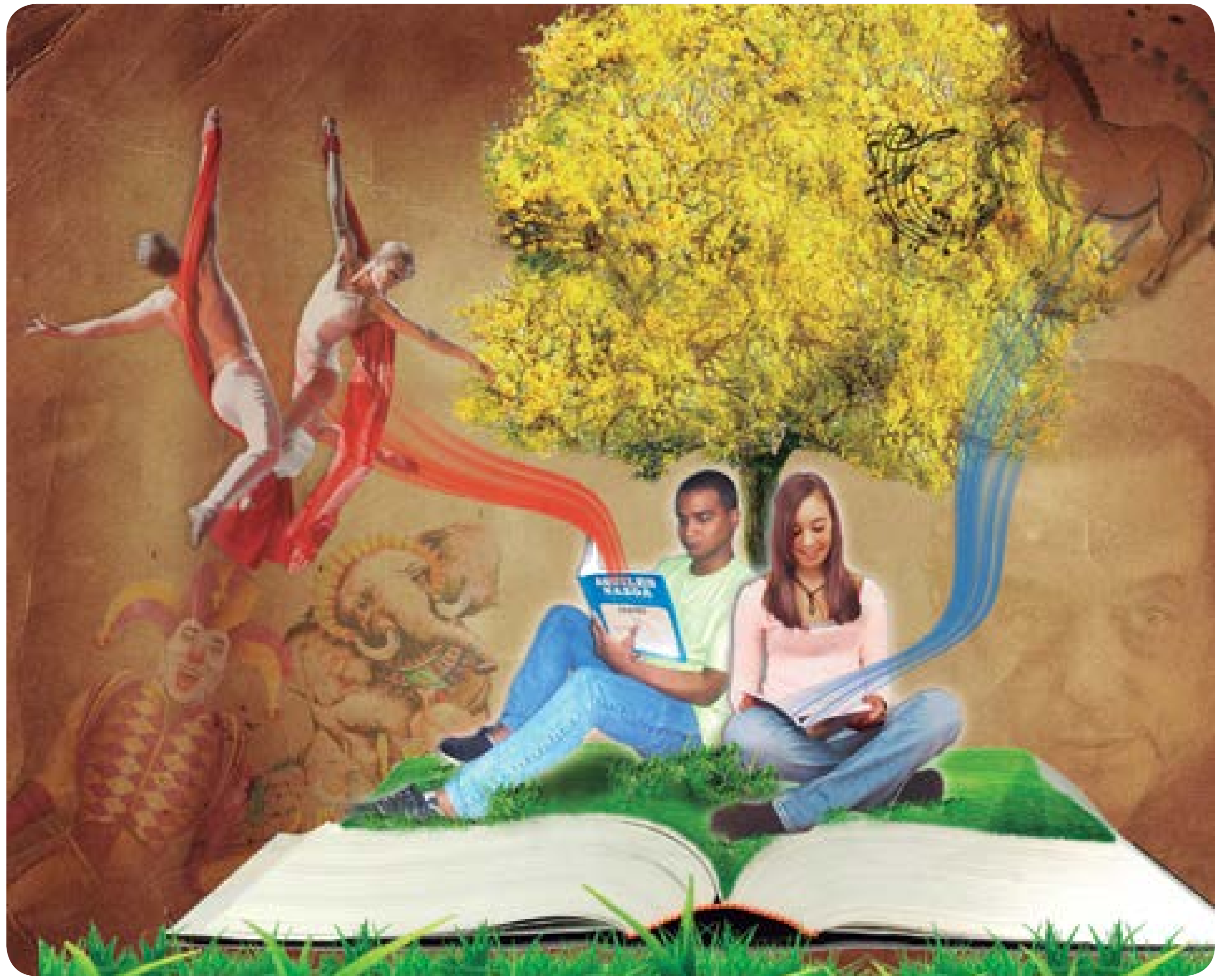
Recuerden, las ideas que damos en esta lección pueden ser asumidas por ustedes y su profesora o profesor de Matemática, pero es fundamental que puedan aplicar estos conocimientos a otras situaciones que necesitamos entender como estudiantes que nos estamos formando para ser cada vez mejores ciudadanos, para nuestro país, para Latinoamérica, el Caribe y para el mundo.

Casa natal de Juan Bautista Arismendi
Edo. Nueva Esparta

13

OCIO DIGNO

Variaciones, combinaciones y permutaciones. Probabilidad de un evento



El tiempo llamado "ocio digno"

En la llamada antigua Grecia los habitantes que tenían más poder adquisitivo disfrutaban diariamente de un tiempo libre para actividades como la música, la lectura, el deporte, la filosofía y la formación política. Este tiempo era conocido como "ocio digno" y de ninguna manera significaba no hacer nada. En la actualidad, este tiempo libre es considerado como parte fundamental en la vida humana y a tal punto es discutido y considerado como un derecho de todas y todos.

En nuestro país, dados los cambios ocurridos en los últimos años, este tema se retoma con más fuerza dentro de un marco de producción económica y de relaciones sociales de igualdad, que permita el gozo y disfrute de este valioso derecho. El goce de este derecho nos permitirá una verdadera liberación como seres humanos, en armonía con nuestro entorno natural y social, y nos conducira a la máxima felicidad social tal como lo expresa el Proyecto Nacional Simón Bolívar.

A este respecto sería interesante comparar las Leyes del Trabajo promulgadas en los últimos 40 años, la reforma de 1997 y la novísima LOT del año 2012, y verificar cómo se ha planteado a lo largo del tiempo la posibilidad de disfrute de tiempo libre, para un ocio digno para todos, y todas como el que disfrutaban en aquel entonces sólo una parte privilegiada de la población.

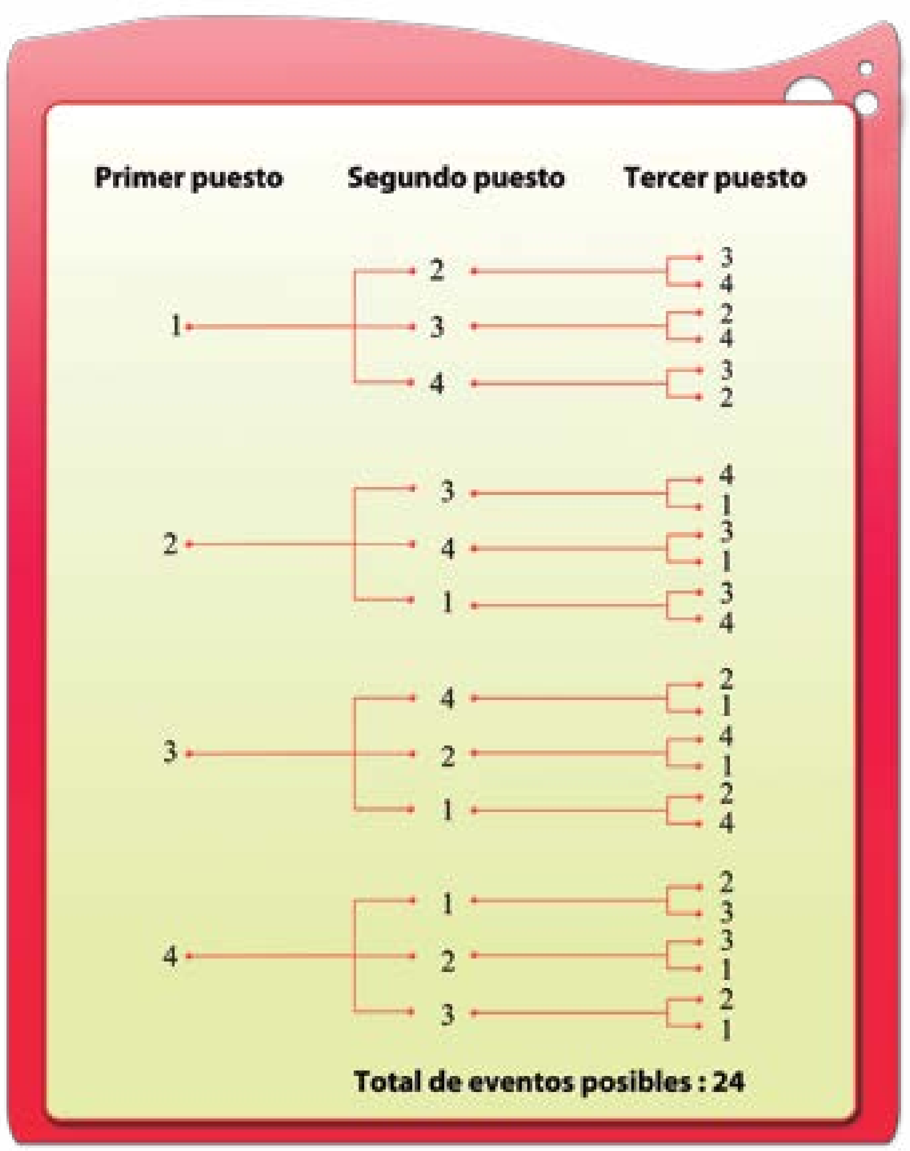
En esta lección vamos a estar aprendiendo algunos aspectos relacionados con la posibilidad de disfrutar del tiempo libre, las actividades que pueden hacerse y medir la posibilidad de ocurrencia de eventos ligados al ocio digno, aspectos en los que la matemática y en particular la Teoría de la Probabilidad son de mucha utilidad.

Muchas veces para el cálculo de la probabilidad necesitamos conocer la cantidad total de los resultados posibles y la de los eventos que interesan. Para esto necesitamos algunas herramientas de conteo, en el libro de segundo año de Educación Media se explicó el uso de las permutaciones como una manera de obtener estos datos. Ahora veremos otras formas que pueden ser necesarias para realizar estos cálculos.

Si como parte del uso del tiempo libre, ustedes practican algún deporte como atletismo o sólo juegan a las carreras, veamos esta situación. En una carrera en la que participan cuatro de ustedes, ¿de cuántas formas distintas se pueden establecer los tres primeros puestos?

- Aquí cada corredor sólo puede aparecer una vez.
- Influye el orden de llegada.
- Se incluyen sólo tres de los cuatro corredores.

Resolver este problema puede hacerse con el uso del diagrama de árbol:



En este diagrama de árbol aparece en el primer puesto la posibilidad de que cualquiera de los cuatro jóvenes que corran lleguen de primero, para el segundo lugar, quedarían los que no llegaron en el primer puesto, por eso ese número no aparece en las posibilidades del segundo lugar, es decir, cuando el número 1 llegó de primero no aparece ni en el segundo, ni en el tercer lugar, pero se dan todas las posibilidades de combinatoria de los restantes.

Otra manera de contar el total de posibles resultados es a partir de las nociones de **combinatoria**.

Por las características de este problema se puede aplicar la fórmula de Variación:

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Esto se lee como "variaciones de 4 tomados de 3 en 3". Y nos dice que si tenemos 4 elementos distintos y nos interesan grupos de tres (los tres primeros puestos) formados con esos cuatro elementos y en los que si algún elemento o su orden es distinto, esto forma a otro grupo, se multiplicarán las posibilidades de los cuatro corredores por números inmediatamente inferiores, tantas veces como grupos interesen, por eso se multiplica $4 \cdot 3 \cdot 2$.

Si hubiesen interesado los dos primeros puestos, sería entonces, para este ejemplo:

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$ variaciones posibles.

Si se dispone de m elementos distintos $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Se llaman variaciones de estos m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) a los distintos grupos de n elementos formados con los m, considerando dos grupos distintos si difieren en algún elemento o en su orden. Las **variaciones** se caracterizan en que:

- No se repiten los elementos.
- Influye el orden.
- En cada grupo no están incluidos todos los m elementos, a menos que $n = m$.

Y se expresa a través de la ecuación:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)$$

Para la realización de este libro, se le encargó a la diseñadora gráfica Mariana la elaboración de un logotipo y se le indicó que tiene que seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis.

¿Entre cuántos grupos de colores puede decidirse la diseñadora Mariana?

¿Creen que se pueda dar respuesta por medio de las variaciones?

En este caso, los colores no se pueden repetir, no influye el orden de los colores seleccionados y sólo se incluyen 3 de los seis colores.

De tal manera que al no influir el orden de los colores, no es pertinente utilizar las variaciones y como sólo se toma una parte de los m elementos tampoco puede calcularse por permutaciones.

Corresponde entonces aplicar una forma de conteo que se llama **combinación**.

Una **combinación** se denota como $C_{m,n}$ al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n.

$$C_{m,n}=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

En esta fórmula $m!$ se lee "m factorial" y se refiere a la multiplicación sucesiva de un número por los enteros positivos inmediatos inferiores hasta llegar a 1, es decir:

$$m!=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots(m-m+1)$$

y se aplica cuando,

- No se repiten los elementos.
- No influye el orden.
- En cada grupo no están incluidos todos los m elementos, a menos que:

$$n=m$$

Para el caso que nos interesa la combinación sería:

$$C_{6,3}=\frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3!\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=\frac{120}{6}=20$$ grupos de colores.

Ahora, conformen tríos para resolver estas actividades:

- Si tuviesen que elegir a un delegado o delegada y a un subdelegado (a) de su curso, ¿de cuántas formas distintas puede ser elegido o elegida? Si en tu liceo hay 11 docentes para el tercer año y dicen que tienen que conformar un comité de 5 docentes de ese año para organizar el aniversario del liceo, ¿Cuántos comités de docentes pueden conformarse? José Esteban no puede salir a jugar hasta que ordene su cuarto. En su biblioteca hay un tramo destinado a los 19 libros que ha leído, pero siempre le gusta colocar a "100 años de soledad" de primero y a "La historia sin fin" de tercer lugar, ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse los otros libros?

Reflexionen si es correcto que usemos nuestro tiempo libre siempre que hayamos cumplido con nuestras obligaciones, en la casa, en los estudios, en el trabajo.

Hay casos en los que no sólo nos interesa saber cuántos casos posibles hay en una situación aleatoria o el número de casos deseados que se pueden tener, sino también se quiere conocer la probabilidad de que ocurra un determinado evento. Por ejemplo, si una pareja y tres amigos van al cine y se sientan juntos en una misma fila de manera aleatoria ¿cuál es la probabilidad de que los dos miembros de la pareja se sienten uno junto al otro?

En este ejemplo tenemos que los amigos se sientan en el cine en hilera por lo que aplicaríamos una permutación sin repetición de 5 elementos:

$$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$$ posibles colocaciones.

Aclaramos aquí que una permutación es también una variación donde intervienen todos los elementos. Una permutación es, entonces, un caso particular de una variación.

Como todas estas formas de colocarse son igualmente probables, el espacio muestral es finito y equiprobable, con lo que se puede utilizar la regla de "*Laplace*" para el cálculo de probabilidades.

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables a la condición "}A\text{"}}{\text{número total de posibles resultados del experimento aleatorio}}$$

Para contar los casos favorables asumiremos a la pareja como un único elemento y de esta forma la permutación de 4 elementos (de tres amigos y una pareja) dan como resultado $P4 = 4! = 24$. Permutando la colocación de las dos personas que forman la pareja tendremos $2 \cdot 24 = 48$ casos favorables. De tal manera, la probabilidad de que la pareja se siente junta en el cine (evento A), es:

$$P(A) = \frac{48}{120} = 0,4$$

lo que se consideraría como una mediana probabilidad de que esta pareja se siente junta en el cine.

La probabilidad es una medida de la posibilidad de ocurrencia de un evento, y puede suministrar valores que van del 0 al 1, inclusive, de aquí que se indique como *Axioma* 1 que:

$$0 \leq \Pr(x) \leq 1$$

donde $\Pr(x)$ se lee "probabilidad de ocurrencia del evento x". Esta probabilidad es mayor o igual a cero pero menor o igual a uno.

Si el evento tiene $\Pr(x) = 0$ se dice que el evento es imposible. Si la $\Pr(x) = 1$ el evento es seguro que ocurra, los valores intermedios indicarán si hay poca, mediana o mucha probabilidad de ocurrencia.

Examinemos esta situación: en una empresa sus trabajadores han elaborado un informe de las actividades que ellas y ellos realizan en su tiempo libre. Los resultados mencionan, entre otros, que el 30% de las y los trabajadores practican algún deporte, el 25% dedica varias horas semanales a la lectura y únicamente el 10% realiza ambas aficiones.

Si con sus conocimientos de matemática les piden que ayuden a un grupo de miembros del Consejo Comunal cercano a enriquecer el uso del tiempo libre en esa empresa y quieren determinar:

- El porcentaje de trabajadores que sólo practican deporte en sus ratos de ocio.
- El porcentaje de empleados que ni leen ni realizan actividades deportivas.

¿Qué responderían ustedes? Debatan en pequeños grupos las respuestas a estas dos solicitudes, argumenten matemáticamente sus decisiones y compártanlas con el resto del curso, preferiblemente en la clase de matemática.

Veamos algunos elementos que deben ser considerados a la hora de dar respuesta a las dos solicitudes. En la primera que se refiere al porcentaje de trabajadores que sólo practican deporte en sus ratos de ocio, contamos con un espacio muestral conformado por los que practican algún deporte, vamos a denotarlo $\boldsymbol{D}$, los que dedican varias horas semanales a la lectura, a este suceso lo denotaremos como $\boldsymbol{L}$ y hay una conjunción en la que están los que practican deportes y leen varias horas a la semana ($\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{L}$).

Una solución gráfica de este problema se basa en representar en una región el 100% de los trabajadores de esta empresa. Y luego las regiones que corresponden a los que hacen deportes, a los que leen y finalmente al porcentaje de los que hacen deportes y leen.

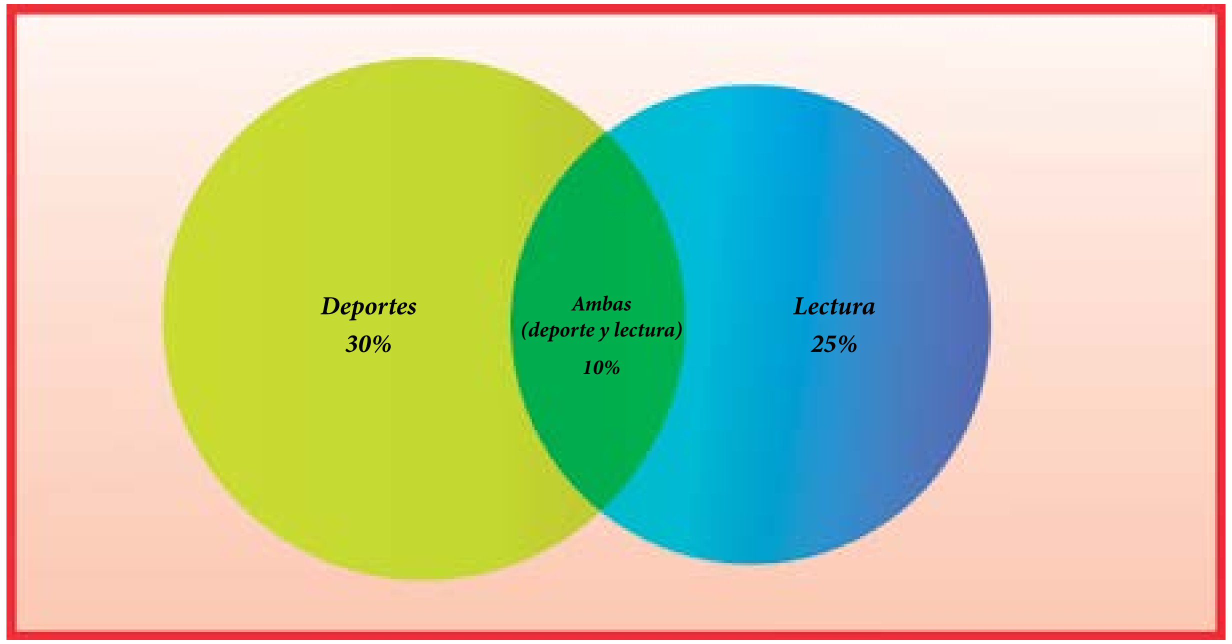


Gráfico de Venn que muestra el porcentaje de trabajadores y trabajadoras que hacen deporte, disfrutan de la lectura o ambas actividades.

Con la información que nos brinda este gráfico, notamos que para responder la primera pregunta debemos restar $30\% - 10\%$. Es decir, sólo un 20% hace exclusivamente deportes.

Otra forma de resolver este problema es razonando de la siguiente manera: cuando nos piden determinar el porcentaje de los que sólo practican deporte podemos caer en la tentación de decir que es el 30% que nos suministraron como dato los trabajadores de esa empresa, pero debemos considerar también a quienes practican deporte y leen $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{L}$ (10%), ya que en ese grupo también se encuentra un porcentaje de quienes practican deportes. Es así que el suceso "sólo practicar deportes en los ratos de ocio" es:

$\boldsymbol{D}$ – ($\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{L}$), es decir $(30\% - 10\%) = 20\%$

Por lo tanto, el 20% de las y los trabajadores de esa empresa dedica su tiempo libre sólo a practicar deportes.

Los porcentajes que hemos estado trabajando vienen a ser frecuencias relativas porcentuales, que nos indican por ejemplo para el resultado recientemente obtenido, que por cada 100 trabajadoras o trabajadores de esa empresa, 20 sólo practican deportes en su tiempo de ocio. El porcentaje también puede expresarse como una medida de la posibilidad de ocurrencia del evento, si es expresada en decimales, sería 0,30 para ***D***; 0,25 para ***L*** y 0,10 para ***D*** y ***L***. El resultado que obtuvimos para la primera solicitud, se expresaría como 0,20 e indica que hay poca probabilidad de que se encuentren trabajadores o trabajadoras que sólo practiquen deportes en esa empresa.

En el caso del suceso "no leer ni realizar actividades deportivas" que corresponde a la segunda solicitud, este suceso es lo contrario de ***D*** y de ***L***. Para resolver esta inquietud necesitamos utilizar dos axiomas más de la teoría de la probabilidad.

Axioma 2. La suma de las probabilidades de todos los eventos de un espacio muestral es igual a uno.

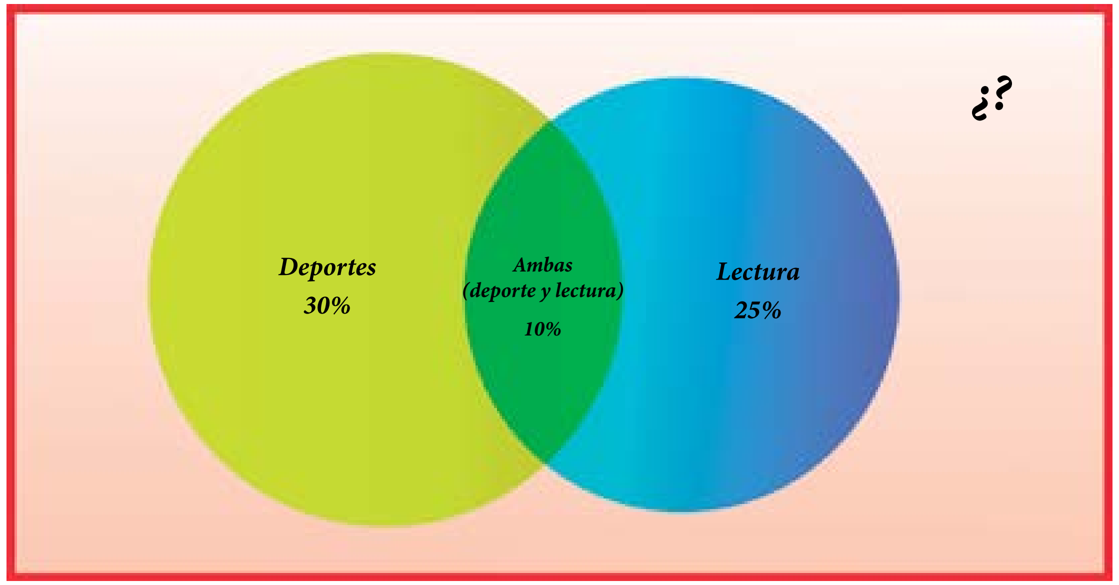
$$\sum \Pr(x) = 1$$

Y el *Axioma 3*: que indica que todo evento x posee un complemento contrario, $\bar{x}$, y la suma de estas dos probabilidades (la de x y la de su contrario $\bar{x}$) es igual a 1.

Entonces:

$$\Pr(\bar{x}) = 1 - \Pr(x)$$

Como nos piden el porcentaje de quienes no leen ni practican deportes, podríamos resolver este problema por varias vías, una es por la vía gráfica.



Consideremos que toda la figura es nuestro espacio muestral y aquí están contenidos todos los trabajadores de esa empresa, por lo tanto es igual al 100% y la zona en color blanco es el porcentaje que nos interesa y por lo tanto es nuestra incógnita. A este 100% le restamos el porcentaje de los que practican deportes y los que leen, esto sería 100 – 30 – 25 = 45%, sin embargo hay una zona de intersección de las dos regiones que corresponde a quienes practican deportes y leen, ya considerados en cada uno de los eventos simples restados (deportes o lectura), por tanto se agrega un 10% a lo sustraído, por esto 45% + 10% = 55% que viene a ser el resultado de esta interrogante.

Otra vía corresponde a la aplicación de la teoría de la probabilidad, aquí el total de trabajadores y las actividades que realizan en su tiempo libre representan el espacio muestral y por axioma 2, vale 1, que equivale a toda la probabilidad posible en esta situación, primero debemos buscar el complemento de ***D*** y ***L***.

Por el axioma 3, la probabilidad del complemento de ***D*** y L sería:

$$1 - (\boldsymbol{D} \text{ o } \boldsymbol{L}) = 1 - Pr(\boldsymbol{D}) - \Pr(L) + Pr(\boldsymbol{D} \text{ y } \boldsymbol{L})$$
$$1 - (\boldsymbol{D} \text{ o } \boldsymbol{L}) = (1 - 0{,}30 - 0{,}25) + 0{,}10 = 0{,}55$$

Por la vía del contrario podríamos haber aplicado:

El contrario de ***D*** = 0,30 es 1 – 0,30 = 0, 70 *Pr* (*contrario de* ***D***) = 0,70
El contrario de ***L*** = 0,25 es 1 – 0,25 = 0, 75 *Pr* (*contrario de* ***L***) = 0,75

De esta manera el evento compuesto por los contrarios de ***D*** y ***L*** requiere que restemos la unión de estas dos probabilidades a 1 (0,7 + 0,75 –1) + 0,10 = 0,55

Ahora ustedes obtengan la probabilidad de que en esa empresa se seleccionen trabajadoras y trabajadores que sólo dediquen varias horas semanales a la lectura. Pueden usar las vías que se les han enseñado en esta lección o cualquier otra que consideren apropiada para la obtención del resultado y que expliquen a sus compañeras, compañeros y profesor o profesora de matemática.

Otra actividad para reforzar estos aprendizajes sería resolver esta nueva situación.

De los datos obtenidos en la recolección aplicada por estudiantes de tercer año, se sabe que en una comunidad el 30% de sus habitantes compran habitualmente discos de música salsa, el 20% de baladas y el 15% de rock. También se supo que el 5% compra discos tanto de baladas como de salsa, el 7% de salsa y de rock, el 6% balada y rock, y el 1% de los tres tipos.

Mariangee Bogado, lanzadora de la selección venezolana de softbol

Calculen:

- El porcentaje de personas que compran discos de balada y no de rock.
- La probabilidad de que hayan personas que compren discos de salsa, o bien de música de balada y de rock.
- La probabilidad de que las personas compren sólo discos de rock.

Ustedes pueden organizar y denotar a los sucesos de esta forma:

- S, comprar discos de salsa. B, comprar música de balada y R, comprar discos de rock.
- D, comprar salsa y balada. E, comprar salsa y rock. F, comprar balada y rock. G, comprar discos de salsa, balada y rock.

Las respuestas a las preguntas para que puedan orientarse en su resolución son:

a:14%
b: 0,35
c: 0,03

En su calculadora científica verifiquen las teclas que existen para calcular números factorial, combinaciones y permutaciones.

Actividades

1 Procuren calcular algunas de las situaciones planteadas en esta lección, también por esta vía (calculadora) y comparen sus resultados y las ganancias en término de tiempo y comprensión matemática por las diversas vías que se les han enseñado.

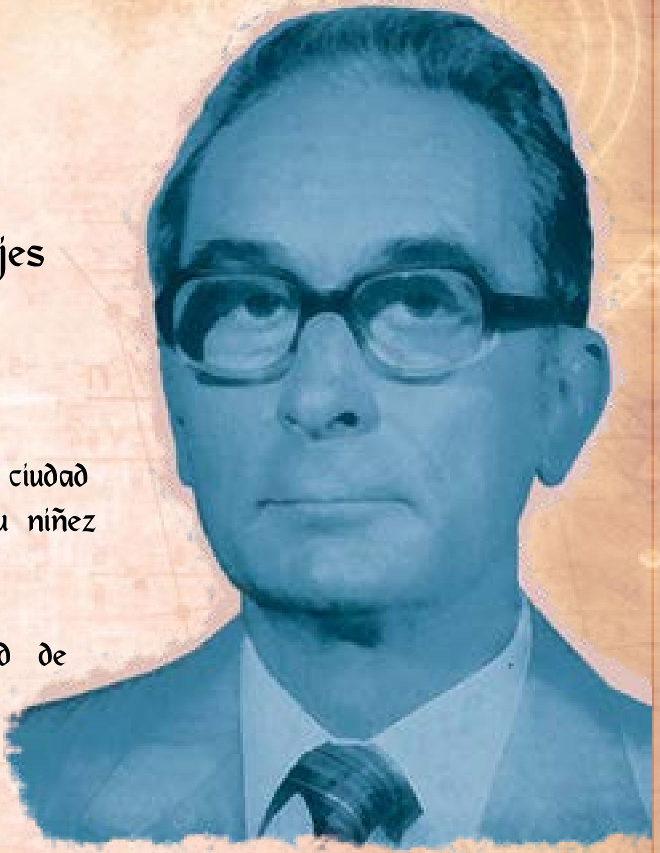
2 En esta lección se han planteado diversas situaciones asociadas a uso de tiempo libre u ocio digno, que muy bien ustedes pudiesen indagar en su sección, año o liceo y ver qué está pasando al respecto, calcular las probabilidades de diversos eventos y si es necesario reflexionar en colectivo y aplicar acciones que mejoren lo que pueda estar pasando con sus tiempos libres, de manera que les permita tener mejor salud física, mental y espiritual.

3 Sería bueno también conversar con personas mayores que ustedes, para ver sus opiniones sobre el tiempo libre y en qué lo ocupan u ocuparían. Indaguen en Internet, sobre el tema y en particular cómo lo utilizan actualmente en los distintos continentes del planeta.

4 Conversen en clases qué opinión les merece que la jornada laboral en nuestro país ahora se reduzca a cinco días a la semana y si esto podría repercutir favorablemente en el uso del tiempo libre, en la formación de un ser social bajo términos de justicia, dignidad y humanidad.

José Giménez Romero

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
José Giménez Romero (1922-2000)



Este matemático y profesor de matemáticas nació en la ciudad de Cartagena (Murcia, España) el 12 de octubre de 1922. Su niñez la pasó en Barcelona (España) y en la isla de Menorca.

Realizó sus estudios universitarios en la Universidad de Barcelona, licenciándose en 1944 en Ciencias Exactas, título que revalida en 1962 en la Universidad Central de Venezuela.

Posteriormente realizó estudios de postgrado en su país natal durante los años 1947-1950, en la misma universidad en la que había cursado su pregrado.

Arribó a nuestro país en 1951, a instancias de la Congregación de los Hermanos de La Salle.

Se inicia temprano en la docencia, labor que comienza en su país natal en el Colegio La Salle de Barcelona (1940-1950).

Al llegar a Venezuela, en 1951, se establece en Valencia laborando en el Colegio La Salle de la capital carabobeña (1951-1952). En 1952 se traslada a Caracas en donde desarrolla una aquilatada labor como profesor en diferentes institutos educacionales, públicos y privados. Entre los primeros están los liceos nocturnos Juan Vicente González y José Gregorio Hernández; entre los segundos están los Colegios La Salle (de Tienda Honda) y Santa Rosa de Lima.

También es amplia su trayectoria como docente universitario. Ésta ya se inició en su patria al ser ayudante de cátedra en la Universidad de Barcelona (1947-1949). En Venezuela ejerce como profesor de educación superior en la Facultad de Agronomía de la UCV (1958-1962); Facultad de Ingeniería de la UCV (1959-1972), siendo Jefe del Departamento de Matemáticas de dicha Facultad entre 1962 y 1966. En este último año es fundada la Escuela Básica de la Facultad de Ingeniería y Giménez Romero es su primer Director (1966-1969).

A partir de 1969 pasa a ser docente de la Universidad Simón Bolívar (USB), donde permanece hasta su jubilación en 1981. Había sido miembro de la Comisión Organizadora de dicha universidad. En la USB dictó diversas asignaturas así como también ejerció cargos directivos de la misma.

En el ámbito de la educación matemática el profesor Giménez Romero fue uno de los integrantes de la delegación venezolana que asistió a la I Conferencia Interamericana de Educación Matemática (Bogotá, 1961), la cual dio pie para la posterior instauración en nuestro país de la Matemática Moderna. Posteriormente nuestro biografiado actuó como consultor de la comisión de reforma de los programas.

Entre 1962 y 1964 se dedicó a la formación de futuros docentes al ingresar al plantel de profesores del Instituto Pedagógico en la ciudad de Caracas.

Tuvo destacada actuación como autor de obras didácticas tanto para el nivel secundario como para el universitario. Entre éstas tal vez la que mayor difusión e impacto tuvo fue su libro para el segundo año del Ciclo Diversificado cuya primera edición data de 1973.

Después de jubilado el profesor Giménez Romero continuó como asesor de las Universidades Metropolitana y Vargas.

Recibió varios reconocimientos: la Orden "27 de junio" y el Premio "Olinto Camacho" del CENAMEC. También la promoción 1966 del Colegio La Salle (Tienda Honda) lleva su nombre.

El Profesor José Giménez Romero falleció en Caracas el 2 de junio de 2000.

FUENTES CONSULTADAS

Biografías

Lola de Fuenmayor Rivera

Carvajal, Laura. Blog: http://venezueladescubierta.blogspot.com/2011/02/lola-fuenmayor.html.
Fuenmayor Pérez, Asdrúbal. (2009). Doña Lola: maestra de Venezuela. Caracas: Universidad Santa María.
Lola de Fuenmayor Rivera (1896 - 1969). Biografía. Página Web: http://www.angelfire.com/ri/lolafuenmayor/.
Doña Lola Rodríguez Rodríguez. Página Web: http://www.sólogenealogia.com/gen/getperson.php?personID=I96976&tree=001.
Magallanes, Manuel Vicente. (1973). Los partidos políticos en la evolución histórica venezolana. Caracas/Madrid: Editorial Mediterráneo.
Mudarra, Miguel Ángel (1988). Lola de Fuenmayor Rivera. En: Mudarra, Miguel Ángel (1988). Semblanza de educadores venezolanos (p. 155). Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Obituario. http://www.obituariosenlinea.com/?module=obituarios&dia=20&mes=02&anyo=2009.
Paiva Palacios, Carmelo. (2007). La ciencia económica y el gremio de los economistas en Venezuela. Caracas: Ediciones del Núcleo de Economistas del Banco Central de Venezuela. Disponible en: http://www.carmelopaiva.com/CsEconyColegiodeEconomista.pdf.
República de Venezuela. Gaceta Oficial 21230 del 15 de octubre de 1943.
República de Venezuela. Gaceta Oficial 28233 del 12 de enero de 1967.

José Luis Faure Sabaut

Briceño Perozo, Mario. (1984). Historia del Estado Trujillo. Caracas: Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia.
Contreras, Benigno. Historia Trujillana. El maestro José Luis Faure Sabaut. Diario El Tiempo. Valera, 26 de noviembre de 2010. http://www.diarioeltiempo.com.ve/V3_Secciones/index.php?id=90162010&_Proc=Desp.
De Hazim, María Virginia. Los 100 Años de la Escuela "Ricardo Labastida» 1910 - 2010. Diario El Tiempo. Valera, 2010. http://www.diarioeltiempo.com.ve/V3_Secciones/index.php?id=171472010&_Proc=Desp.
Faure Sabaut, José Luis. (1935). Nociones elementales de Geometría para los grados 4º, 5º y 6º. Maracaibo: Editorial Hermanos Belloso Rossell.
Freinet, Célestin. (1975). Por una escuela del pueblo. Barcelona, España: Editorial Laia.
Reseña histórica de la Escuela "Ricardo Labastida". Blog: http://uericardolabastida5.blogspot.com/2011/06/resena-historica-de-la-escuela.html.

José Giménez Romero

Giménez, María Isabel. (2012). Comunicación vía correo electrónico.
Giménez Romero, José. (1973). Matemática V. Caracas: Ediciones Vega S. R. L.
Lima de Sá, Eduardo. Nota biográfica. http://www.ma.usb.ve/informacion/gimenez.html.
Orellana Chacín, Mauricio. (1980). Dos décadas de matemática en Venezuela. Caracas: UNA.
Universidad Central de Venezuela. Dirección de Archivo Central. Egresados de la Universidad Central de Venezuela. http://www.sicht.ucv.ve:8080/bvirtual/egresados.jsp.
Universidad Simón Bolívar. Centro de Documentación y Archivo (CENDA). Decanos(as). http://www.cenda.usb.ve/albunes/decanos.

Fotografías

Carátula
Joven en la circunferencia de Vitruvius.
Fotos: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 10 y 12
Construcción de conos y cilindros.
Fotos: Victoria Ruiz.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 17
Joven y helados.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 23
Estudiantes en la heladería.
Fotos: Zaida Chirinos, http://www.avn.info.ve
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 25
Escaleras Yaritagua, Petare.
Foto: Laura Palacios Moya
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 52
Trabajo liberador.
Foto: http://www.avn.info.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 76 y 77
Halando la cuerda.
Fotos: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 100
Tomando medidas: masa y estatura.
Foto: Liceo José Gregorio González.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 102
Nadador Eddy Marín.
Foto: http://www.mindeporte.gob.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 103
Nadadora Andreína Pinto.
Foto: http://www.mindeporte.gob.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 107
Judoca Naomi Soazo.
Foto: http://www.mindeporte.gob.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 111
Estudiantes y profesores.
Foto: Liceo José Gregorio González.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 112
Comiendo mandarinas.
Fotos: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 132
La esperanza de vida.
Foto: http://www.avn.info.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 141
Temperatura de un bebé.
Foto: http://www.avn.info.ve
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 151
La esperanza de vida y sus valores.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 155
Un pueblo vivo.
Fotos: http://www.avn.info.ve/, http://centraldenoticiavenezuela.blogspot.com/ http://albaciudad.org
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 159
Joven en el cuadrado de Vitruvius.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 165
Semejanza de figuras.
Foto: Diseño de Maurits Cornelis Escher .
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 178
Liceo Libertador.
Foto: http://noticiaslibertador.blogspot.com
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 184
Teatro Municipal Ágora y Proyecto Triángulo.
Fotos: http://www.designfun.net/ http://lgarquitectura.wordpress.com
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 199
La groma.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 207
Trabajo con equipos topográficos.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 209
Estudiantes del Liceo Juan Bautista Arismendi.
Foto: Liceo Juan Bautista Arismendi.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 218
Pasillo del Liceo Juan Bautista Arismendi.
Foto: Liceo Juan Bautista Arismendi.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 225
Carrera de atletas.
Foto: http://www.mindeporte.gob.ve.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 229
Jóvenes en el Cine.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

COLECCIÓN BICENTENARIO

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

BERTRAND RUSSELL
Matemático británico

Gobierno Bolivariano de Venezuela | Ministerio del Poder Popular para la Educación