MATEMÁTICA PARA LA VIDA

Matemática

1er AÑO

MATEMÁTICA PARA LA VIDA

1er AÑO

Matemática

COLECCIÓN BICENTENARIO

COLECCIÓN **BICENTENARIO**

Hugo Chávez Frías
Comandante Supremo de la Revolución Bolivariana

Nicolás Maduro Moros
Presidente de la República Bolivariana de Venezuela

República Bolivariana de Venezuela

Tercera edición: Abril, 2014
Convenio y Coedición Interministerial
Ministerio del Poder Popular para la Cultura
Fundación Editorial El perro y la rana / Editorial Escuela

ISBN: 978-980-218-322-7
Depósito Legal: lf5162012370756
Tiraje: 500.000 ejemplares

Corrección, Diseño y Diagramación
EQUIPO EDITORIAL
COLECCIÓN BICENTENARIO

Coordinación de la Serie Matemática
Alí Rojas Olaya

Asesoría General Serie Matemática
Rosa Becerra Hernández
CastorDavid Mora

Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática

Autoras y Autores
Alejandra Renick Hernández
Alí Rojas Olaya
Ana Duarte Castillo
Andrés Moya Romero
Jorge Luis Blanco
José Enrique Fumero
Keelin Bustamante Paricaguan
Norberto Reaño Ondarroa
Orlando Mendoza González
Rosa Becerra Hernández
Vicmar Rodríguez Díaz
Wladimir Serrano Gómez
Zuly Millán Boadas
Ángel Míguez Álvarez
Darwin Silva Alayón
Federico Vásquez Spettich
Hernán Paredes Ávila

Biografías
Walter Beyer

Revisión de Contenido
Andrés Moya Romero
Gabriela Angulo Calzadilla
Rosa Becerra Hernández
Wladimir Serrano Gómez

Ilustraciones
Himmaru Ledezma Lucena
Julio Morales Mosquera
Morely Rivas Fonseca
Rafael Pacheco Rangel

Mensaje a las estudiantes y los estudiantes

En el año 1965, la cantautora chilena Violeta Parra definía el concepto de *estudiantes* con metáforas como "*jardín de las alegrías*", "*pajarillos libertarios que rugen como los vientos*", que son *"la levadura del pan que saldrá del horno con toda su sabrosura"*. Para ustedes hemos escrito este libro pensado como instrumento para la liberación. Hemos puesto nuestro mejor esfuerzo por guiar su educación matemática bajo tres premisas fundamentales: estudiar y reflexionar sobre conceptos matemáticos unidos al contexto y a sus vivencias; reivindicar la matemática como una disciplina, cuyo aprendizaje permite la generación de valores que están acoplados a la formación de ciudadanía y al desarrollo de una verdadera sociedad democrática y participativa; y propiciar que el aprendizaje de la matemática en nuestras aulas, plazas, comunidades y otros lugares de aprendizaje, desarrolle la comprensión de conceptos y procedimientos. Aspiramos que la conjunción de estas tres premisas les permita adquirir el instrumental matemático, tanto desde el aspecto cognitivo como ético, que les exhorte a formar parte activa en la construcción del país, que queremos y merecemos.

Ustedes saben que la educación tiene uno de dos objetivos encontrados; por una parte, contribuir con la emancipación de cada sujeto y la sociedad en general; y por otra, fortalecer las estructuras de dominación imperantes en la mayoría de los países. Las autoras y autores de este libro obviamente votamos por el primero y para ello pretendemos que adquieran y construyan potencialidades, es decir, habilidades, destrezas y conocimientos con los cuales puedan ser parte de la construcción colectiva de un modelo político que garantice la mayor suma de felicidad posible, donde todas las personas podamos vivir bien en un contexto de conciencia, libertad, ética y amplio conocimiento de nuestras culturas.

¡Estudiantes de la Patria Grande!, la matemática es para el pueblo. Es ciencia con conciencia, es elemento para la paz y para la vida en armonía con la naturaleza. Ella la hemos asumido como instrumento para la liberación y para ello repensamos su didáctica. Están invitadas e invitados a modelar, conjeturar, contar, medir, estimar, diseñar, jugar, localizar y argumentar. Resolvamos problemas para la vida que nos inciten a descubrir quiénes somos en una sociedad que ha sido permeada para alejarse de nuestras raíces. En este libro les proponemos un aprendizaje crítico de la matemática, al servicio de la humanidad, que sirva para entender el universo, que acabe con los monopolios ideologizantes, que sea útil para la emancipación, para la autodeterminación de los pueblos, para la transformación social, en suma, que se yerga en humana.

Desde el punto de vista didáctico y pedagógico, este libro lo podrán estudiar siguiendo algunas pautas que hemos diseñado para su mejor provecho. Cada vez que se consigan con esta viñeta será la indicación de una actividad que deberán realizar colectivamente, según las indicaciones de cada lección. La viñeta permite destacar algunas ideas del texto o algunas actividades propuestas.

Mensaje a las profesoras, los profesores y las familias

El maestro venezolano Luis Beltrán Prieto Figueroa en su libro *El Estado docente* nos invita a *luchar por el establecimiento de un régimen de igualdad, donde el poder económico esté en las manos del pueblo mediante el control de las industrias básicas y las palancas del poder económico del crédito, representado en los bancos, donde la tierra laborada por las campesinas y campesinos, organizadas y organizados en grandes cooperativas produzca para todas y todos y no para beneficio de una casta. Una estructura económica así organizada devolvería a la democracia su prístina esencia de régimen de la mayoría organizada de los que generan la riqueza. En ella el pueblo liberado de la coyunda oligárquica puede organizar las escuelas para formar ciudadanas y ciudadanos y no "lacayos sumisos" ni "trabajadores" para producir a las órdenes de un amo*.

Este libro ha sido escrito y pensado como instrumento para la liberación. En él está el contenido matemático inherente a este primer año de Educación Media General, sólo que lo abordaremos juntos partiendo de un tema generador de aprendizaje y enseñanza, surgido de nuestra propia realidad. La matemática constituye una poderosa herramienta para la descripción del mundo, sus fenómenos, relaciones y problemas.Sin embargo, tradicionalmente su didáctica se signa por el énfasis en los algoritmos y las fórmulas, por la desconexión de la actividad matemática que desarrollan las y los adolescentes con la realidad, el mundo y sus problemas, y por el trabajo individual como única forma de alcanzar el aprendizaje. La educación matemática, en el contexto venezolano y nuestramericano (latinoamericano y caribeño), debe trascender estos fines y constituirse en un medio para impulsar el desarrollo humano, social, cultural, político y económico de nuestros pueblos, tal como se proyecta en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela.

Tanto las catorce lecciones como las tres biografías de este texto escolar responden clara y científicamente a las necesidades, intereses e intencionalidades de la educación que tanto hemos soñado durante muchos años y que nos legara el padre de la pedagogía nuestramericana Simón Rodríguez. El libro, fiel a la Colección Bicentenario, toma en cuenta, fundamentalmente, los siguientes grandes principios de la educación emancipadora: los vínculos entre el saber y el trabajo; la praxis como constructo en el que no se concibe el divorcio entre teoría y práctica; la comunión con otras áreas de aprendizaje; su ejercicio centrado en valores sociocomunitarios; y su acción en convivencia con la naturaleza.

Siéntanse orgullosas y orgullosos del rol que se les ha encomendado, de seguir el ejemplo de Bolívar y Rodríguez. *Contemplen de cerca a sus hijas, hijos y estudiantes, sigan sus pasos con avidez, formen sus corazones para la libertad, para la justicia, para lo grande, para lo hermoso. Vean sus conductas, sus pensamientos escritos, sus almas pintadas en el papel, para que algún día puedan decir: yo sembré esta planta; yo la enderecé cuando tierna: ahora, robusta, fuerte y fructífera, he ahí sus frutos; ellos son míos: yo voy a saborearlos en el jardín que planté: voy a gozar a la sombra de sus brazos amigos.* **(Adaptación de carta de Bolívar a su maestro Simón Rodríguez)**

Índice

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
"Los primeros hijos del Padre Pedagógico" (1943)

En 1935, a la muerte del dictador Juan Vicente Gómez, Venezuela se encontraba en un profundo atraso en todos los ámbitos, particularmente en el educativo. Para ese momento existían muy pocos planteles de educación secundaria en el país y no había un personal preparado e idóneo para ejercer la docencia en ese nivel educativo, ni institución alguna que los formara.

El nuevo gobierno, encabezado por Eleazar López Contreras, enfrentado a la presión social, estuvo obligado a realizar un buen número de reformas. En lo que concierne al campo educacional se vio la necesidad de crear una instancia que formara profesores para educación secundaria y normal. En razón de esto, el 30 de septiembre de 1936 se firma el decreto de creación del Instituto Pedagógico Nacional (IPN) con rango de Escuela Normal Superior. El 16 de octubre se inaugura la institución y la primera clase es dictada el 9 de noviembre de ese mismo año. Su primer director fue el insigne educador Alejandro Fuenmayor.

A pesar del gran entusiasmo de sus primeros alumnos y profesores, el IPN se vio enfrentado, en los tiempos que siguieron, a una fuerte crisis que por poco le hace sucumbir. Esto conllevó a que los primeros alumnos del IPN no pudieran graduarse en el tiempo reglamentario de tres años, hasta que la nueva Ley de Educación, promulgada en 1940, resolvió el dilema legal que envolvía a la naciente institución. Pero para graduarse, las normas establecieron que los cursantes debían presentar un examen integral y defender una tesis, lo cual hizo que la culminación de estudios no fuese simultánea para todo el grupo. Así que los primeros títulos fueron emitidos a partir del 5 de enero de 1942, y no hubo, en consecuencia, un acto formal de graduación, en ese entonces. Sin embargo, la comunidad del IPN decidió, en 1943, la realización de una graduación formal -con toga y birrete- con el contingente de alumnos que hasta ese momento había culminado sus estudios. Dicho acto se llevó a cabo el 23 de junio de 1943, con la presencia del presidente Isaías Medina Angarita y de su ministro de Educación, Dr. Rafael Vegas, quienes hicieron entrega de los respectivos diplomas.

Este grupo humano tuvo una significativa influencia en la Venezuela de los siguientes años, tanto en la educación como en lo político y en lo gremial. Muestra de ello es que el día anterior al acto decidieron crear el Colegio de Profesores de Venezuela.

En la foto aparecen 31 de los 33 graduandos que fueron las primeras y los primeros egresados de la novel casa de estudios. Ellos representan los primeros hijos del “Padre Pedagógico”, como gusta llamarlo el gran criminólogo venezolano Elio Gómez Grillo. Esta promoción estuvo conformada por profesionales de diversas especialidades, entre las cuales estaban la Matemática y la Física. Estos últimos representaban la tercera parte de los graduandos.

Inicialmente, la promoción no tenía denominación y se le conoció cariñosamente como la “Promoción sin nombre”. Pero, dada la muerte prematura de uno de sus integrantes -Hugo Pérez Rodríguez- se la bautizó con su nombre como homenaje.

Otro momento luctuoso, el 8 de abril de 1947, lo constituyó la muerte, en el accidente aéreo de Las Pavas, de la profesora Mireya Vanegas, cuando un grupo de alumnos y profesores de los Liceos Aplicación y Luis Razetti, entre los cuales estaba ella, venía de regreso de Cumaná, con motivo de un intercambio deportivo con el Liceo Antonio José de Sucre. ¡Una lamentable pérdida para el país!

1 A LA VUELTA DE LA ESQUINA

Sistema de coordenadas cartesianas

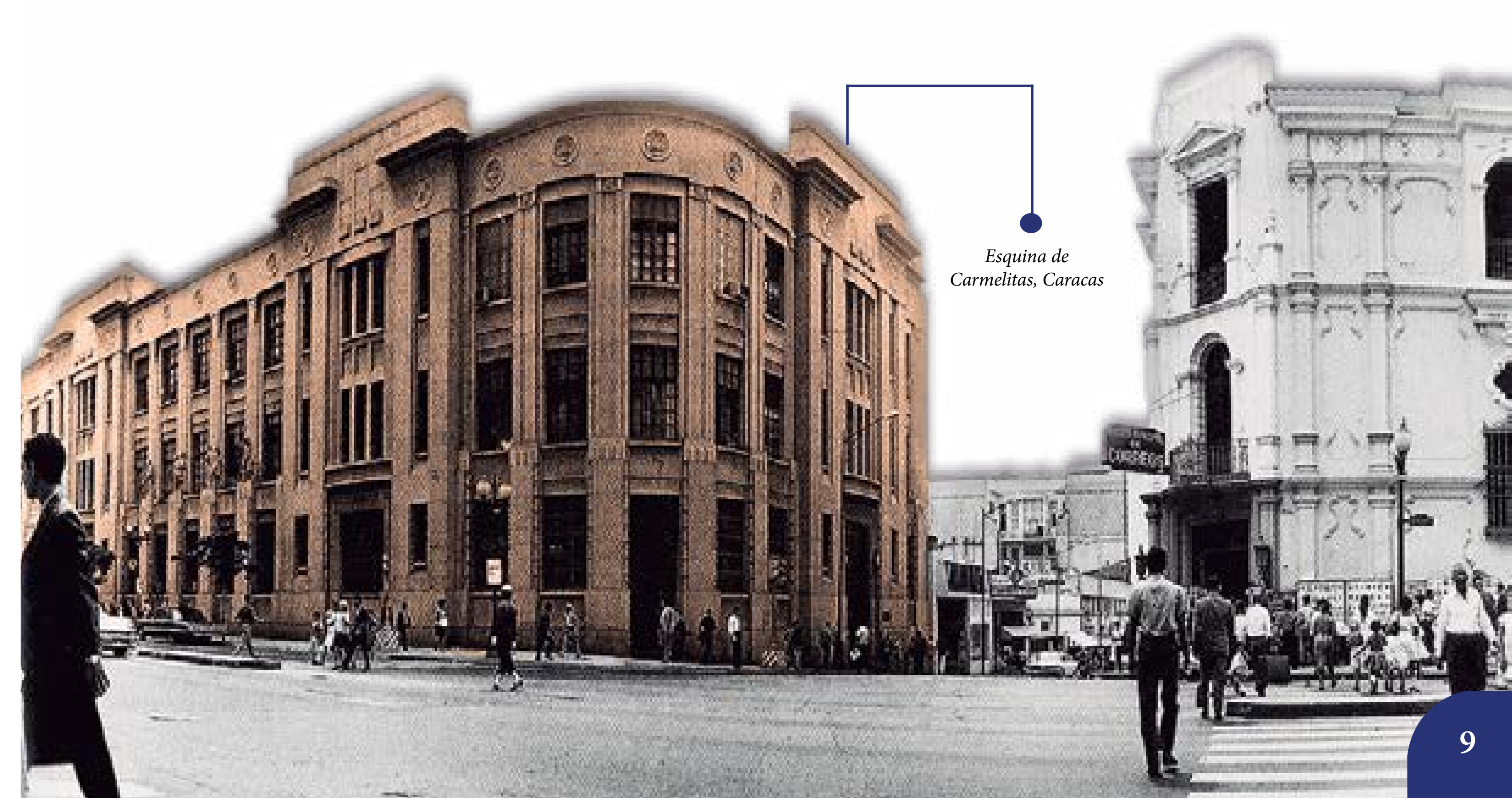
Esquina Principal, Caracas

La ciudad como un sistema de referencia

En muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, cuando pedimos o damos una dirección, para la entrega de encomiendas o para la identificación precisa de cada parte de la ciudad, es necesario dar referencias en función de ciertas características del contexto. Es el caso de la topografía, presencia de ciertas estructuras arquitectónicas de nuestro patrimonio cultural, de algún árbol simbólico, de lugares marcados por la historia patria, entre otros. En la ciudad de Caracas, en parte de sus parroquias, estas referencias son los nombres de las esquinas. Esta peculiaridad (el hecho de que sus esquinas posean nombres), hasta donde se tiene información, sólo se presenta en el casco histórico y en parroquias aledañas de Caracas, mas no en otras ciudades y países.

No todas las parroquias del hoy llamado municipio Libertador tienen esquinas con nombres; sólo las de Catedral, Altagracia, Candelaria, Santa Teresa, La Pastora, y algunas de Santa Rosalía, San Agustín y San José.

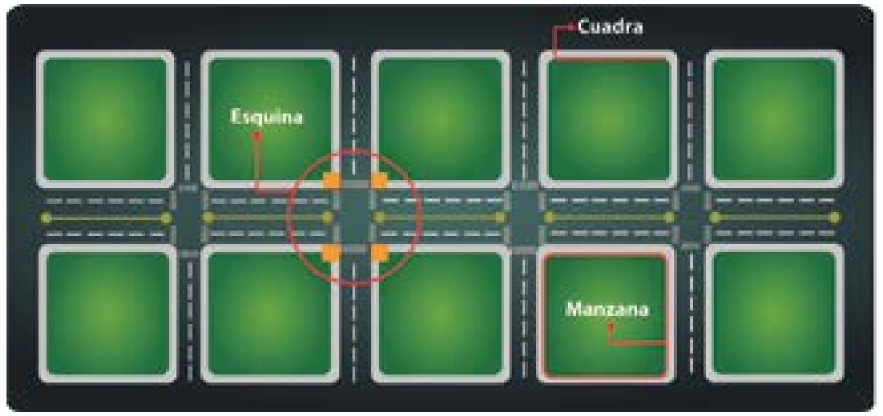
MUNICIPIOS Y PARROQUIAS DE CARACAS



Esquina de Carmelitas, Caracas

Esquinas, cuadras y manzanas

Regularmente, se entiende por esquina la que forman dos paredes cuando rematan la acera y terminan las calles. En el imaginario colectivo caraqueño, una esquina está determinada por la intersección de dos calles o avenidas.



Antes de seguir, les pedimos que respondan las siguientes preguntas:

- ¿Qué esquinas conocen?
- ¿Con qué forma geométrica relacionan una esquina?
- ¿Qué es una cuadra? ¿Qué es una manzana?

Además, salgan a la calle y recorran el perímetro de varias manzanas.

- Construyan un croquis de estas manzanas usando regla y escuadra.

Esquina de Ferrenquín,
La Candelaria, Caracas

El sistema de coordenadas lineal

En el sistema de coordenadas lineal, podemos escoger un punto como **origen**, a partir del cual se describen todos los demás que se encuentren en la recta que hemos considerado.

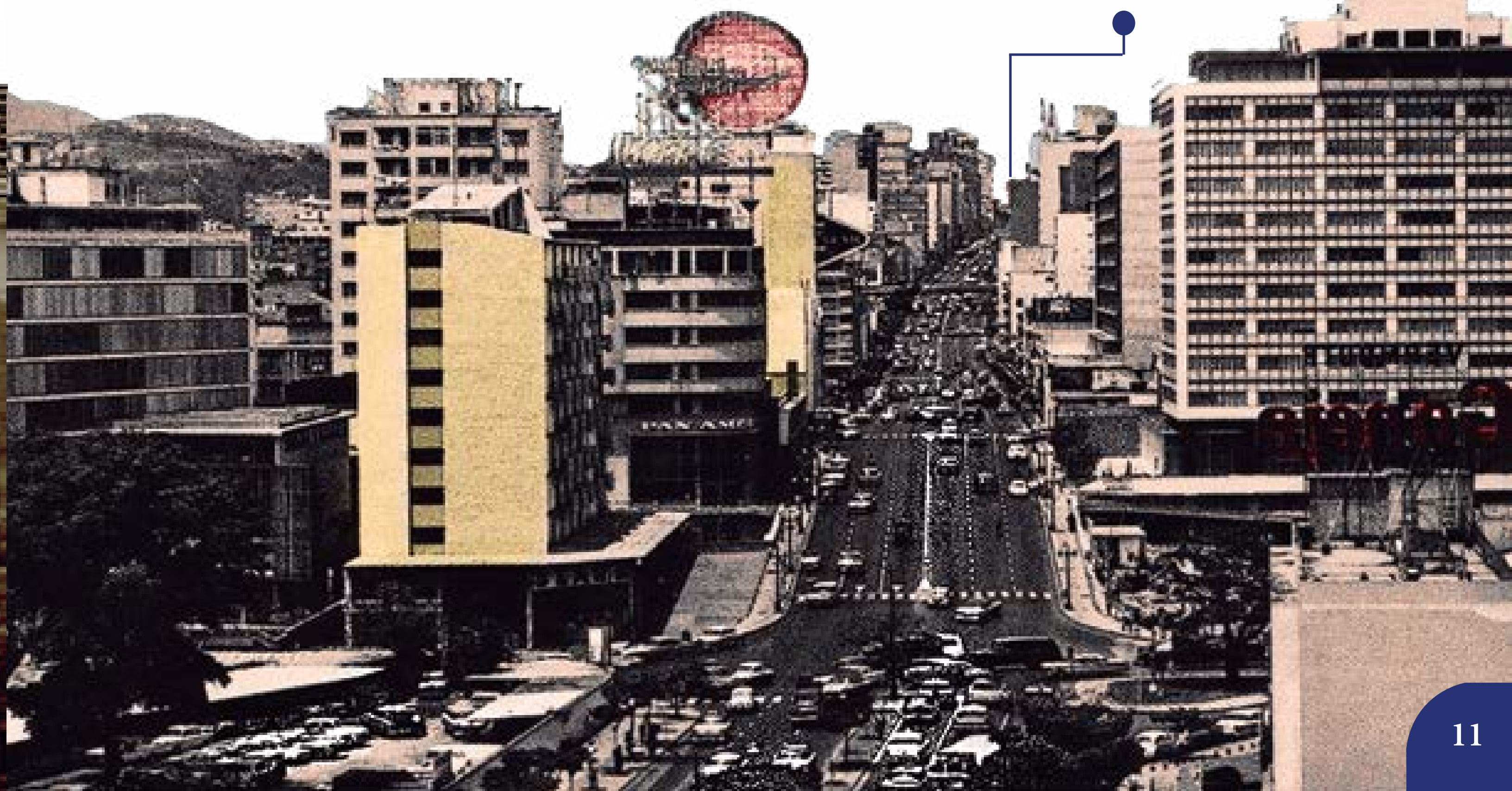
En nuestro caso, al seleccionar una calle o avenida, el origen sería una de las esquinas (en realidad cualquiera podría serlo). Y las demás esquinas, en esa calle o avenida, pueden describirse en función del origen. ¿Cómo hacerlo? Recuerden que en 6$^{\text{to}}$ grado de Educación Primaria estudiamos los **números enteros,** cuyo conjunto suele denotarse con el símbolo $\mathbb{Z}$ (del alemán *Zahl*, número); esto se hizo en la lección “Fiao, frío y choreto”. Es decir, podemos escribir que:

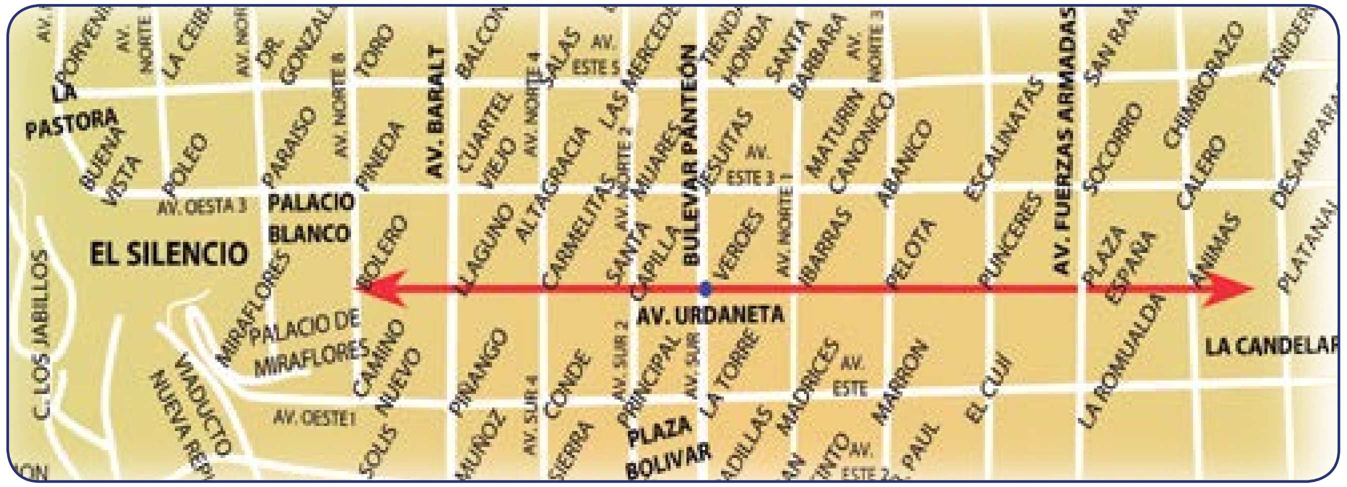
$$\mathbb{Z} = \{..., -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Utilizaremos estos números como las **coordenadas** de ciertos puntos de la recta. Con ellos habremos construido un sistema de coordenadas lineal. Veamos un ejemplo:

El general Rafael Urdaneta nació en Maracaibo el 24 de octubre de 1788 y murió en París el 23 de agosto de 1845. Fue uno de los jefes más leales a Bolívar. En 1828, desde la Secretaría de Guerra, le tocó juzgar a los responsables de la llamada Conspiración Septembrina que atentaron contra Bolívar, quien para ese momento era presidente de la Gran Colombia. Convencido de la culpabilidad de Francisco de Paula Santander, lo condenó por no haber impedido la “conspiración contra el jefe supremo de la nación”. En 1830 trató de salvar la obra bolivariana y la unidad de la Gran Colombia encargándose de la presidencia, siendo el último presidente de la Gran Colombia (Tercera República).

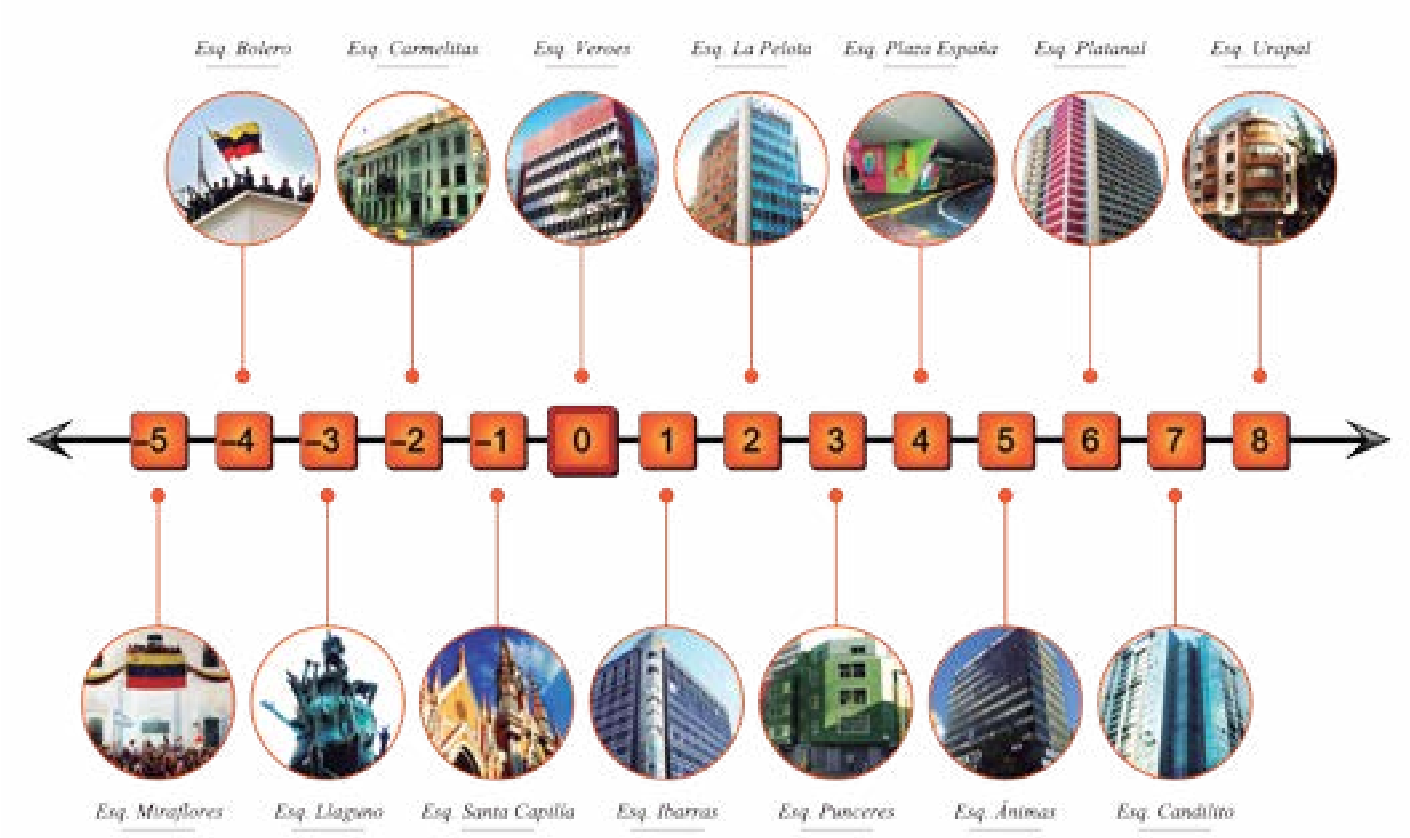
Avenida Urdaneta
1957, Caracas





- Consideremos la avenida Urdaneta de la ciudad de Caracas.
- Asignemos el 0 (cero) a la esquina de Veroes como punto origen, esta esquina es la intersección de la avenida Urdaneta con el bulevar Panteón (veamos el mapa adjunto).
- Las esquinas que están a la izquierda de Veroes serán numeradas con enteros negativos, y las que están a la derecha serán numeradas con enteros positivos (El diagrama que sigue ilustra el Sistema de Coordenadas Lineal que hemos construido).

A un sistema como éste se le denomina también eje.



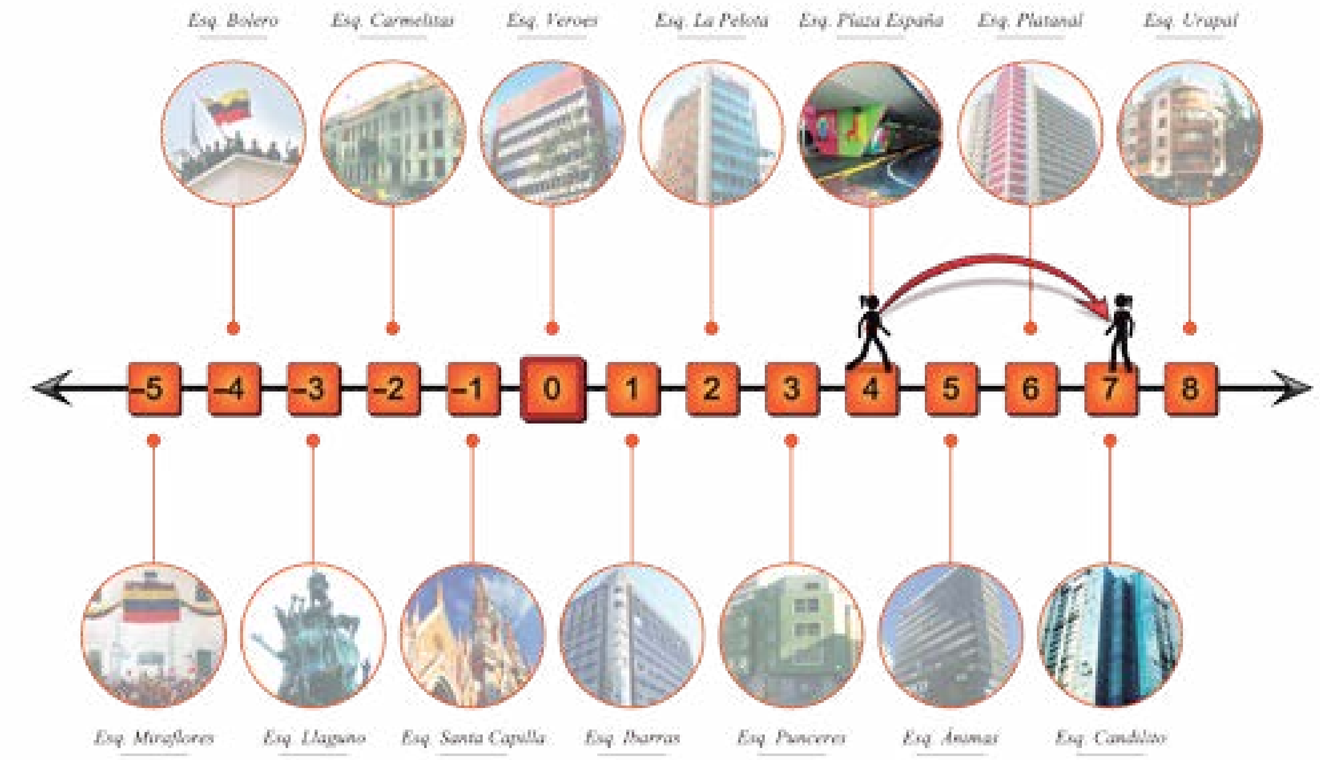
Un paseo por la avenida Urdaneta

Veamos el recorrido turístico que va a emprender una muchacha llamada Oriana, estudiosa liceísta caraqueña. Con ello mostraremos las coordenadas que se corresponden con su ubicación.

Oriana se encuentra en la esquina de Plaza España (donde los libreros nos sorprenden con tantos libros que venden a precios solidarios). Ella, después de comprar el libro: *Las esquinas de Caracas* de Carmen Clemente Travieso, va hacia la esquina de Candilito:

$$4 + 3 = 7$$

En esta casa nació Simón Bolívar, entre las esquinas de San Jacinto y Traposos.

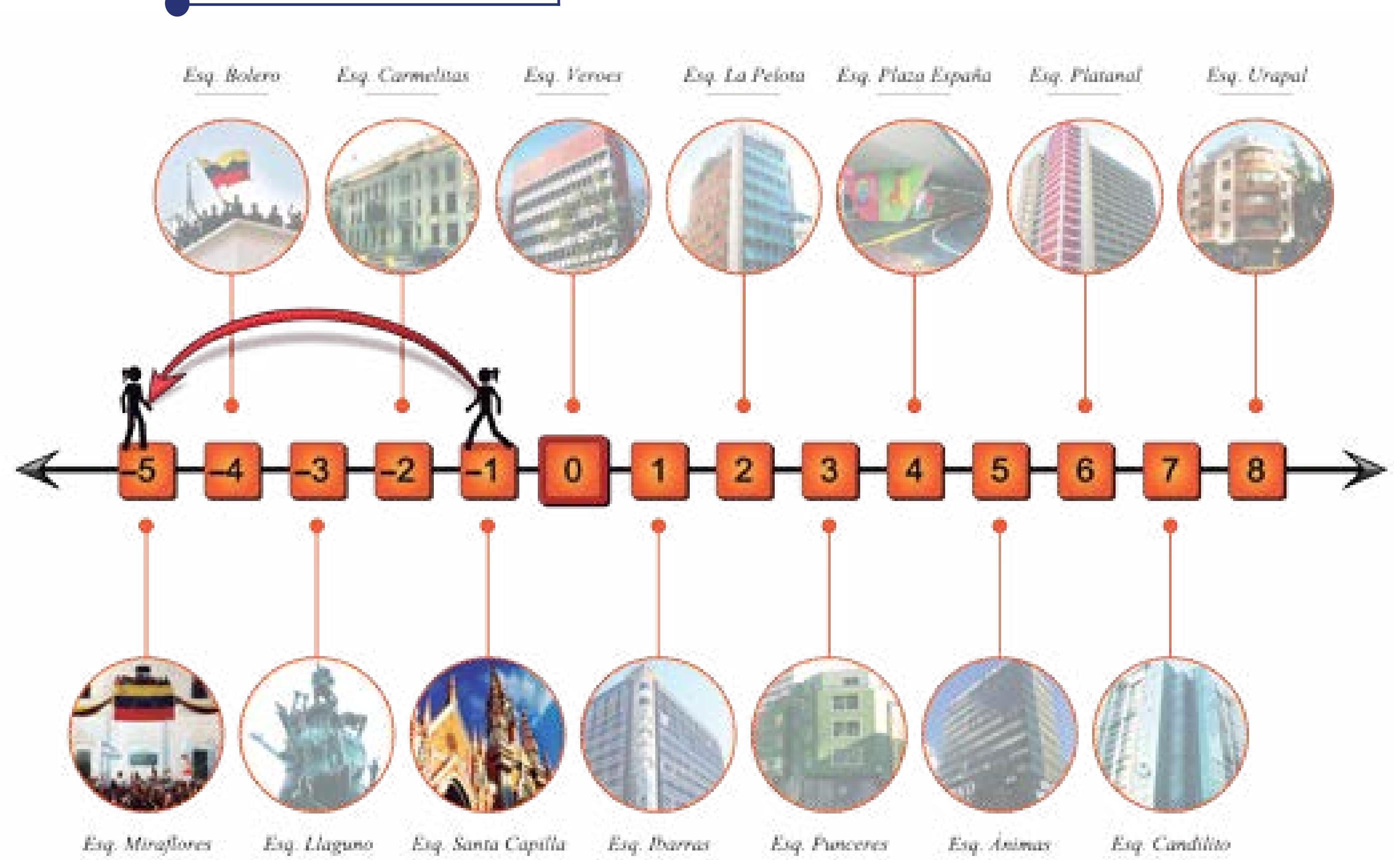


***4** significa estar a cuatro cuadras a la derecha del cero (0), es decir, a cuatro cuadras de la esquina de Veroes en dirección este.*
***+3** significa que Oriana caminó tres cuadras en dirección este.*
***7** significa la cantidad de esquinas que hay entre el 0 y el 7, es decir, el número de esquinas que hay entre la esquina de Veroes y la esquina de Candilito.*

En la esquina de Amadores, un carro acabó con la vida del Dr. José Gregorio Hernández en 1919. El galeno, quien egresara de la Universidad Central de Venezuela, había traído el primer microscopio al país.

Después de unas horas, Oriana se encuentra en la esquina de Santa Capilla, allí se ubica la Escuela de Música "José Ángel Lamas", donde en el siglo pasado el maestro Vicente Emilio Sojo, creador de la Escuela Nacionalista, formara a compositoras como Modesta Bor, y a compositores como Gonzalo Castellano, Inocente Carreño y Antonio Estévez, y va hacia la esquina Miraflores:

$$-1 + (-4) = -5$$

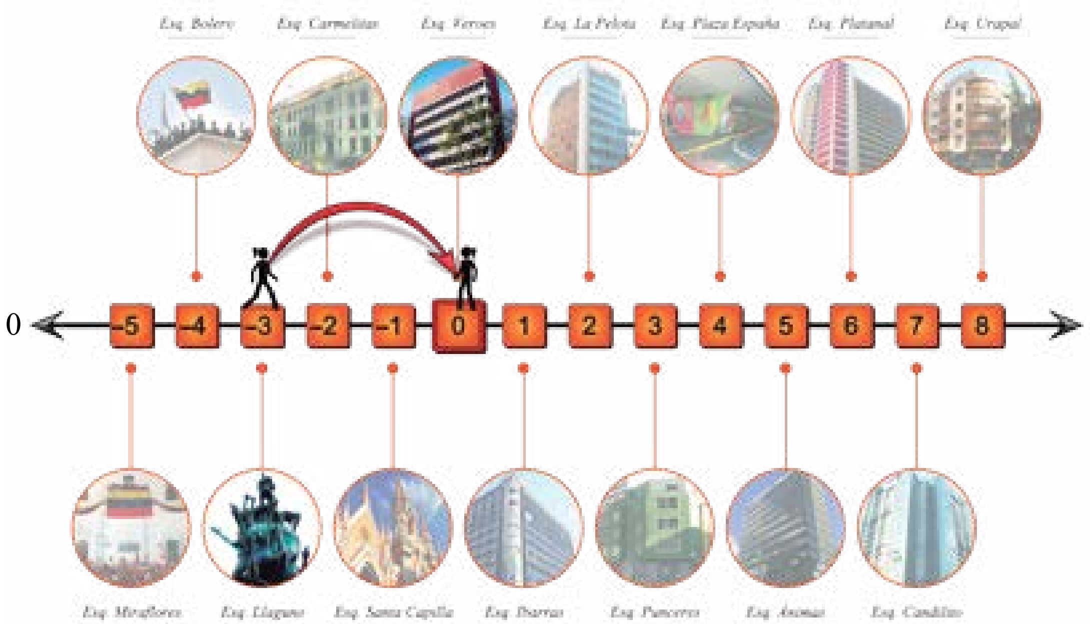


–1 significa estar a una cuadra a la izquierda del cero (0), es decir Oriana está en la esquina de Santa Capilla visitando la Escuela de Música José Ángel Lamas. +(–4) significa que Oriana caminó en dirección oeste cuatro cuadras, es decir, a la izquierda del –1.

–5 significa que Oriana está a cinco cuadras del cero, pero en dirección oeste.

Oriana se encuentra en la esquina de Llaguno y va hacia la esquina de Veroes:

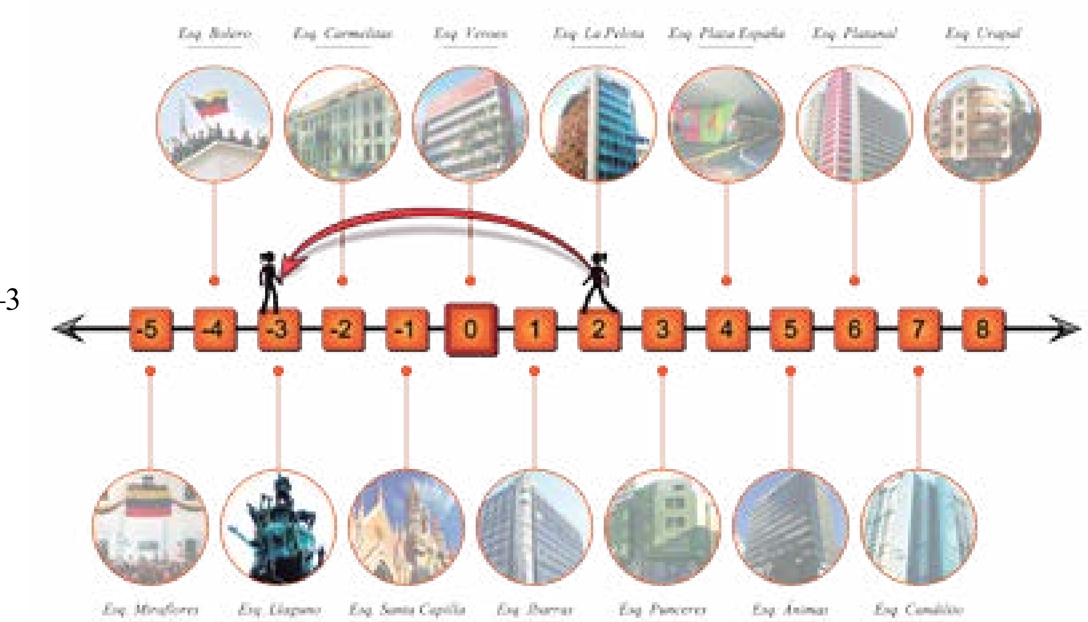
$$-3 + 3 = 0$$



–3 significa estar a tres cuadras a la izquierda de la coordenada cero (0), es decir a tres cuadras de la esquina de Veroes, en dirección oeste.
+3 significa que Oriana caminó tres cuadras en dirección este.
0 significa que ella está ahora en la esquina de Veroes, es decir, en la coordenada cero, 0.

Oriana se encuentra en la esquina de La Pelota y va hacia la esquina de Llaguno:

$$2 + (-5) = -3$$
ó
$$2 - 5 = -3$$



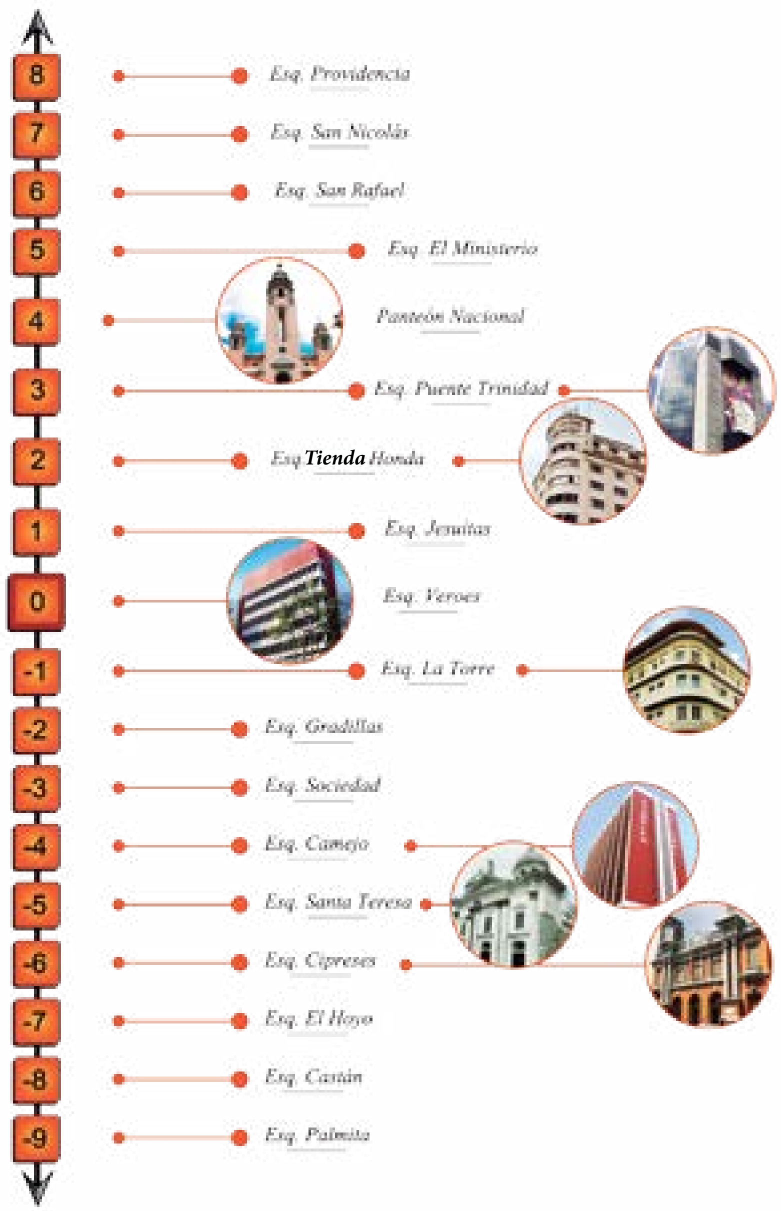
2 significa estar a dos cuadras a la derecha del cero, 0, es decir a dos cuadras de la esquina de Veroes, en dirección este.
+(–5) o sencillamente –5, significa que la persona caminó en dirección oeste cinco cuadras, es decir, caminó a la izquierda del 2.
–3 significa que la persona está a 3 cuadras del cero, pero en dirección oeste.

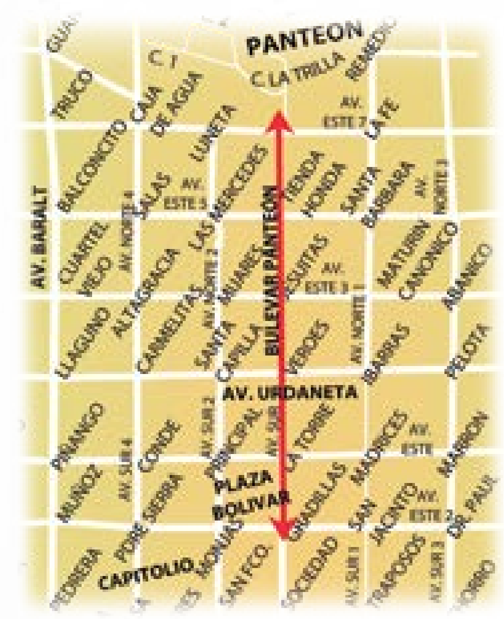
Un paseo por el bulevar Panteón: necesidad de dos ejes

Veamos el recorrido turístico que va a emprender ahora Oriana por el bulevar Panteón. Para ello, necesitamos representar un nuevo **eje**. Veamos:

La esquina de Veroes seguirá siendo el punto origen, sólo que ahora las esquinas identificadas con enteros positivos estarán hacia el norte de Veroes y las esquinas identificadas con enteros negativos estarán en sentido sur.

En Matemática esta recta vertical, que utilizamos como referencia, se suele llamar **eje de las ordenadas** o "**eje y**". La recta horizontal, perpendicular a la primera, se denomina **eje de las abscisas** o "**eje x**". Observemos el gráfico adjunto.





Tenemos, entonces, un sistema de coordenadas cartesiano, con el cual podemos describir las coordenadas de las demás esquinas que vemos en el mapa. Las marcas en el eje vertical, el eje de las ordenadas, son las que mostramos.

Ahora, ¿cuáles son las coordenadas de la esquina Abanico? (por ejemplo). Para ello debemos indicar sus coordenadas en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas. Con ellas conformaremos un par con la siguiente estructura:

coordenada en el eje de las abscisas

↓

(x, y)

↑

coordenada en el eje de las ordenadas

A (x, y) se le denomina **par ordenado**. Los paréntesis son la forma de agrupar las coordenadas x y y.

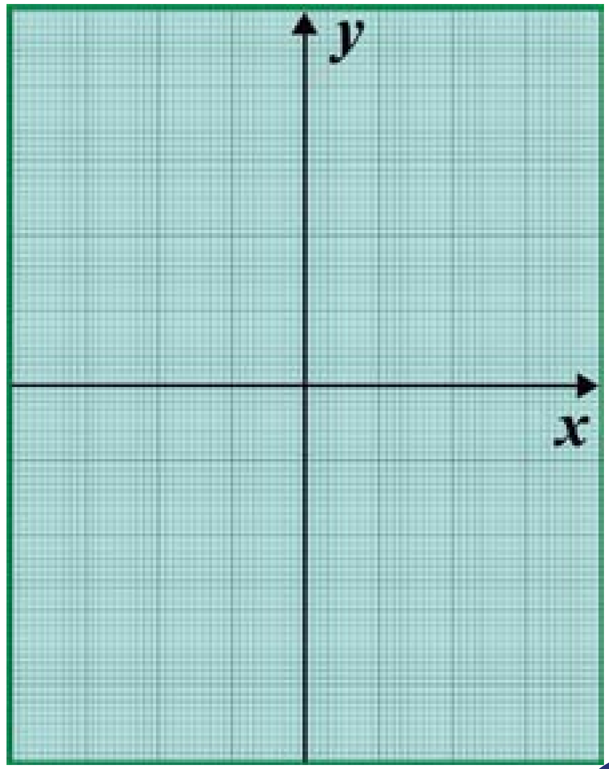
Observemos que para llegar desde Veroes hasta Abanico, debemos desplazarnos 2 cuadras en el sentido este y 1 cuadra hacia el norte (veamos el mapa de la página 16). Es decir, las coordenadas cartesianas de la esquina Abanico son $(2,1)$.

Como advertiremos, con tal sistema cada una de las esquinas se identifica con coordenadas cartesianas, en la que intervienen los *números enteros*.

- ¿Cuáles son las coordenadas de la esquina en la que se concretó el grito libertario del 19 de abril de 1810?
- ¿Y las de la esquina en la que funcionó la Sociedad Patriótica?
- ¿Y dónde está ubicado el Ministerio del Poder Popular para la Educación?
- ¿Y las que se corresponden con el lugar de nacimiento del Generalísimo Francisco de Miranda?
- ¿A qué esquina corresponden las coordenadas $(1,-2)$? ¿Y $(-3,1)$?

El plano cartesiano

Un **plano cartesiano** puede representarse como sigue (veamos el gráfico adjunto a la derecha).



Se denominan coordenadas cartesianas en honor a René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático francés, que quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un "punto de partida" sobre el que se edifica todo el conocimiento.

Los ejes se han representado con las etiquetas x, y. Esto es el eje x (de las abscisas) y el eje y (de las ordenadas), respectivamente.

Así, cada punto del plano cartesiano se corresponde con un par ordenado y, recíprocamente, cada par ordenado se corresponde con un punto en el plano cartesiano. Por ejemplo, las coordenadas del punto origen son $(0,0)$.

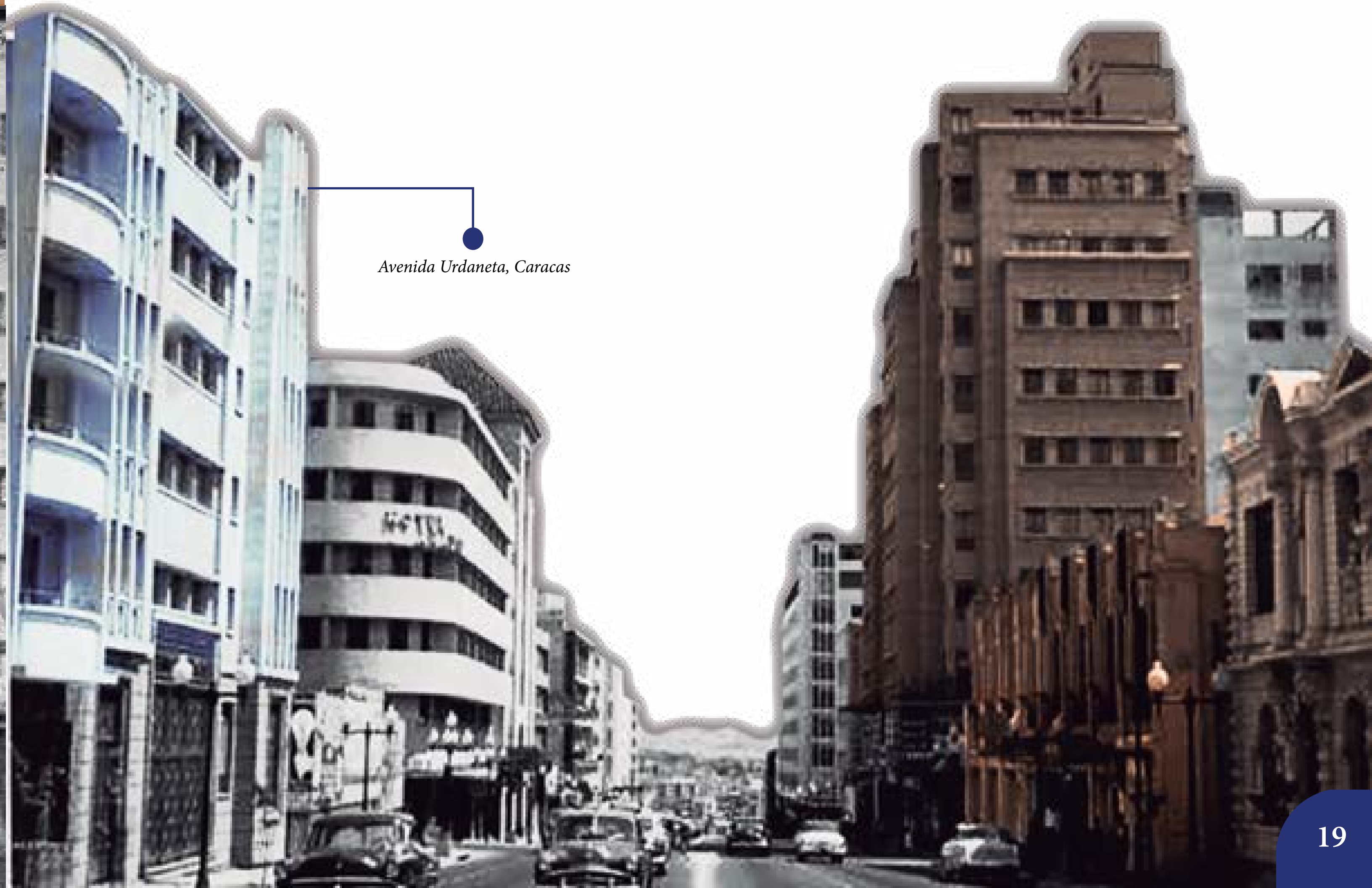
Avenida Urdaneta, Caracas

Investiguemos

Conformen grupos de trabajo para desarrollar las siguientes actividades:

1. Recorran el lugar en el que viven, estudian o en el que se encuentren edificaciones de nuestro patrimonio cultural (no es necesario que esté organizado por manzanas), y construyan en sus cuadernos un croquis de ese sector. Escojan algún lugar como punto origen (bien sea por su importancia histórica, geográfica o cultural). Asócienle a ese lugar las coordenadas $(0,0)$, y a partir de allí, representen un **sistema de coordenadas cartesianas**.

2. Identifiquen las coordenadas que corresponden a los lugares emblemáticos de la región en donde viven, por ejemplo, la Plaza Baralt de Maracaibo, el Santo Cristo de la Grita, el Obelisco de Barquisimeto, la Casa Fuerte de Barcelona, el Museo Soto en Ciudad Bolívar, entre otros. Discutan los resultados con sus compañeras y compañeros.



Avenida Urdaneta, Caracas

3 Den ejemplos de lugares cuyas coordenadas: (a) sean negativas, (b) sean positivas, (c) la coordenada x sea positiva y la coordenada y sea negativa, (d) la coordenada x sea negativa y la coordenada y sea positiva.

4 Den ejemplos de lugares donde una de sus coordenadas sea 0.

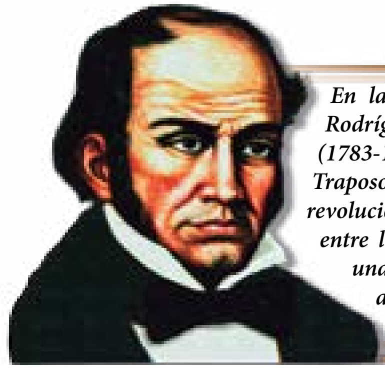
5 Apóyense en un mapa de su sector o región para trazar en él un sistema de coordenadas cartesiano. Para ello podrían superponer al mapa papel cebolla o acetato. Destaquen en el sistema los lugares donde viven y estudian, así como los de interés turístico, socioproductivo y cultural incluso, el mercado, las paradas de transporte público desde la institución escolar hasta sus hogares, el hospital, la biblioteca, entre otras. Finalmente, indiquen las coordenadas cartesianas de cada uno de estos lugares.

6 Tomen nota de los resultados obtenidos y comparen los resultados con los presentados por los demás grupos.

Casa Amarilla
esquina Principal, Caracas

Francisco de Miranda (1750-1816), el precursor de la Independencia y el más universal de todos los venezolanos. La casa de Miranda en la esquina de Padre Sierra fue comprada por su padre cuando Miranda tenía 12 años. Casa "de tapia y rafa cubierta de teja, con 28 varas y un cuarto de solar de frente y 6 varas y un cuarto de fondo".

Carmen Clemente Travieso (1900-1983), periodista. Fue militante del Partido Comunista de Venezuela, que en 1946 la incluyó en su plancha para las elecciones, convirtiéndose en una de las primeras mujeres postuladas por un partido político para un cargo de elección popular. Esta bisnieta del prócer de la Independencia Lino de Clemente, escribió en 1956 el libro "Las esquinas de Caracas".



En la Casa de las Primeras Letras Simón Rodríguez (1769-1854) educó a Simón Bolívar (1783-1830) quien vivía de San Jacinto a Traposos. Este primer templo de la pedagogía revolucionaria de Nuestra América queda entre las esquinas de Veroes a Jesuitas, toda una cuadra de la emancipación ya que al lado el apóstol cubano José Martí impartió clases.

El sistema de coordenadas es la base fundamental para la planimetría y los levantamientos topográficos, e incluso, como veremos más adelante, para la representación de funciones y de relaciones que no son funciones, así como la visualización de fenómenos propios del contexto, de la realidad y del mundo. Tal es el caso del crecimiento de la población, la radiactividad de cierto elemento, las fluctuaciones del precio del petróleo, los índices de evolución de la pobreza, el número de casos de dengue en función del tiempo, las relaciones entre el consumo de energía eléctrica por hogar en función del tiempo, el consumo de agua, la deuda externa, la talla en términos de la edad, los índices de escolaridad, entre muchos otros.

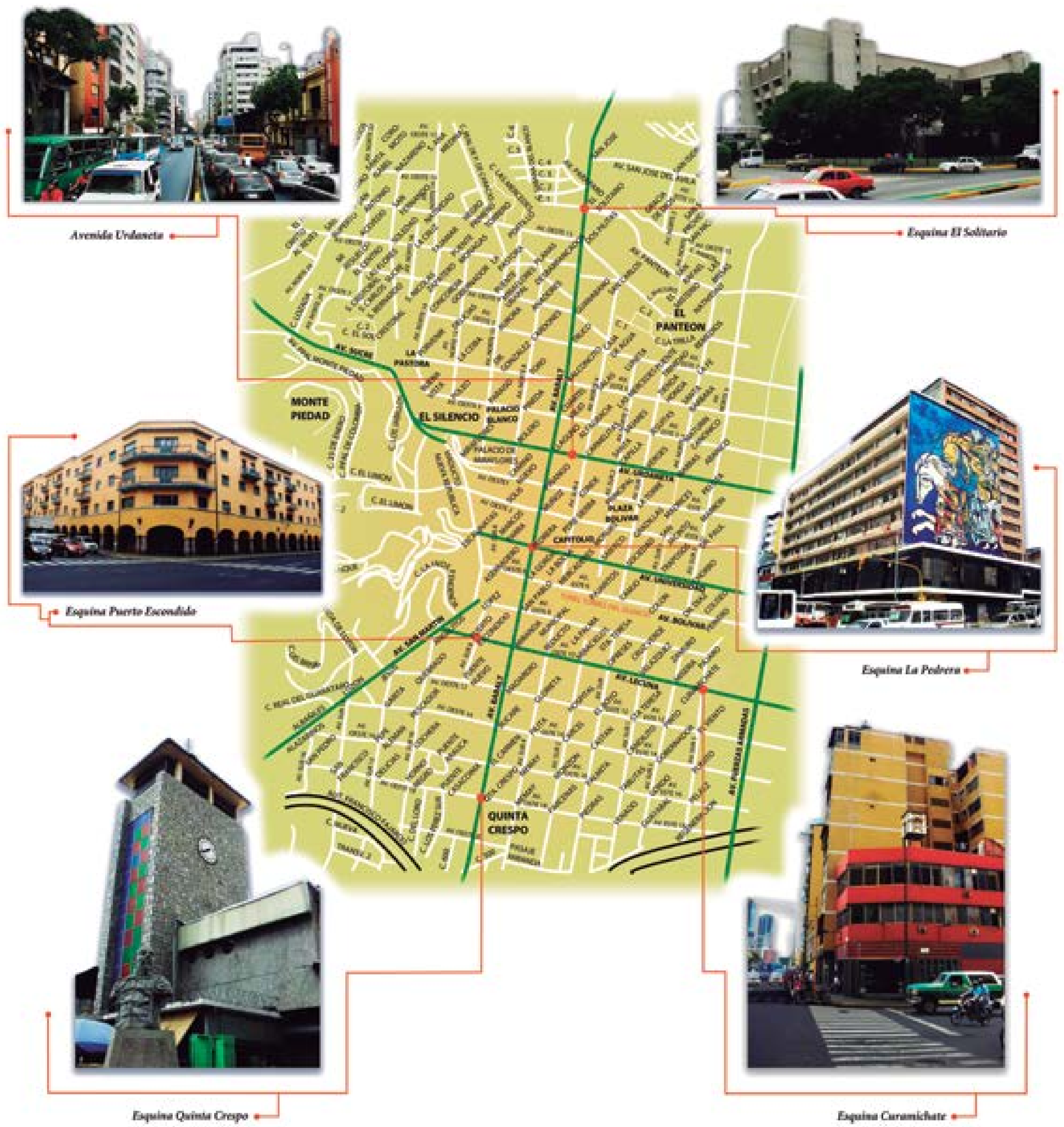
Esquina La Pelota, Caracas

La esquina de Veroes está en la avenida Urdaneta, en pleno centro de la ciudad, a una cuadra del Banco Central de Venezuela, en orientación hacia el este. Veroes (o Verois) es un apellido vasco. Las primeras personas con ese apellido entraron por Coro, y se recuerda que en 1682 estaba allí establecido un sargento mayor alférez de nombre Antonio, que contaba la edad de cuarenta años. Ese apellido ya estaba definitivamente instalado en Caracas, en tiempos del obispado de monseñor José Félix Valverde (1728-1740). Por ejemplo, José Antonio Veroes fue, primero, alcalde de la hermandad, y procurador en 1739. Miembros de la familia tenían sus casas en la esquina que se llamó así por ellos. Durante el pasado siglo XIX, la esquina de Veroes fue un centro de gran actividad. En el ángulo sureste, donde se encuentra hoy el edificio América, tuvo su casa el activísimo y polémico líder liberal Antonio Leocadio Guzmán. Fue en esa mansión donde se alojó su hijo, el general Antonio Guzmán Blanco, cuando entró triunfante a la cabeza de sus tropas el 15 de junio de 1863, en una Caracas profusamente adornada de banderas amarillas.

La esquina de Plaza España no se llamaba antes así. “Plaza López” era llamada originalmente un lugar localizado al oeste de la Plaza Macuro, donde se encontraba entonces el monumento a Cristóbal Colón, que luego fue trasladado a la entrada del Parque Los Caobos. Dicho lugar de la llamada Plaza López, es contiguo al puente-elevado de la avenida Urdaneta, en el cruce con la avenida Fuerzas Armadas. Y esa esquina fue llamada Plaza López hasta 1946. Por cierto que el 15 de mayo de 1921 llegó a Caracas, procedente de Chile, el infante Fernando María de Baviera y Borbón, en calidad de embajador del Rey Alfonso XIII. Se alojó en la casa propiedad de la familia Anzola, situada frente a la Plaza López. La casa desde ese entonces hasta que fue demolida, al construirse la avenida Rafael Urdaneta, se le conoció con el nombre de “Casa España”. Con motivo a la visita del mencionado Infante real, la Gobernación de Caracas decretó: “Denomínese Plaza España al citado parque y eríjase en ella un busto de Miguel de Cervantes y Saavedra”. Ciertamente, se desconoce el paradero de dicho busto o estatua a Cervantes, desde hace ya varios años. Hoy en día hay todo un mercado de libros.

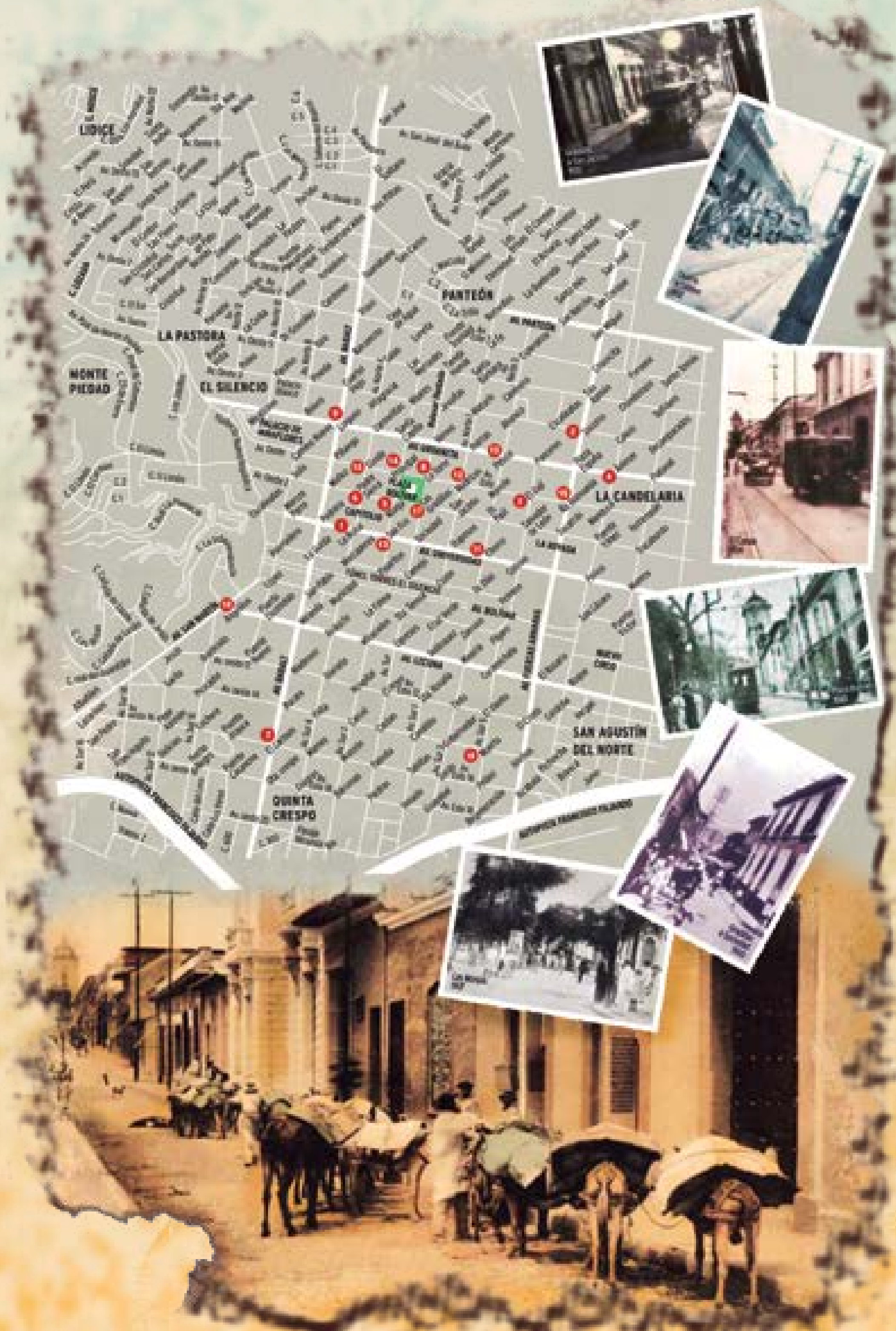
www.carmelopaiva.com /caracascompleto.htm

Las esquinas de Caracas:



Una historia a la vuelta de la esquina

Así son las esquinas de Caracas, un compendio de su historia. Mantienen vivas algunas tradiciones históricas y al mismo tiempo ofrecen indicios acerca de las costumbres de las personas. Cada nombre está ligado al pasado de la ciudad, algunas veces con historias humorísticas o tristes. Es, tal vez, la única ciudad en el mundo donde cada esquina tiene un nombre, y que sólo un nativo, o un residente de muchos años, podría nombrarlas en su orden correcto.



Avenida Sur. Año 1904.
Infografía: Harvey Herrera.
Ciudad Caracas.
21 de Enero de 2011.

1 LA BOLSA

El origen más probable de este nombre es de bolsa de cambio, porque en esta ubicación tenía sus negocios el Barón de Corvala. Muchos caraqueños utilizaban sus servicios y este centro de operaciones bursátiles pasó a conocerse como La Bolsa de Caracas porque controlaba la vida económica de la ciudad.

2 SOCORRO

Su nombre deriva en que existía en la Caracas de ayer un puesto de socorro en ese lugar, antes de que se construyera la avenida Fuerzas Armadas, y por ello adoptó su nombre.

3 EL CUJÍ

En esta esquina se alojaba un zapatero llamado Carrasquero. Dicen que él tenía visiones acerca de un tesoro enterrado cerca de una mata de cují. Así que decidió hablar con un monje del Monasterio de San Jacinto y preguntarle qué podía hacer para localizar el sitio donde estaba el tesoro.
El monje, para jugarle una broma al señor Carrasquero, le dijo que fuera al sótano de la iglesia a medianoche para que algún espíritu le informase el sitio a la hora indicada y, efectivamente, le apareció un espíritu que casi lo mató del susto. Luego, el monje fue en busca del señor Carrasquero y lo encontró asustado debajo de unas escalinatas. Así que esta graciosa historia lleva el nombre del apacible árbol que le dio sombra al zapatero: El Cují.

4 LAS ÁNIMAS

La Caracas de antaño era una ciudad sin alumbrado y supersticiosa como religiosa. Se decía que cuando alquien estaba agonizando se podía escuchar el canto fúnebre de los espíritus.
Así que un grupo de jóvenes, decidió averiguar acerca de los cantos misteriosos que se oían en esa esquina, y se quedaron a pasar la noche. Entonces varias figuras se materializaron en medio de la oscuridad envueltas en sábanas blancas y lentamente desaparecieron. "¡El espíritu de las almas en penas!" Los jóvenes huyeron rápidamente y así quedó el nombre: Las Ánimas.

5 LAS MONJAS

A principios del siglo XVII hubo una viuda rica que decidió dedicar su vida y fortuna a la Iglesia. Ella era la dueña de la manzana entera donde se encuentra hoy el Capitolio. La viuda convirtió su casa en el Convento Santa Clara. Entonces, ella, sus cuatro hijas, tres sobrinas y otras dos jóvenes, tomaron los votos como monjas de esa orden.
Luego, en 1874 el presidente Guzmán Blanco emitió un decreto prohibiendo todos los conventos y monasterios de Venezuela, así que el Convento Santa Clara fue cerrado, las monjas desalojadas y el edificio demolido para dar paso al actual edificio del Capitolio.

6 PADRE SIERRA

Ésta es una de las pocas esquinas cuyo nombre ha perdurado sin cambio alguno desde los tiempos de la Colonia. Se le dio el nombre del don José de Sierra, quien vivió en el lugar en 1766.
Se le recuerda por sus acciones humanitarias y por sus sacrificios personales durante el terremoto y la epidemia de viruelas que azotó la ciudad.

7 EL CARMEN

Todas las familias deberían aceptar un patrón o abogado de la casa, por tal razón empezaron a poner sobre las puertas de zaguanes, retablos y bustos religiosos con el patrón de la casa. Uno de los pocos lugares que se conserva en Caracas, es la esquina El Carmen, con su mismo nicho y la imagen de la virgencita de los escapularios.

8 LA TORRE

Adquiere su nombre de la antigua torre de la Catedral de Caracas que allí se encontraba. El terremoto del 26 de marzo de 1812 causó daños a la torre, haciendo que se inclinara peligrosamente hacia un lado. Sin embargo, otro terremoto que tuvo lugar el 4 de abril de 1812 hizo que la torre se enderezara de nuevo. Aunque fue remplazada, esa primera torre es conmemorada con el nombre de la esquina.

9 LLAGUNO

Don Felipe Llaguno, hombre adinerado que era muy conocido y estimado por la sociedad caraqueña. Constituyó su hogar en la casona de la esquina Llaguno. Hoy desaparecida para dar paso a la avenida Urdaneta.

10 LA PELOTA

Era el lugar preferido para el juego de pelota, por lo que hicieron las reformas y adaptaciones para crear la primera instalación deportiva conocida en la historia de Caracas. Con el tiempo, aumentó el número de aficionados que acudían a jugar o a observar las competencias. Desde entonces se llamó "la calle de la Pelota" y luego "la esquina de La Pelota".

11 EL CHORRO

Durante la Guerra de Independencia, había dos hermanos llamados Agustín y Juan Pérez. Ellos preparaban y vendían una bebida llamada "guarapo". Para evitar el desgaste de la puerta del establecimiento debido a su gran clientela, Agustín Pérez diseñó un sistema para despachar las bebidas desde el interior de la casa, sin que entraran los clientes. Estaba formado por una serie de grifos en la parte exterior y ranuras para introducir las monedas. Cuando el cliente metía el dinero, Agustín accionaba una cadena, lo que permitía la salida de un chorro del guarapo seleccionado. De esta manera la esquina tomo su nombre: de un chorro de guarapo.

12 MADRICES

Un ciudadano de nombre Domingo Rodríguez de la Madriz construyó en esta esquina una hermosa casa para celebrar su matrimonio. Allí nacieron sus hijas, y era escenario de numerosas cenas distinguidas y fiestas de gala. Pero a pesar de su esplendor la casa fue demolida. Por ende, la esquina lleva ese nombre en recuerdo de la lujosa casa y de las bellas hijas del capitán Domingo Rodríguez de la Madriz.

13 SAN FRANCISCO

Esta esquina toma su nombre del templo que allí se edificó en 1575 por una comunidad franciscana proveniente de Santo Domingo. En este lugar, en 1813, se le consagró a Simón Bolívar el título de Libertador y el 17 de diciembre de 1842, su funeral con el Réquiem de Mozart. En este templo permanecieron sus restos hasta el día 23, cuando fueron trasladados a la Catedral de Caracas.

14 LA PRINCIPAL

En la esquina noreste de la Plaza Bolívar se construyó un pequeño fortín de dos pisos que albergaba a los oficiales y a la tropa en general. Fue el primer edificio gubernamental construido durante la Colonia. De este fortín recibió su nombre la esquina. Sin embargo, no siempre se llamó Principal. Ha sido llamada Cárcel Real y Casa Amarilla, entre otros.

15 EL CONDE

Su nombre se debe a que allí vivían dos condes con título nobiliario, ellos fueron don Fernando Ignacio de Ascanio (Conde de La Granja) y don Antonio Pacheco (Conde San Javier).

16 ÑA ROMUALDA

Este sitio tiene un origen muy humilde: el de doña Romualda. Esta señora tenía una pulpería donde servía suculentas comidas y bebidas. Se la puede comparar, tal vez, con el coronel Sanders en que preparaba y servía un mondongo "como para chuparse los dedos". Plato que era apreciado por la crema y nata de Caracas, incluyendo al presidente Páez.

17 LAS GRADILLAS

El origen del nombre se debe a que allí existían unas gradas o "gradillas" para bajar a la Plaza de Armas o Plaza Mayor de la colonia en el año 1572. Según, ésta era considerada como una de las esquinas más elegantes de Caracas. La élite social se paseaba con sus mejores trajes para mirar y ser vistos.

18 ANGELITOS

Dicen los pobladores de la ciudad que el presidente Páez cortejaba una mujer ajena en aquel lugar. Para no ser sorprendido in fraganti, colocó un grupo de guardias, bien armados, cuya misión era impedir la llegada de visitantes no deseados. Aquellos "angelitos" apostados en plena calle trascendieron a la historia de la ciudad sirviendo de epónimos de esa esquina.

19 ESQUINA EL MUERTO

Durante la llamada Guerra de los Cinco Años entre los centrales y los federales, ocurrían batallas en las calles de Caracas. Luego, pasaban un grupo de camilleros en unos carruajes a caballo para recoger los cadáveres para darles santa sepultura. Una vez mientras recogía a un cuerpo tirado en el suelo en esta esquina, de repente se levantó el cadáver y con una voz temblorosa les dijo: "No me lleven a la tumba, que todavía estoy vivo". Los camilleros lo dejaron caer y huyeron despavoridos.
Los vecinos del lugar solían detenerse para indicar a los visitantes diciéndoles: "Ésta es la esquina donde se levantó el muerto", y poco a poco la esquina comenzó a ser conocida por su nombre actual.

2

EL AZOGUE SUBE Y BAJA

Números enteros y operaciones

La temperatura

La temperatura atmosférica es el indicador de la cantidad de energía calorífica acumulada en el aire. La temperatura de un lugar se establece mediante promedios y varía en las diferentes regiones de nuestro planeta. Esta variación se debe a la inclinación del eje terrestre y a los movimientos de rotación y traslación de la Tierra. La temperatura disminuye desde el ecuador hacia los polos.

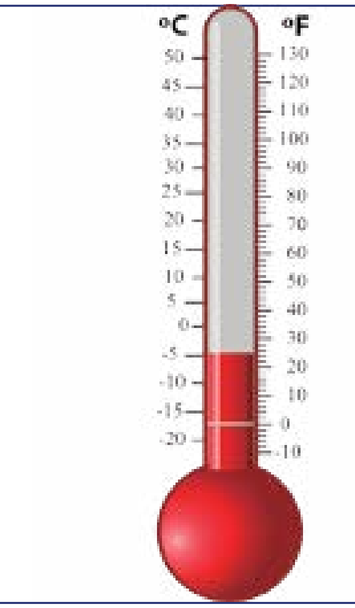
El Parque Nacional Sierra Nevada

En varios países latinoamericanos existen ciudades cuyas temperaturas son muy bajas, esto quiere decir que hace bastante frío. En nuestro país, uno de los lugares más fríos es el Parque Nacional Sierra Nevada, en el estado Mérida.

En el Sierra Nevada, se encuentran los únicos glaciares que existen en la República Bolivariana de Venezuela. En sus picos podemos ver nieve durante todo el año. En este parque, está el teleférico más largo y alto del mundo.

Uno de los picos más famosos del Sierra Nevada es el Pico Bolívar, que tiene una altura de 4.978 m sobre el nivel del mar (m.s.n.m.). Es tan frío que la temperatura promedio oscila entre 5 °C bajo cero y 26 ºC.

Vean cómo se representarían estas temperaturas en un termómetro ambiental, que es el instrumento usado para medir este tipo de temperatura:



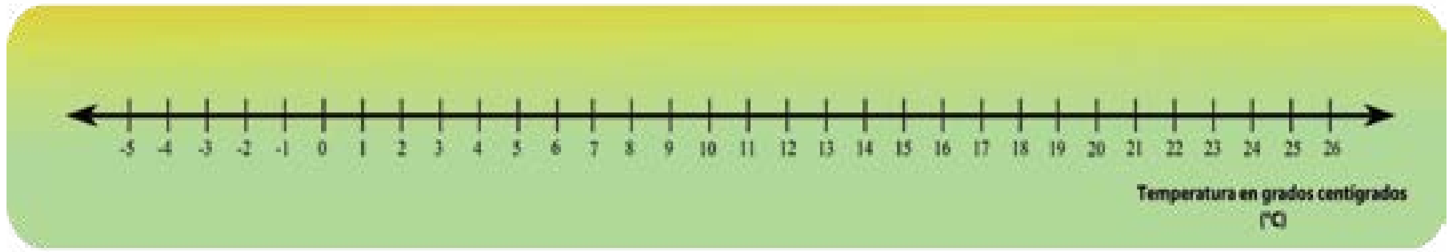
Este termómetro registra cinco grados centígrados bajo cero, la menor temperatura que, en promedio, se alcanza en el Pico Bolívar.

Esta temperatura también puede leerse como “menos cinco grados centígrados”.

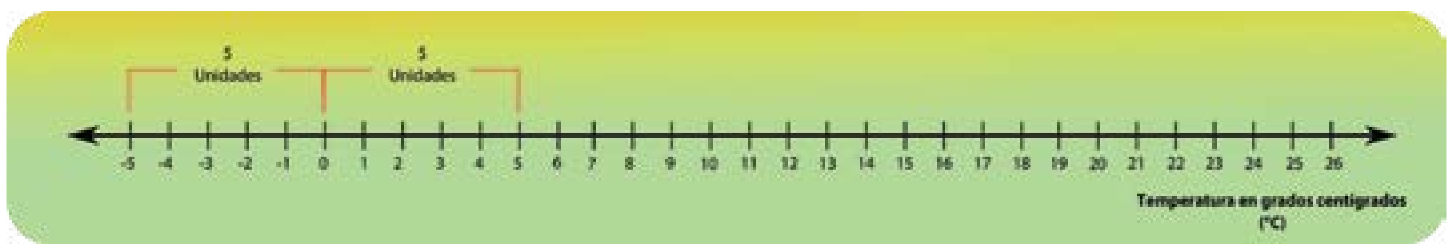
Aquí podemos observar fácilmente que el termómetro registra veintiséis grados centígrados, la mayor temperatura que se alcanza, en promedio, en el Pico Bolívar.

Cuando hablamos de veintiséis grados centígrados nos referimos a que la temperatura está sobre cero, es decir, “más veintiséis grados centígrados”.

Si representamos, en la recta numérica, el intervalo de todas las posibles temperaturas en números enteros del Pico Bolívar, obtenemos lo siguiente:

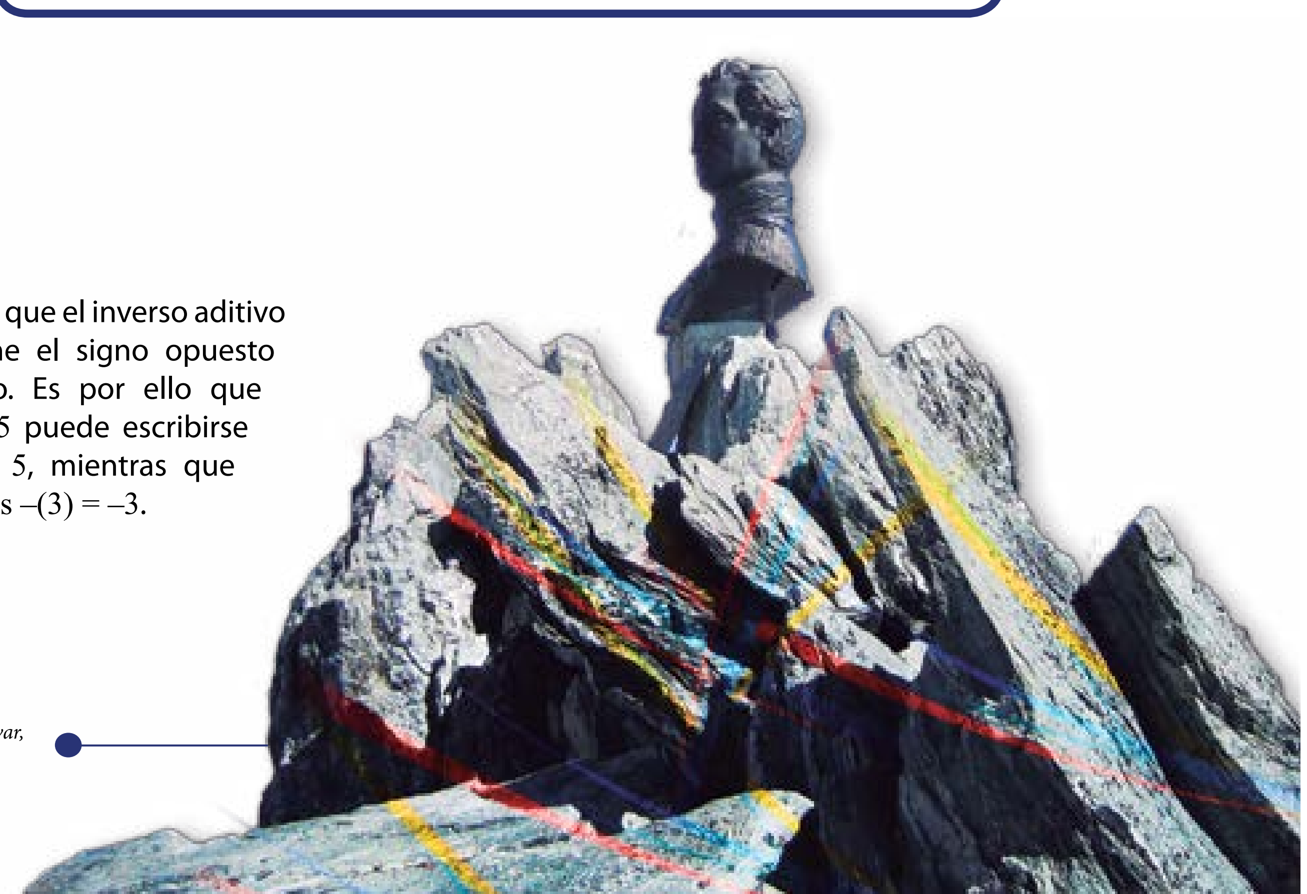


Observen que la temperatura positiva 5 y la temperatura negativa -5 están situadas a la misma distancia del punto de origen (0). También 4 y -4, 3 y -3, por ejemplo, están a la misma distancia del cero.



Al número entero, que se encuentra ubicado a la misma distancia del cero que un número dado, se le conoce con el nombre de inverso aditivo, opuesto o simétrico. De esta manera, el opuesto aditivo de -5 es 5 y el de 3 es -3.

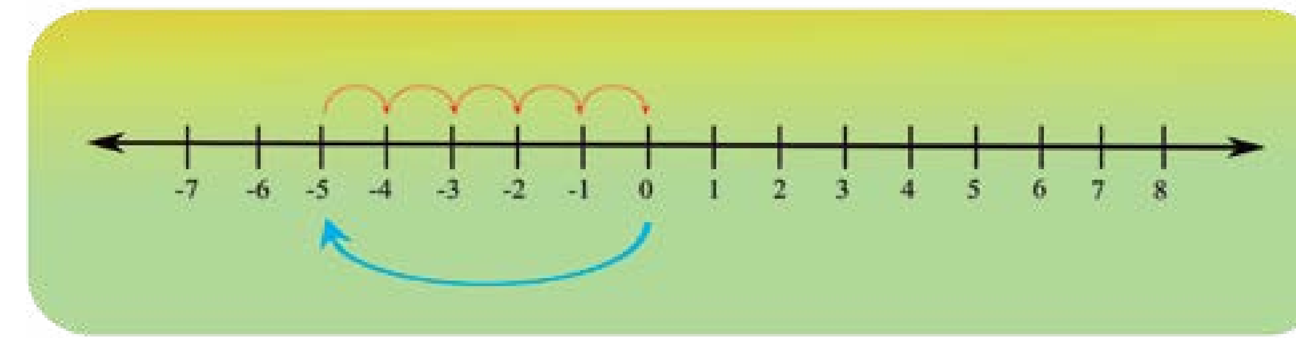
Observen que el inverso aditivo o simétrico, tiene el signo opuesto al número dado. Es por ello que el opuesto de -5 puede escribirse como $-(-5) = 5$, mientras que el opuesto de 3 es $-(3) = -3$.



Cumbre del Pico Bolívar, edo. Mérida

Sumando opuestos aditivos

Fíjense que si la temperatura se encontrara en $0°$ centígrados y disminuyera $5\ °C$, para luego aumentar $5\ °C$, su valor final sería de $0\ °C$. Veamos:



Esto quiere decir que $(-5) + 5 = 0$.

Podemos decir entonces que **al sumar cualquier número entero con su inverso aditivo, el resultado es 0.**

Sumando cero a un número entero

Al igual que en la adición de los números naturales $(\mathbb{N})$, el cero es el **elemento neutro** en la adición de los números enteros $(\mathbb{Z})$. Así:

$$1 + 0 = 1$$
$$(-1) + 0 = -1$$

En general:

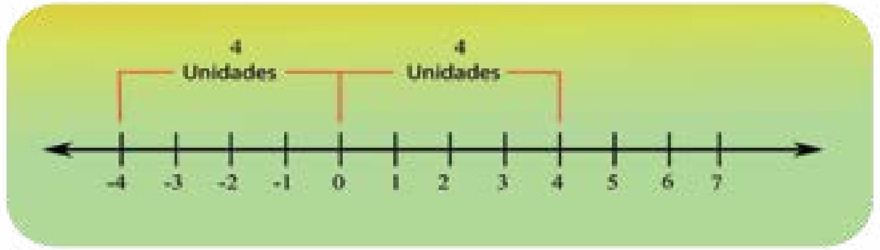
En la adición de los números enteros, el cero es el **elemento neutro**, por tanto:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

En donde a pertenece a $\mathbb{Z}$.

Valor absoluto de un número

Si medimos la distancia entre el 0 y el número (-4), nos daremos cuenta de que es igual a la distancia entre 0 y 4.



De lo anterior se concluye lo siguiente:

- La distancia entre 0 y -4 es igual a 4.
- La distancia entre 0 y 4 es también 4.

A la distancia que hay entre cualquier número entero y el cero, se le llama **valor absoluto.** Al valor absoluto de a se denota: $|a|$

Ya comprendimos la idea de inversos aditivos u opuestos, y discutimos la idea de valor absoluto. Ahora vamos a estudiar el valor absoluto desde el punto de vista de los inversos aditivos.

Fíjense:

- Si $a \geq 0$, es decir es un entero positivo, el valor absoluto de a es igual a a. Esto se denota así:

$$a \geq 0 \text{ entonces } |a| = a$$

Observen que:

$$|4| = 4$$

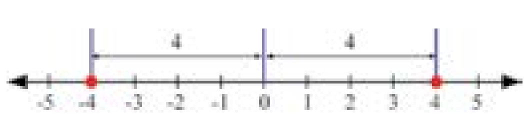
- Si $a < 0$, es decir es un entero negativo, el absoluto de a es igual a $-a$, es decir es un entero positivo. Esto se denota así:

$$a < 0 \text{ entonces } |a| = -a$$

Observen que:

$$|-4| = -(-4)$$

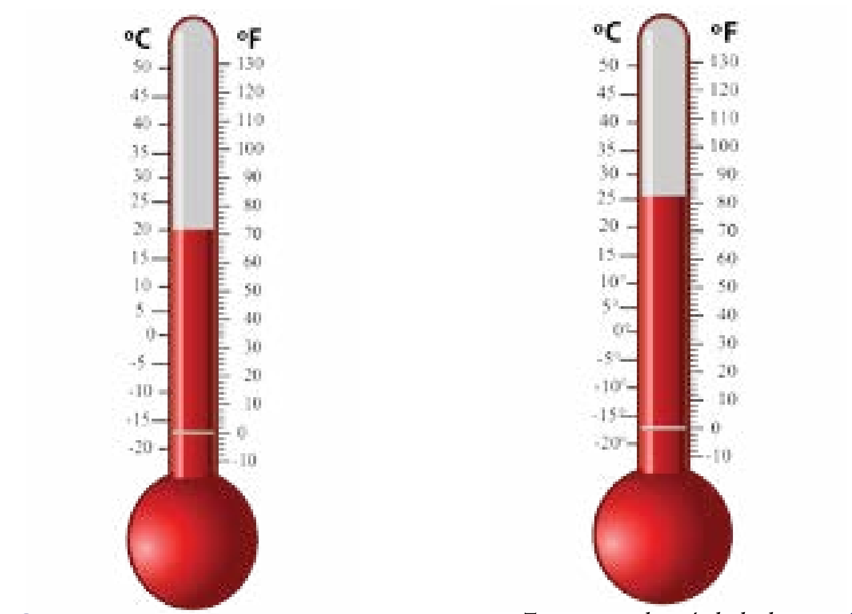
$$|-4| = 4$$



$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a > 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Orden en $\mathbb{Z}$

Observen los termómetros que les presentamos a continuación:



Temperatura ambiental inicial

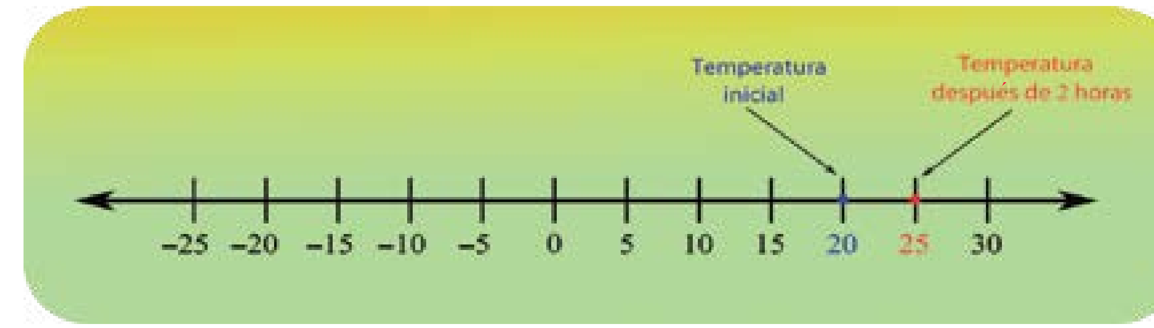
Temperatura después de dos horas

Luego de dos horas, la temperatura inicial aumenta de 20 °C a 25 °C, es decir, que la temperatura se incrementó en 5 °C.

Esto significa que 20 °C es menor que 25 °C. Esto lo podemos escribir así:

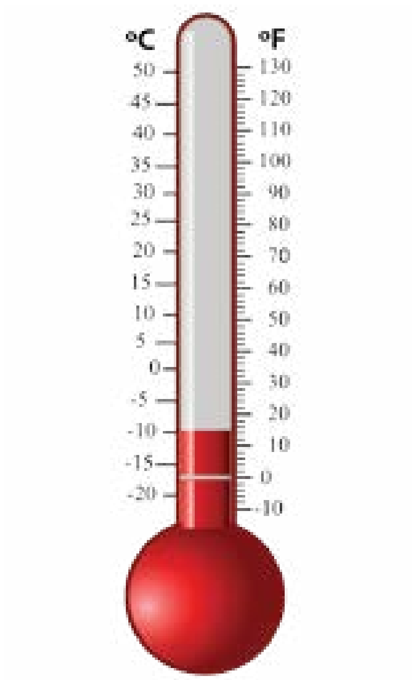
$$20\,^\circ\mathrm{C} < 25\,^\circ\mathrm{C} \text{ o } 25\,^\circ\mathrm{C} > 20\,^\circ\mathrm{C}.$$

Si representamos estos números en la recta numérica, nos queda:

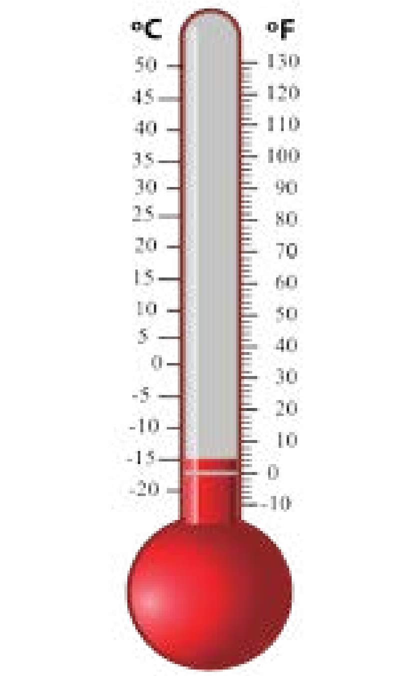


Observen que 25, el número mayor, está a la derecha de 20.

Observen los termómetros que siguen:



Temperatura ambiental inicial



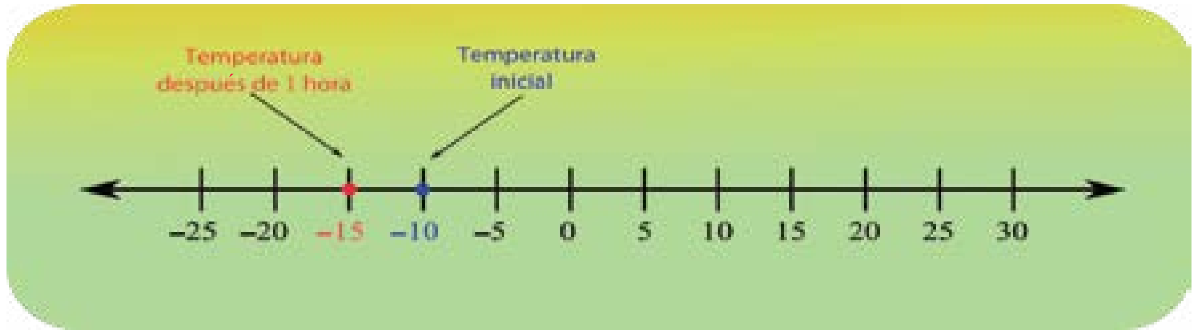
Temperatura después de una hora

Si luego de una hora la temperatura disminuyó de -10 °C a -15 °C, esto significa que la temperatura disminuyó también 5 °C.

Esto quiere decir que -10 °C es mayor que -15 °C. Lo podemos escribir también así:

$$-10\ ^\circ C > -15\ ^\circ C \quad \text{o} \quad -15\ ^\circ C < -10\ ^\circ C$$

Al representar estos valores en la recta, tenemos:

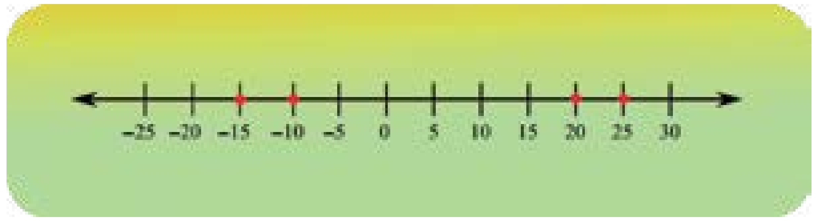


Noten que -10, el número mayor, está a la derecha de -15, que es el menor de los dos.

Podemos concluir entonces que un número entero "a" cualquiera es mayor que otro entero "b" cuando "a" esté a la derecha de "b" en la recta numérica.

Con base en el criterio anterior ordenaremos, de menor a mayor, los números que representan las temperaturas de los cuatro termómetros que vimos anteriormente.

Pero antes representemos estos números en la recta numérica.



Podemos escribir entonces:

$$-15 < -10 < 20 < 25$$

Adición de los números enteros

Las cinco águilas blancas

"Éste es el origen fabuloso de la Sierra Nevada de Mérida. Las cinco águilas blancas de la tradición indígena son los cinco elevados riscos siempre cubiertos de nieve. Las grandes y tempestuosas nevadas son el furioso despertar de las águilas y el silbido del viento en esos días de páramo es el remedo del canto triste y monótono de Caribay, el mito hermoso de los Andes de Venezuela".

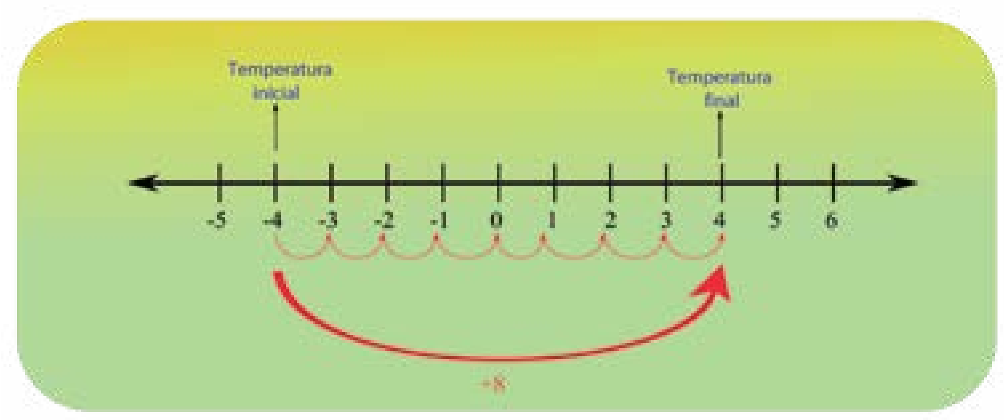
Tulio Febres Cordero.
Publicado en el periódico merideño "El lápiz" del 10/07/1895.

En el Parque Nacional Sierra Nevada, se encuentran las montañas llamadas las cinco águilas blancas: La Concha, El Toro, El Espejo, El León y el Pico Bolívar, cuyas alturas rebasan los 4.700 m. Además de los nevados picos Humboldt (4.290 m) y el Bondpland (4.942 m).

Si nos encontramos en la cima de El León a las 3 a.m. y el termómetro marca -4 °C, y luego al mediodía marca 4 °C. ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?

¿Cómo respondemos a este planteamiento?

Noten que en la recta numérica nos ubicamos sobre el número -4 y nos movimos 8 unidades hacia la derecha hasta alcanzar el número que hace referencia a la temperatura final.



Entonces, la temperatura subió 8 grados centígrados al pasar de -4 grados centígrados a 4 grados centígrados. Es decir:

$$-4 + 8 = 4$$

Si la temperatura en el Pico Bolívar, en cierto momento del día, es -1 °C, ¿cuánto debe disminuir para llegar a -5 °C? ¿Y para alcanzar los 3 °C?

La ciudad más al sur de América Latina

En Argentina, se encuentra Ushuaia, la ciudad más al sur de Nuestramérica, fundada el 12 de octubre de 1884. Ésta es la capital de la Provincia de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur de Argentina.

El clima de Ushuaia es del tipo verano frío (Cfc según la clasificación climática de Köppen), es decir, templado y húmedo todo el año. Es llamado también clima subpolar oceánico u oceánico frío. La temperatura media anual es de, aproximadamente, 6 °C.

Veamos cómo se comporta la temperatura anualmente en Ushuaia. La tabla que sigue muestra, aproximadamente, las temperaturas mínimas y máximas diarias observadas para cada uno de los meses por un período de 1 año.

Temperaturas mínimas y máximas en Ushuaia

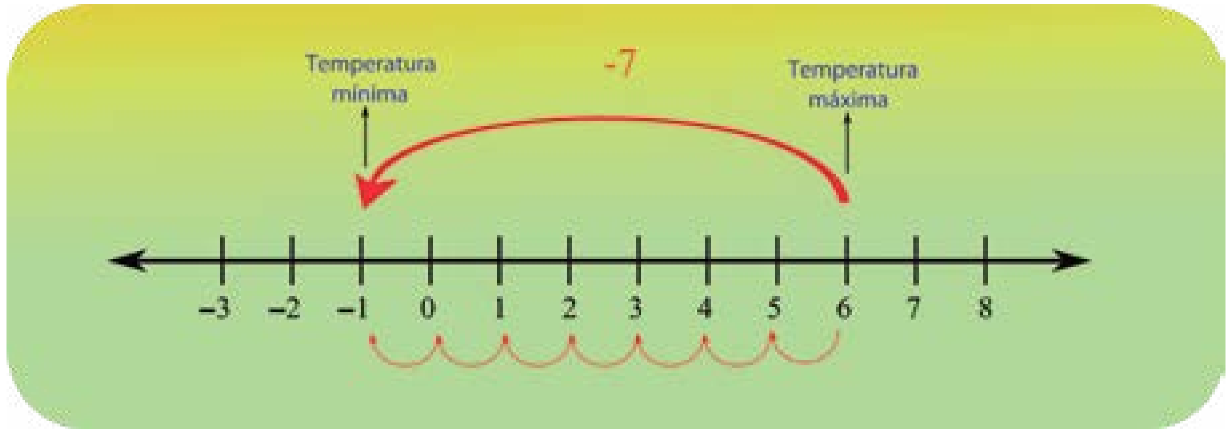
Mes	Temperatura media °C	
	Mínima diaria (aprox.)	Máxima diaria (aprox.)
Enero	5	15
Febrero	5	14
Marzo	4	12
Abril	2	10
Mayo	0	6
Junio	-1	5
Julio	-2	5
Agosto	-1	6
Septiembre	1	9
Octubre	2	11
Noviembre	4	13
Diciembre	5	14

Organización Meteorológica Mundial

Estos datos históricos de la temperatura son estudiados por un período de hasta 30 años. Notemos que durante cada mes se han registrado, históricamente, temperaturas mínimas y máximas.

- ¿En qué mes(es) se ha registrado la menor temperatura?
- ¿Cuál es la mayor temperatura registrada?

En el mes de agosto la temperatura mínima es de -1 °C, mientras que la temperatura máxima es de 6 °C. ¿Cuál es la variación en grados entre la temperatura máxima y la mínima registrada, históricamente, durante este mes?



Entonces, la temperatura disminuyó 7 grados centígrados al pasar de 6 grados centígrados a -1 grado centígrado.

Estábamos en 6 °C y disminuimos 7 °C para llegar a -1 °C. Es decir:

$$6+(-7)=-1$$

Observen las dos operaciones realizadas y busquen una norma para sumar números enteros.

Con base en las experiencias anteriores podemos establecer de forma general la regla que se presenta a continuación:

Adición de números enteros ($\mathbb{Z}$)

Para hallar la suma de dos números enteros nos fijamos en los signos.

- Si los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y el signo de la suma es el mismo que el de los sumandos.
- Si los signos de los números son distintos, se resta el mayor valor absoluto del menor, y a la diferencia se le asigna el signo del número con mayor valor absoluto.

Otras propiedades de la adición de los números enteros

Para seguir operando con números enteros, necesitamos otras propiedades, además del elemento neutro y del elemento simétrico u opuesto.

Veamos esas propiedades:

Propiedad asociativa

La adición es una operación que se efectúa con un par de números. La suma $a+b$ existe cualesquiera sean los números a y b (los cuales por supuesto pueden coincidir). Para realizar una adición con más de dos números, debemos hacer uso de la propiedad asociativa. Esta permite obtener la suma de un par de números y a ese resultado adicionarle otro, y así sucesivamente. Para obtener la suma de los 3 números enteros a, b y c, se puede sumar b y c obteniendo $b+c$ y después sumar a; o también se puede adicionarle primero a y b y, después agregar c a la suma $a+b$.

Por ejemplo:

$7 + (-5) + (-6) = -4$	$7 + (-5) + (-6) = -4$
$(7 - 5) + (-6) = -4$	$7 + (-5 - 6) = -4$
$2 - 6 = -4$	$7 + (-11) = -4$
	$7 - 11 = -4$

Las dos sumas son iguales, lo cual nos indica que no importa cómo se asocien los sumandos en una adición, su resultado o suma no se altera.

Por lo tanto, $a+(b+c)=(a+b)+c$; en donde a, b y c pertenecen al conjunto de los números enteros.

Propiedad conmutativa

Ésta es otra propiedad que estudiamos en el conjunto de los números naturales, que también se cumple en la adición de los números enteros. Nos indica que el orden de los sumandos no altera la suma. Así:

$2 + (-5) = -3$	También podemos decir que:
$-5 + 2 = -3$	entonces, $a+b=b+a$, con a y b números enteros.

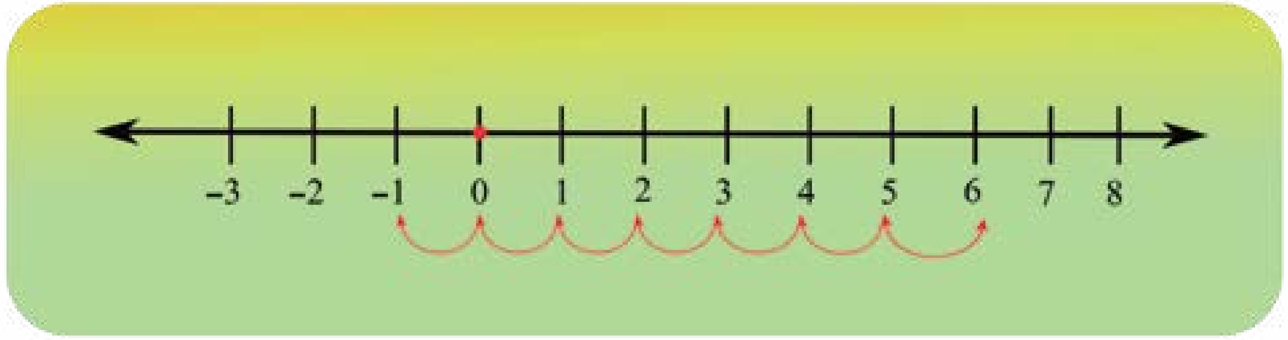
Ahora veamos cuál es el promedio anual de las temperaturas mínimas presentadas por mes en Ushuaia, utilizando el cuadro ya trabajado.

$x = \dfrac{5+5+4+2+0-1-2-1+1+2+4+5}{12}$	Aplicando la definición de media aritmética (Ver lección 12)
$x = \dfrac{(5+5+4+2+0)+(-1-2-1)+(1+2+4+5)}{12}$	Aplicando la propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{Z}$
$x = \dfrac{(16)+(-4)+(12)}{12}$	Aplicando la adición de números enteros
$x = \dfrac{(-4)+(28)}{12}$	Aplicando la propiedad asociativa y conmutativa de la adición de números enteros
$x = \dfrac{24}{12}$	Aplicando la adición de números enteros
$x = 2$	Determinando cuántas veces está contenido 12 en 24

Como podemos ver, el promedio de la temperatura mínima anual fue de dos grados centígrados. Ahora, calculen el promedio anual de la temperatura máxima.

Sustracción de números enteros

Haciendo uso del cuadro de temperaturas mínimas y máximas en Ushuaia, tenemos que, en el mes de agosto, la temperatura mínima es de -1 °C y la temperatura máxima es de 6 °C. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima registrada, históricamente, durante el mes?



Observen que tenemos que recorrer siete espacios para ir desde 6 °C hasta -1 °C. Entonces, tenemos que la sustracción viene dada por:

$$6-(-1)=6+(+1)=7$$

En consecuencia, lo que hemos realizado es adicionarle al minuendo 6, el opuesto del sustraendo -1.

Por tanto,

> La diferencia a-b es igual a la *suma* de a con el opuesto de b.
>
> Es decir:
>
> $$a-b=a+(-b)$$
>
> La sustracción es la operación inversa de la adición.

Multiplicación de números enteros

El **teleférico de Mérida** es el único teleférico del mundo, que combina una gran altura y un largo trayecto. Recorre $12{,}5$ Km de trayecto, y alcanza una altura de 4.765 m.s.n.m. Va desde la ciudad de Mérida hasta la cima del pico Espejo, dentro del Parque Nacional Sierra Nevada, en el estado Mérida. Está compuesto de 4 tramos que unidos completan el trayecto.

Investiguen cuál es el recorrido del teleférico en cada tramo.

En el año 2010, el Ministerio del Poder Popular para el Turismo inició un proceso de modernización del teleférico, que culminó en 2013. Este proceso incluyó la incorporación de seis cabinas. Las nuevas cabinas tienen una capacidad de 60 personas, más el cabinero.

¿Cuántas personas transportarán en total las seis cabinas nuevas? Para responder a esta pregunta multiplicaremos 6 por 60.

$6 \cdot 60 = 6 \cdot (6 \cdot 10)$	Expresando el sesenta como el producto de dos factores $60 = 6 \cdot 10$
$6 \cdot 60 = (6 \cdot 6) \cdot 10$	Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{N}$
$6 \cdot 60 = 36 \cdot 10$	Multiplicando números naturales
$6 \cdot 60 = 360$	

Las seis cabinas nuevas transportarán 360 personas en total. como los enteros positivos se identifican con números naturales, entonces:

El producto de dos enteros positivos es otro entero positivo.

Las cabinas antiguas del teleférico de Mérida sólo podían trasladar un máximo de 40 ocupantes. Es decir, cada cabina antigua tenía una capacidad de veinte ocupantes menos con relación a las cabinas nuevas. ¿Cuántas personas menos dejan de transportar seis cabinas de las antiguas con relación a las cabinas nuevas?

Para contestar a esta interrogante podemos sumar las personas que 6 cabinas viejas dejan de transportar:

$$(-20)+(-20)+(-20)+(-20)+(-20)+(-20)=-120$$

Aquí sumamos 6 veces el número -20, o lo que es igual:

$$6 \cdot (-20) = -120$$

El producto de dos enteros de diferente signo es un entero negativo.

Podemos concluir, entonces, que seis cabinas de las antiguas transportan 120 personas menos que seis cabinas de las nuevas.

Propiedades de la multiplicación de los números enteros

La multiplicación de los números enteros cumple con las propiedades asociativa, conmutativa, la existencia del elemento neutro y la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, ya estudiadas en el conjunto de los números naturales.

Veamos:

Propiedad asociativa

$$(4 \cdot 3) \cdot (-5) = 4[3 \cdot (-5)]$$
$$12 \cdot (-5) = 4 \cdot (-15)$$
$$-60 = -60$$

En general se cumple que: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, en donde a, b y c son números enteros.

Propiedad conmutativa

$$3 \cdot (-6) = (-6) \cdot 3$$
$$-18 = -18$$

Por lo tanto se cumple que: $a \cdot b = b \cdot a$, en donde a y b son números enteros.

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

$$(-5) \cdot (2+6) = (-5) \cdot 2 + (-5) \cdot 6$$
$$(-5) \cdot 8 = -10 - 30$$
$$-40 = -40$$

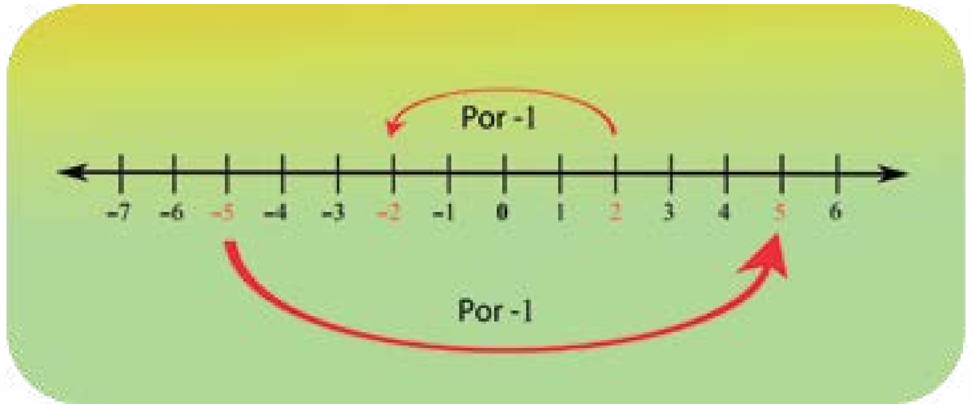
En general: $a + (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, en donde a, b y c son números enteros.

Multiplicando por –1

¿Recuerdan lo que conversamos antes sobre el inverso aditivo de un número entero? El inverso aditivo de 2 es -2 y el de -5 es 5. Ellos se encuentran a la misma distancia del cero (0).

El inverso aditivo de un número entero, como por ejemplo el opuesto de 2 o el opuesto de -5, puede hallarse al multiplicar el número dado por -1.

Veamos esto en la recta numérica:



Podemos decir entonces que:

$(-1)\cdot 2=-2$ y $(-1)\cdot(-5)=5$

De igual forma: $(-1)\cdot(-1)=1$

El producto de dos enteros negativos es un entero positivo.

A partir de esta conclusión sobre la multiplicación por -1, veamos otra forma de responder a la pregunta: ¿cuántas personas menos dejan de transportar seis cabinas de las antiguas del teleférico de Mérida con relación a las cabinas nuevas?

$6\cdot(-20)=6\cdot[(-1)\cdot(20)]$	Escribiendo -20 como el inverso aditivo de 20, en este caso como el producto $-1\cdot 20$
$6\cdot(-20)=6\cdot[(-1)\cdot(2)\cdot(10)]$	Escribiendo 20 como el producto de los factores, $20=2\cdot 10$
$6\cdot(-20)=6\cdot(2)\cdot(10)\cdot(-1)$	Aplicando la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$6\cdot(-20)=12\cdot 10\cdot(-1)$	Multiplicando números enteros
$6\cdot(-20)=120\cdot(-1)$	Multiplicando números enteros
$6\cdot(-20)=-120$	Aplicando la idea de inverso aditivo

Al multiplicar un entero positivo por un entero negativo, el resultado es un entero negativo.

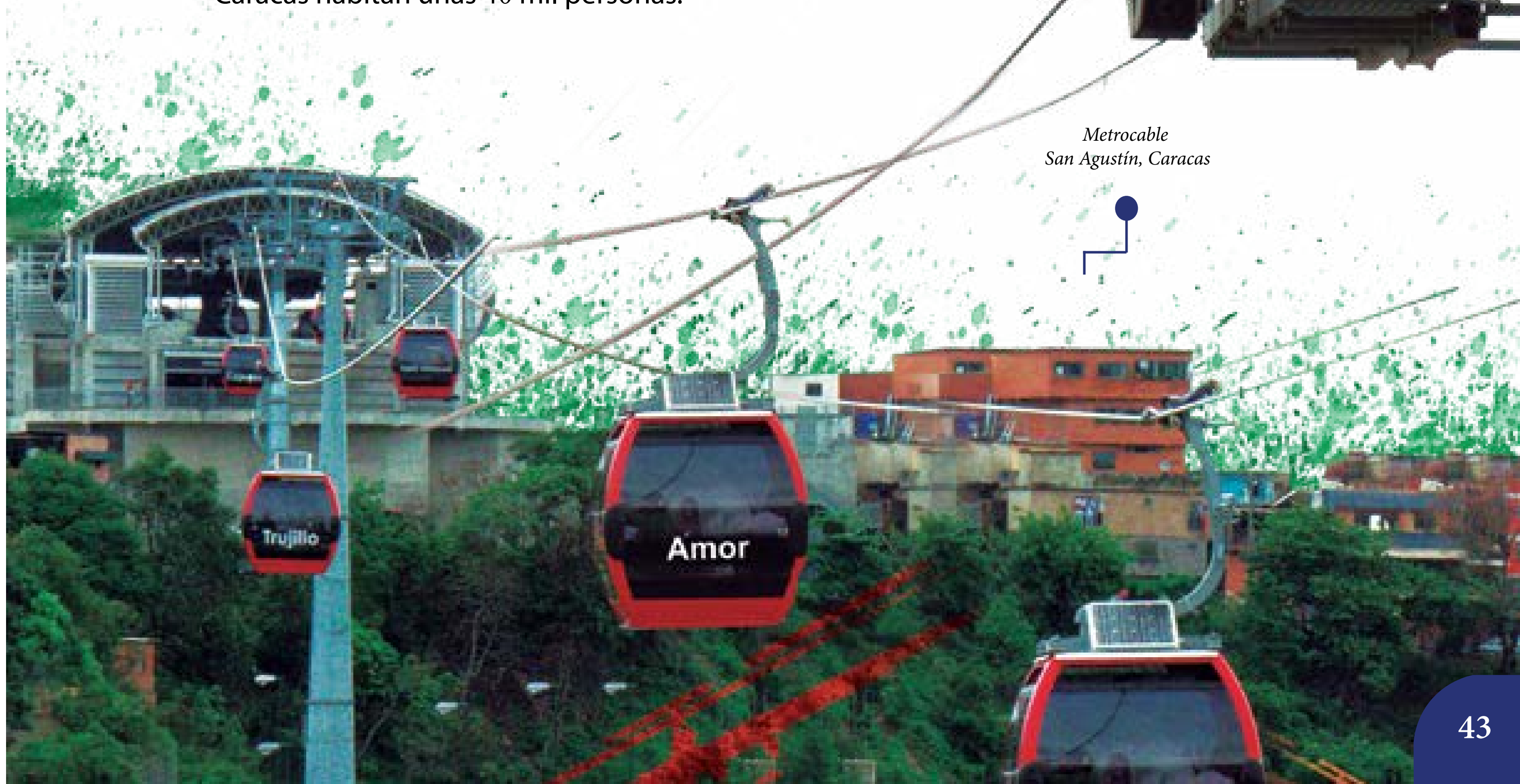
Elemento neutro de la multiplicación

Al igual que en los números naturales, el 1 es el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{Z}$. Es decir que $1\cdot a=a$, para cualquier entero a.

¿Qué pasaría si multiplicamos dos enteros negativos? ¿Qué signo tendrá el resultado? Vamos a calcular el producto $(-4)\cdot(-8)$:	
$(-4)\cdot(-8)=[(-1)\cdot(4)]\cdot[(-1)\cdot(8)]$	Escribiendo -4 y -8 como el producto de dos números enteros
$(-4)\cdot(-8)=[(-1)\cdot(-1)]\cdot[(4)\cdot(8)]$	Aplicando la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación en $\mathbb{Z}$
$(-4)\cdot(-8)=(1)\cdot(32)$	Obteniendo los producto indicados
$(-4)\cdot(-8)=32$	Multiplicando por el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{Z}$

El producto de dos enteros negativos es un entero positivo.

El Metrocable de San Agustín, inaugurado el 20 de enero de 2010, es un sistema de transporte similar al teleférico Warairá Repano. Fue construido con la finalidad de mejorar las condiciones de movilidad de los habitantes de San Agustín y facilitar el desplazamiento de las personas con discapacidad. En esta comunidad del municipio Libertador de Caracas habitan unas 40 mil personas.



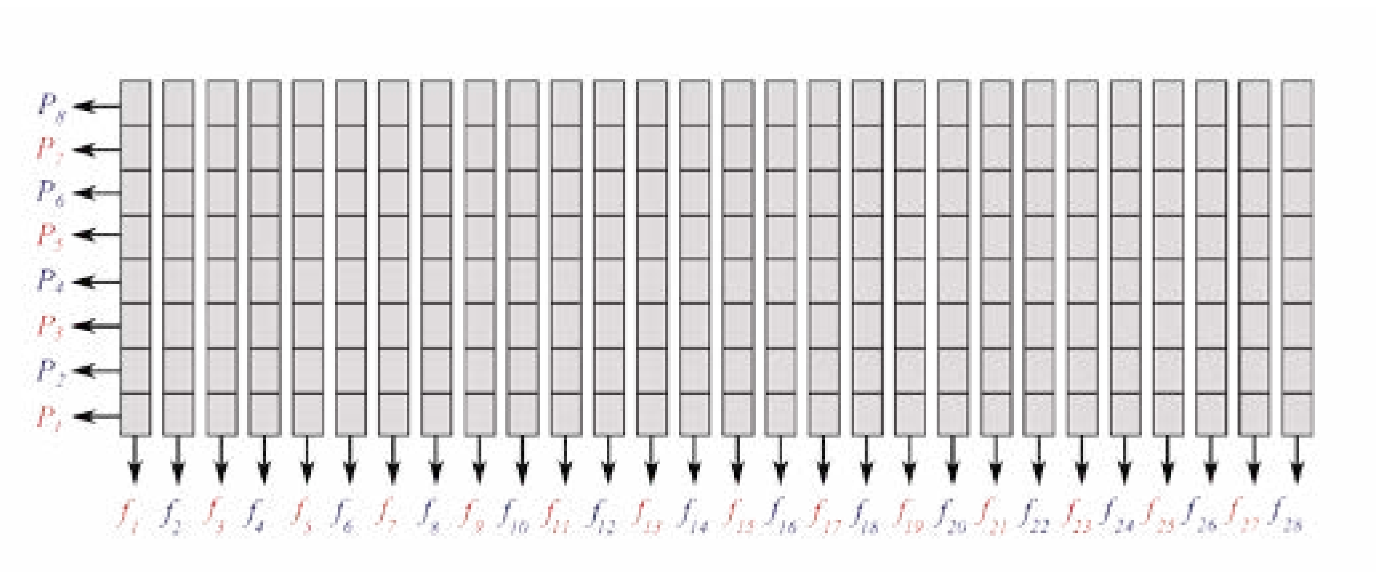
Metrocable San Agustín, Caracas

Este sistema cuenta con 52 funiculares. Inicialmente han estado operativos 28, cada uno de ellos con capacidad para transportar ocho personas. Investiguen:

¿Cuáles son las estaciones del Metrocable de San Agustín?, ¿cuál es la distancia que recorre? y ¿cuál es el tiempo aproximado de traslado por las estaciones?

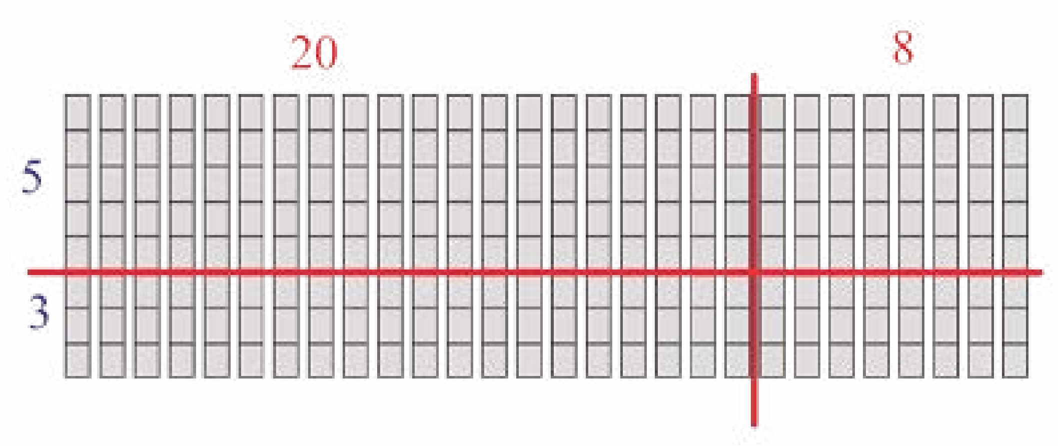
Ahora veamos, cuántas personas en total transportan 28 funiculares, si su capacidad máxima es de ocho personas. Para ello supongamos que podemos arreglar rectangularmente los funiculares, como se muestra seguidamente.

En este caso debemos multiplicar 28 por 8. Veamos cómo hacer esta multiplicación con base en una representación geométrica.

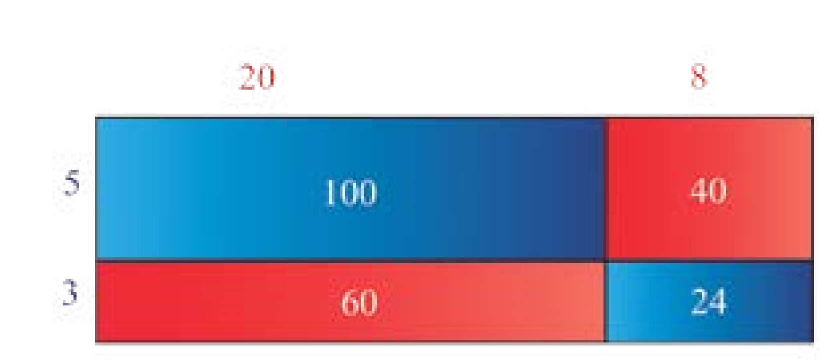


En la gráfica anterior f_1 significa funicular 1, f_2 quiere decir funicular 2, y así sucesivamente hasta f_{28} que quiere decir funicular 28. Mientras que P_1 significa puesto 1, P_2 quiere decir puesto 2, y así hasta llegar a P_8 que significa puesto 8.

Luego, descomponemos aditivamente el 28 en 20+8 y el 8 en 5+3. Gráficamente nos queda:



Ahora multiplicamos:



Adicionemos los productos obtenidos:

$$5 \cdot 20 = 100 \; + \; 3 \cdot 20 = 60 \; + \; 5 \cdot 8 = 40 \; + \; 3 \cdot 8 = 24 \; = \; 224$$

Esto es:

$28 \cdot 8 = (20 + 8) \cdot (5 + 3)$	Descomponiendo aditivamente el 28 y el 8
$28 \cdot 8 = 100 + 60 + 40 + 24$	Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición
$28 \cdot 8 = 224$	Obteniendo la suma indicada

En conclusión, 28 funiculares pueden transportar 224 personas al mismo tiempo.

Investiguen en qué lugares de nuestro país se están construyendo otros sistemas de transporte parecidos a los estudiados hasta el momento.

División de números enteros

El Metrocable de San Agustín cuenta con cinco estaciones: Parque Central, Hornos de Cal, La Ceiba, El Manguito y San Agustín. El recorrido tiene una longitud de 1,8 Km, equivalente a 1.800 m, y el tiempo aproximado del traslado por las cinco estaciones es de 15 minutos.

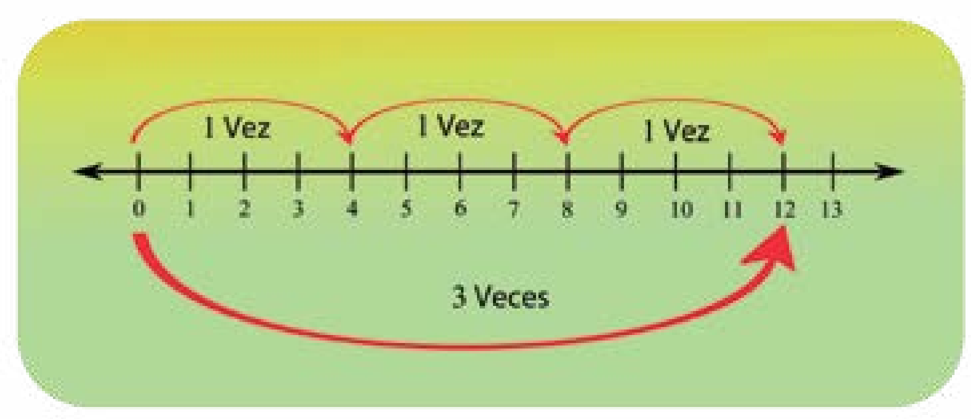
Conversen con su profesora o profesor, y con sus compañeras y compañeros, por qué esta equivalencia es cierta.

Veamos cuántos metros se recorren por minuto. Para ello vamos a responder a la pregunta: ¿cuántas veces está contenido 15 en 1.800? Esto implica dividir 1.800 entre 15.

Recordemos qué significa dividir un número natural por otro. Por ejemplo, si buscamos el cociente de dividir 12 entre 4, nos preguntamos cuántas veces está contenido 4 en 12. Observen:

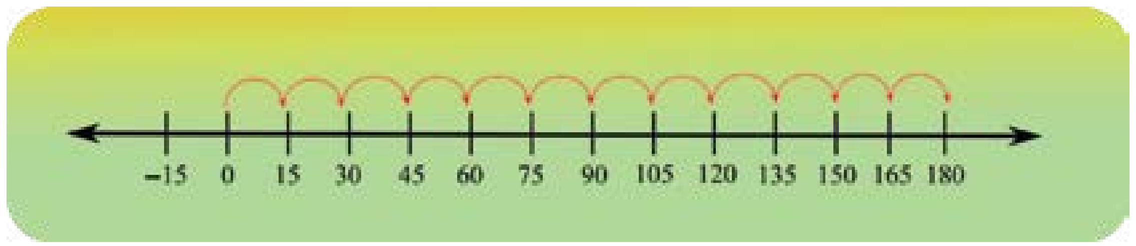
$$\begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} -12 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Lo que indica que el número 4 está contenido tres veces en el número 12. Veamos cómo se representa esto en la recta numérica:



Ahora veamos cuántas veces está contenido 15 en 180. Recuerden que 180 es una décima parte de 1.800, por lo tanto, el resultado obtenido será una décima parte del resultado final, es decir que lo multiplicaremos por 10 para responder a la pregunta planteada.

Observen la recta:



Podemos decir que 15 está contenido 12 veces en 180.
Es decir, que 15 estará contenido 120 veces en 1.800.
Por lo tanto, el Metrocable de San Agustín recorre 120 m por minuto.

Otra manera de entender la división es como una operación inversa de la multiplicación, que tiene por objeto encontrar uno de dos factores conocido su producto. Veamos:

Queremos saber por cuánto debemos multiplicar 2 para obtener como resultado –14. Es decir:

$$2 \cdot \square = -14$$

Como ya sabemos que el producto es negativo (–14), el signo del factor que estamos buscando debe ser negativo, pues 2 es positivo. Luego, el número que multiplicado por 2 da –14, es el –7.

Esto es igual a $-14 \div 2 = -7$.

Si ahora nos preguntamos qué número multiplicado por 2 da como resultado 14. Es decir:

$$2 \cdot \square = 14$$

El número que necesitamos en este caso para satisfacer la igualdad es el +7.

La división que corresponde en este caso es $14 \div 2 = 7$.

Ahora vamos a preguntarnos qué número multiplicado por –2 nos da como resultado –14.

Esto lo podemos escribir como sigue:

$$-2 \cdot \square = -14$$

El número que buscamos es 7.

Esto lo podemos escribir como sigue:

$$-14 \div -2 = 7$$

Podemos concluir que al dividir dos números enteros de igual signo, el cociente tiene signo positivo.
Mientras que al dividir dos enteros con diferente signo, el signo del cociente es negativo.

Temperatura y alimentos: una aplicación de los números enteros

La Termodinámica es una rama de la Física que estudia, entre otros, el proceso de equilibrio térmico. Este proceso se produce cuando un cuerpo se encuentra con baja temperatura y hace contacto con otro de mayor temperatura.

El calor pasa del cuerpo de mayor temperatura al cuerpo de menor temperatura; esta transferencia no ocurre al revés. Cuando se iguala la temperatura de los dos cuerpos, se alcanza el equilibrio térmico.

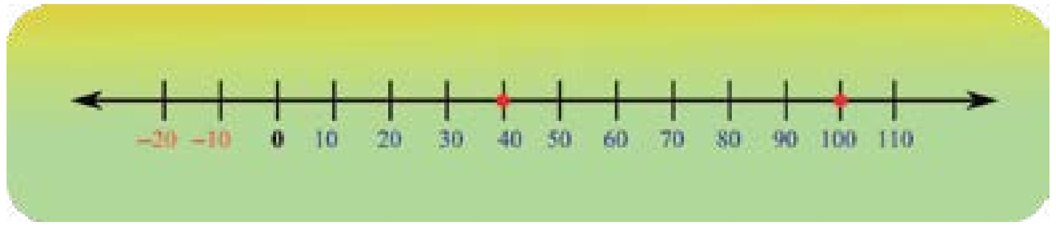
Investiguen los conceptos físicos: calor, transferencia de calor y trabajo.

Haciendo uso de las tablas que se presentan, resuelvan las siguientes situaciones:

1 Para hacer gelatina es necesario mezclar el agua de dos recipientes de la misma capacidad con temperaturas de +100 °C y de +40 °C, respectivamente (por ejemplo). ¿Cuál será el equilibrio térmico en estos dos líquidos al mezclarse en un recipiente? Si ambos líquidos tienen temperaturas por encima de cero grados, la temperatura resultante del equilibrio térmico, ¿estará por encima o por debajo de cero grados?

Descripción del proceso	Agua caliente	Agua a temperatura ambiente	Explicación
Antes de entrar en contacto	(+100) (+99) (+98)	(+40) (+41) (+42)	En este caso tenemos que ambos valores de la temperatura de los recipientes con agua se encuentran **encima de cero grados**
Comienza el proceso de equilibrio térmico	(+90) (+89) (+88) ↓	(+50) ↓ (+58) (+59)	El agua de mayor temperatura (+100 °C) le va "cediendo" calor al agua de menor temperatura (+40 °C), hasta que ambos líquidos llegan a la misma temperatura
Continúa el proceso de equilibrio térmico	(+80) (+79) (+78) (+77) Esta temperatura va disminuyendo ("enfriando")	(+60) (+61) (+62) (+63) Esta temperatura va aumentando ("calentando")	
Se alcanza el equilibrio térmico	(+76) ↓ (+70)	(+64) ↓ (+70)	¿Puedes mencionar una regla que permita operar con los números que representan estas temperaturas para obtener su equilibrio térmico?

Si observamos este proceso de equilibrio térmico en la recta numérica, ¿qué pueden concluir? Apóyense en la recta numérica siguiente para responder a esta pregunta:



2 Pedro elaboró para la venta helados de mango en vasitos. Para ello, tuvo que colocar los helados dentro del congelador de su nevera a una temperatura de –9 °C. Luego, para llevarlos a vender los pasó a una cava con hielo, que estaba a una temperatura de –5 °C, ¿cuál será el equilibrio térmico de los helados?, si en ambos casos la temperatura está por debajo de cero grados, la temperatura resultante del equilibrio térmico, ¿estará por encima o por debajo de cero grados?

3 La leche es transportada en camiones cava cuya temperatura es –15 °C y, al llegar al establecimiento donde será vendida a los consumidores, se coloca en neveras cuya temperatura es +9 °C. ¿Cuál será el equilibrio térmico de la leche? La temperatura resultante del equilibrio térmico, ¿estará por encima o por debajo de cero grados?

4 Lean el siguiente artículo publicado en la prensa venezolana e inicien una discusión sobre el calentamiento global.

CORREO DEL ORINOCO

Martes, 14 de Febrero de 2012 www.correodelorinoco. La artillería del pensamiento

Inicio » Avances, Ciencia y Tecnología, Ambiente y Ecología http://www.correodelorinoco.gob.ve/ciencia-tecnologia/inicia-tierra-sexta-extincion-masiva-especies/

Según presidente de Unión Internacional de Conservación de la Naturaleza

Inicia en La Tierra sexta extinción masiva de especies

"Somos testigos de la sexta extinción masiva en la Tierra desde el momento de la aparición de la vida en el planeta. La anterior conllevó la desaparición de los dinosaurios", afirmó Ashok Khosla.

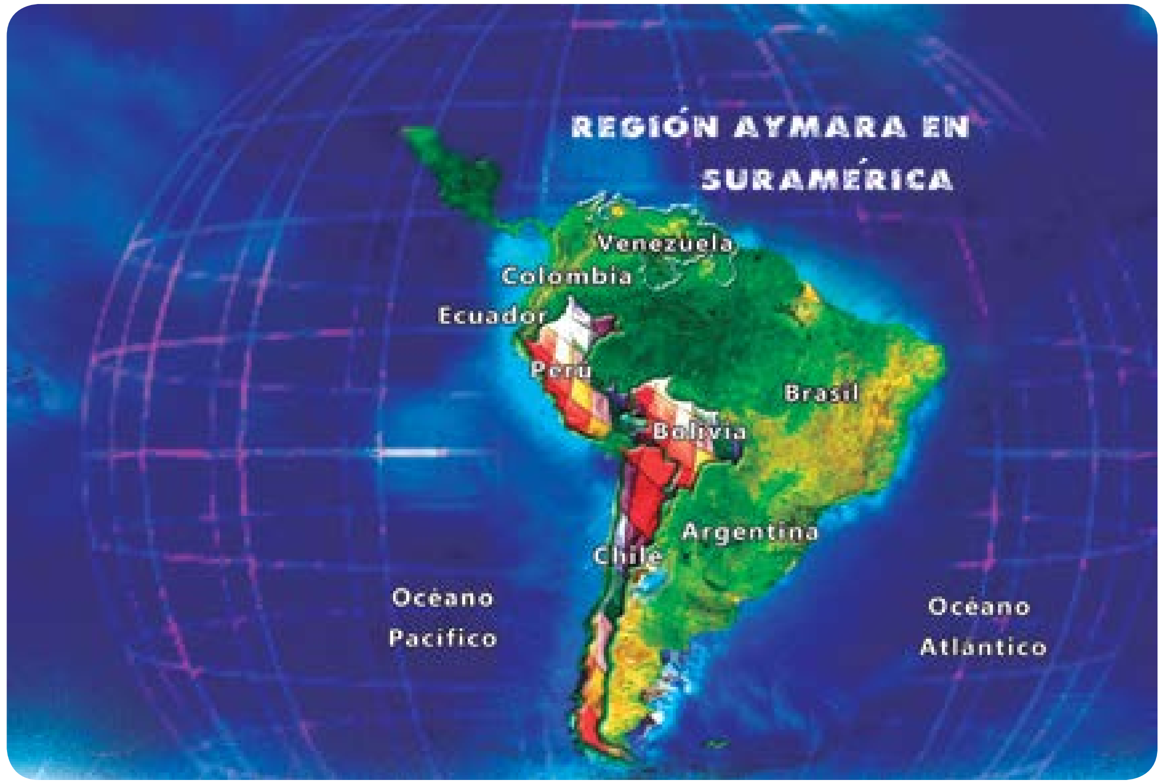
Un proceso de extinción de la biosfera que pondrá fin a miles de especies se ha iniciado en la Tierra, según declaró el presidente de la Unión Internacional de la Conservación de la Naturaleza, Ashok Khosla. "Somos testigos de la sexta extinción masiva en la Tierra desde el momento de la aparición de la vida en el planeta. La anterior conllevó la desaparición de los dinosaurios", afirmó el científico a los medios en una rueda de prensa que se celebró en Moscú.

Actualmente unas 19.600 especies de animales y plantas, un tercio de todos los que habitan la Tierra, están en peligro de extinción. En los últimos 20 años se ha duplicado la cantidad de especies que pueden desaparecer para siempre de nuestro planeta. Así, Khosla señaló que para 2050 la humanidad puede quedarse sin recursos pesqueros. El especialista destacó que cada día en el planeta se talan o se queman 50.000 hectáreas de bosques. Alrededor de 20.000 hectáreas de tierras agrícolas se convierten en desiertos o son destruidas por la erosión. Unas 60.000 toneladas de CO2 envenenan la atmósfera a diario. La elevación del nivel oceánico mundial, uno de los efectos del calentamiento global, puede hacer que en los próximos 100 años desaparezcan varios estados insulares del mapa mundi.

Si el hombre no deja de destruir a la Tierra, que se lo da todo, dentro de unos decenios puede verse viviendo en un desierto o simplemente de dejar de existir, según advierten algunos científicos.

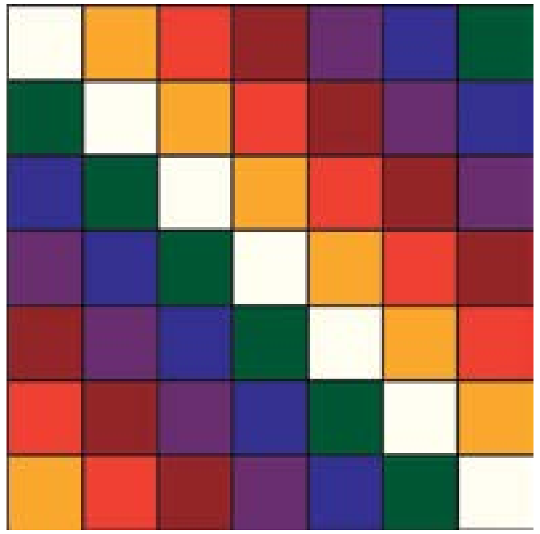
3 WIPHALA, SÍMBOLO DE LIBERACIÓN

Máximo común divisor, mínimo común múltiplo. Números primos y compuestos



Una lengua, una cultura, un pueblo

La wiphala es un emblema aimara. Aimara o aymará es el nombre que recibe el pueblo indígena americano, que ancestralmente ha habitado la meseta andina desde los tiempos precolombinos, distribuido entre el occidente de Bolivia, el sur del Perú, el norte de Chile y el norte de Argentina. Su lengua materna se llama igualmente Aymara.



Este emblema, la wiphala, es una bandera de forma cuadrangular, que se asemeja por su forma a un tablero de ajedrez con cuatro lados congruentes. En cada lado se distinguen 7 colores. Fue reconocida como símbolo del Estado Plurinacional de Bolivia en el año 2008.

- Sucre es la capital de Bolivia.
- Los símbolos del Estado son la bandera tricolor rojo, amarillo y verde; el himno boliviano; el escudo de armas; la wiphala; la escarapela; la flor de la kantuta y la flor del patujú.

La wiphala es usada en una infinidad de ocasiones: en actos ceremoniales de la comunidad, en encuentros comunitarios, en fiestas solemnes, en fechas históricas, en matrimonios de la comunidad, en nacimientos de una niña o un niño, y en las festividades agrícolas. Es por ello que, a los miembros de la **Cooperativa Tiahuanaco** dedicada a labores textiles, les solicitaron hacer varias wiphalas para repartirlas entre las comunidades, que requerían de wiphalas de gran tamaño para colocarlas como emblemas en cada una de las comunidades del altiplano andino.

Elaborando las wiphalas

La cooperativa tiene en su almacén siete rollos de tela con los colores que usa la wiphala: blanco, verde, azul, violeta, rojo, naranja y amarillo. Todos los rollos son de un metro veinte centímetros (1, 20 m o 120 cm) de ancho, pero cada rollo de tela tiene diferentes cantidades como se muestra en la tabla.

Rollos	Blanco	Verde	Azul	Violeta	Rojo	Naranja	Amarillo
m	20	25	32	14	16	50	36

¿Cuántas wiphalas pueden hacer?

Para hacer las wiphalas necesitan saber cuántos cuadrados de cada color se pueden hacer con la tela disponible y de qué tamaño son los cuadrados a recortar.

Como todos los rollos son de un metro veinte centímetros de ancho, la única preocupación era el largo de la tela disponible. Así que para cada rollo calcularon cuántos cuadrados podían obtener.

El rollo de tela blanca tiene 20 m de largo, lo que equivale a 2.000 cm.

Recuerden que, para hacer la equivalencia de 20 m a cm, debes multiplicar por la unidad seguida de tantos ceros como lugares de posición se encuentren entre estas dos unidades.

Múltiplos del metro			metro (m)	Submúltiplos del metro		
Kilómetro (km)	Hectómetro (hm)	Decámetro (dam)		Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
1 km = 1.000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m		1 m = 10 dm	1 m = 100 cm	1 m = 1.000 mm

20 m → 2.000 cm

$$20 \cdot 100 \text{ cm} = 2.000 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el rollo de tela blanca mide 2.000 cm de largo y 120 cm de ancho, esto equivale a una superficie cuya área mide 240.000 cm². Recuerden que la superficie del rollo tiene forma de rectángulo, y el área de un rectángulo se determina multiplicando la medida del largo por la medida del ancho.

Máximo común divisor (M.C.D.)

Dado el largo y el ancho de la tela blanca, ¿cuál tamaño deben tener los cuadrados con miras a aprovechar al máximo la tela disponible?

Investiguen cómo dividir la tela para obtener los cuadrados de mayor tamaño posible.

Esto se logra con el máximo común divisor (M.C.D.), tal como se explica en la lección "Centro de Diagnóstico Integral" que estudiaste en el libro de sexto grado.

Recuerden que el **máximo común divisor** de dos números se obtiene así: después de descomponer dichos números en sus factores primos, tomamos los factores comunes con su menor exponente y procedemos a multiplicarlos.

Así, lo primero que debemos hacer es descomponer ambos números en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 2.000 & 2 \\ 1.000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De acá se obtiene que:

$$2.000 = 2^4 \cdot 5^3$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Por tanto,

$$\text{M.C.D. } (2.000,\ 120) = 2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$$

Así obtuvimos que los cuadrados que se pueden hacer de la tela blanca, con el fin de aprovechar al máximo la tela, deban ser de 40 cm por lado.

Realicen la siguiente actividad en sus cuadernos y socialicen con alguna compañera o compañero y con su profesor o profesora:

Calculen el tamaño de los cuadrados máximos que se pueden recortar para cada uno de los rollos de tela verde, violeta, roja, naranja y amarilla.

Una vez obtenidos todos los valores anteriores, los miembros de la cooperativa textil deben tomar una decisión: ¿cuál es el tamaño del cuadrado más grande que se puede recortar con las telas disponibles para hacer las wiphalas?

Luego de hacer los cálculos, tenemos que para casi todos los rollos de tela se obtienen cuadrados de 40 cm por lado, menos para el verde y para el naranja, pues el mayor cuadrado que se puede obtener de estos rollos de tela, es de 20 cm por lado.

Por tanto, dado que la wiphala está conformada por 49 cuadrados (7 de cada color) y todos deben ser del mismo tamaño, todos los cuadrados deberán tener la medida del cuadrado menor.

Les invitamos a compartir y socializar las siguientes preguntas con sus compañeras y compañeros, y a encontrar las respuestas:

- ¿Cuántas wiphalas se pueden hacer con los rollos de tela disponible?
- ¿Cuántos cuadrados sobran de cada color?

Además les invitamos a encontrar el máximo común divisor (M.C.D.) de los siguientes pares de números:

- 40 y 60
- 35 y 48
- 70 y 62
- 100 y 150
- 225 y 300
- 415 y 520
- 280 y 840

Las costumbres del pueblo aymara representan la grandeza histórica de su cultura. Por ejemplo, los niños, al entrar ya a su primera juventud, son ejercitados en el deporte por medio de juegos (agilidad, carrera, resistencia, caza, tiro, entre otros). Los torneos se realizan con ocasión de la fiesta solar. Al ser consagrados los jóvenes en los deportes, son también exhortados por los sabios y los ancianos próceres, para comprender que abandonan la niñez y que entran en edad del buen obrar, en donde sus preocupaciones futuras deben ser los problemas de la comunidad.

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Supongamos que dos jóvenes aymara, uno novato y otro no tan novato, se encuentran en una pista de entrenamiento para ejercitarse, al igual que los corredores de alta competencia en una prueba de 5.000 m planos. El novato da una vuelta a la pista, en período de calentamiento, en 10 minutos y el joven más experimentado en 6 minutos. Si ambos jóvenes comienzan a dar vueltas de calentamiento y parten del mismo punto al mismo tiempo, ¿cada cuántas vueltas vuelven a coincidir en la pista?

Para resolver este problema debemos calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.). De allí que lo primero que debemos hacer es tomar los tiempos de calentamiento de ambos jóvenes y descomponer ambas cantidades en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De acá se obtiene que:

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

Por tanto:

$$\text{m.c.m}\,(10, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Este resultado nos indica que ambos jóvenes se vuelven a encontrar después de dar 30 vueltas a la pista de entrenamiento.

Recuerden que el **mínimo común múltiplo** de dos números se obtiene así: después de descomponer dichos números en sus factores primos, tomamos los factores comunes y los no comunes con su mayor exponente y procedemos a multiplicarlos.

En sus cuadernos y con la ayuda de sus compañeras y compañeros, calculen el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

- 30 y 16
- 45 y 15
- 17 y 31
- 310 y 165

Números primos y compuestos

¡Primos que no son familia!

A continuación presentamos una whipala con los 49 primeros números naturales.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Para obtener los números primos entre los cuarenta y nueve primeros números naturales usaremos los siguientes pasos:

El número 1, es el primer eliminado por tener un solo divisor, él mismo (no es primo).

Seguimos con el número 2 y lo resaltamos, ya que el 2 es primo. Luego tachamos todos los múltiplos de 2, es decir, tachamos los números 4, 6, 8, y así hasta llegar al 48, último número par en esta wiphala. Recuerden que todos los múltiplos de 2 son divisibles por lo menos entre 1, entre 2 y entre ellos mismos. Así, si tomamos un múltiplo de 2 como el 18, podemos ver que es divisible entre los siguientes números: 1, 2, 3, 6, 9 y 18, por lo tanto no es primo. Revisen otros dos números múltiplos de 2 y verifiquen cuáles son sus divisores.

Se continúa con el siguiente número no tachado en la tabla, en este caso el número 3. Resaltamos el número 3 como primo y tachamos todos los múltiplos de 3, es decir tachamos los números 6, 9, 12, entre otros. ¿Podemos decir por qué el número 3 es primo? Y, ¿por qué los números que has tachado no son primos?

El siguiente número no tachado en la tabla es el 5. Resaltamos el número 5 como primo y tachamos todos los múltiplos de 5. Por lo tanto tachamos los números 10, 15, 20, entre otros.

El siguiente número no tachado en la tabla es el 7. Resaltamos el número 7 como primo y tachamos todos los múltiplos de 7, mayores que él. Por lo tanto tachamos los números 14, 21, 28, 35, 42 y 49.

Así mismo resaltaremos el 11, luego el 13 y así sucesivamente.

Recuerden que, en matemática, son primos aquellos números que sólo se pueden dividir, de manera exacta, entre uno (1) y entre sí mismos.

Veamos algunos ejemplos:

Tomemos el número 7, intentemos dividirlo entre otros números:

7 | 1
0 7

7 | 2
1 3

7 | 3
1 2

7 | 4
3 1

7 | 5
2 1

7 | 6
1 1

7 | 7
0 1

Como pueden ver, el número 7 sólo es divisible entre uno y siete, por lo tanto podemos decir que 7 es un número primo.

Tomemos ahora el número 6 y hagamos lo mismo que con el 7:

$\begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 6 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

El número 6 es divisible entre 1, 2, 3 y 6. Por lo tanto, 6 no es primo, ya que puede ser dividido de manera exacta entre otros números diferentes a 1 y a sí mismo. Es decir:

El 6 es un número compuesto.

En matemática, son **compuestos** aquellos números que se pueden dividir, de manera exacta, entre más de dos números.

Ahora con sus compañeras y compañeros respondan las siguientes interrogantes y anoten los resultados en sus cuadernos:

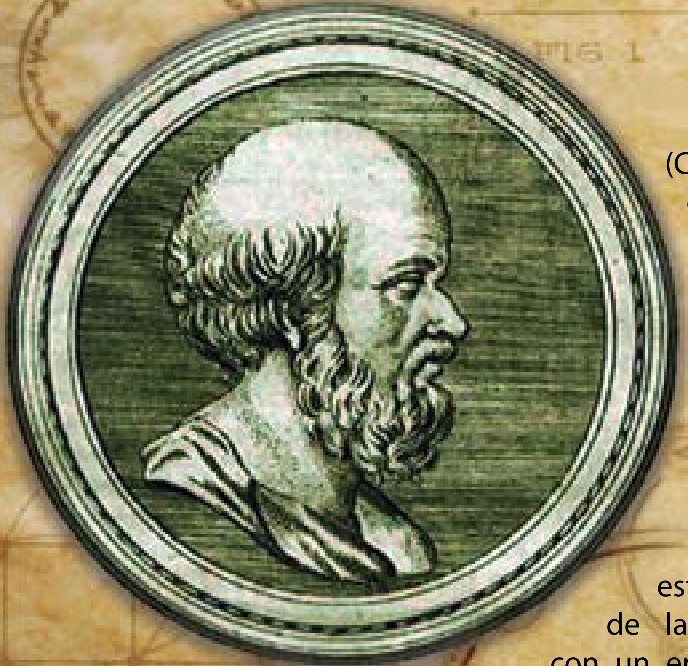
- ¿Cuáles de los siguientes números son primos?

31 $\quad$ 21 $\quad$ 27 $\quad$ 79 $\quad$ 17 $\quad$ 43

- ¿Cuántos números primos de dos cifras hay? Y, ¿cuáles son?

Para obtener los números primos entre los cien primeros números naturales, por ejemplo, se utiliza la **criba de Eratóstenes**, que es un procedimiento que permite determinar todos los números primos comprendidos entre 1 y *n*.

Ahora, utilizando este mismo procedimiento que acabamos de realizar, determinen, junto con sus compañeras y compañeros, los números primos entre los primeros 200 números naturales.



Eratóstenes

(Cirene, C. 284 a.d.n.e. - Alejandría, C. 192 a.d.n.e.) Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo, fue una de las figuras más eminentes de la ciencia griega de su tiempo. Cultivó no sólo las ciencias, sino también la poesía, la filología y la filosofía.

Fue célebre en Matemática por la criba que lleva su nombre, utilizada para hallar números primos, y por su mesolabio, instrumento de cálculo usado para resolver la media proporcional.

Eratóstenes es particularmente recordado por haber establecido, por primera vez, la longitud de la circunferencia de la Tierra (252.000 estadios, equivalentes a 40.000 km) con un error de solo 90 km respecto a las estimaciones actuales.

Significado de los colores de la wiphala

BLANCO: representa al tiempo y a la dialéctica (jaya-pacha), es la expresión del desarrollo y la transformación permanente del Qullana Marka sobre los Andes.

AMARILLO: representa la energía y fuerza (ch'ama-pacha), es la expresión de los principios morales del hombre andino, es la doctrina del Pacha-kama y Pacha-mama.

NARANJA: representa la sociedad y es la expresión de la cultura, también expresa la preservación y procreación de la especie humana.

ROJO: representa al planeta Tierra (aka-pacha), es la filosofía cósmica en el pensamiento y el conocimiento de los Amawtas.

VIOLETA: representa la política y la ideología andina, es la expresión del poder comunitario y armónico de los Andes.

AZUL: representa al espacio cósmico, al infinito (araxa-pacha), es la expresión de los sistemas estelares del universo y los efectos naturales que se sienten sobre la Tierra.

VERDE: representa la economía y la producción andina, es el símbolo de las riquezas naturales, de la superficie y el subsuelo; representa tierra y territorio.

4 SIMÓN BOLÍVAR CABALGA POR EL CIELO

Notación científica y descomposición polinómica de un número

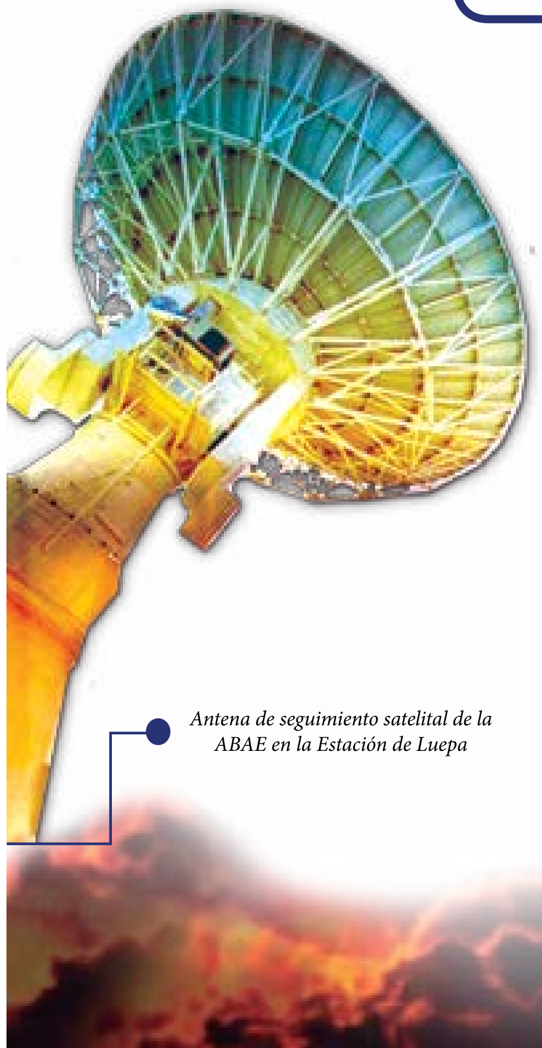
"Grandes" y "pequeñas" distancias

El día 29 de octubre de 2008, justo a las 12:28 p.m. se lanzó un cohete desde la República Popular China con el objetivo de poner en órbita el primer satélite venezolano VENESAT-1, que lleva el nombre de nuestro Libertador Simón Bolívar. Éste posee 5 antenas y 28 dispositivos (que reciben el nombre de "transpondedores"), cuya función es recibir, procesar y retransmitir señales desde y hacia el planeta Tierra en tres bandas, que abarcan casi todo el continente de nuestra América del Sur, parte de Centroamérica y el Caribe, y toda Venezuela. Como sabemos, todas las operaciones de control y mantenimiento del Satélite Simón Bolívar se realizan desde la Agencia Bolivariana para Actividades Espaciales (ABAE) y por la Compañía Anónima Nacional Teléfonos de Venezuela (CANTV) desde sus estaciones de control y respaldo ubicadas en El Sombrero (estado Guárico) y en Luepa (estado Bolívar).

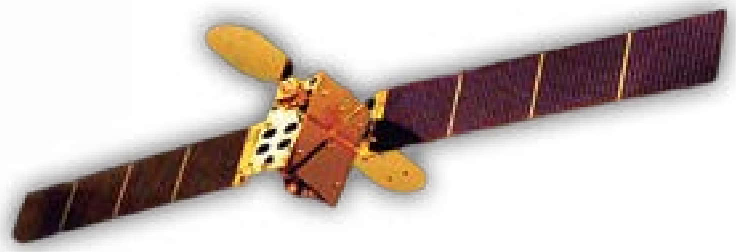
Este satélite ha permitido mejorar los servicios de teleducación y telemedicina, y más ampliamente la integración de nuestra América.

El Satélite Simón Bolívar está a 35.784.000 m (treinta y cinco millones setecientos ochenta y cuatro mil m), aproximadamente, de la Estación Terrena de Control Principal. Distancia que, a pesar de parecer "muy grande", es "relativamente pequeña" en el campo de la astronomía.

En el macromundo y en el micromundo es necesario emplear números muy grandes o muy pequeños, por ejemplo, en el campo de la astronomía, o en el estudio de las células o de los átomos.



Antena de seguimiento satelital de la ABAE en la Estación de Luepa



Actualmente, el Satélite Simón Bolívar permite las conexiones para transmisiones oficiales, transmisiones conjuntas de radio y televisión, programas con participación de comunidades, conexiones de Infocentros, Centro Bolivariano de Informática y Telemática (Cbit), entre otros.

Antes de seguir, investiguen y discutan en clase sobre lo siguiente:

- ¿Cuál es la distancia aproximada de la Tierra a Venus? ¿Y de la Tierra a Plutón?
- ¿Cuál es el diámetro de una célula? ¿Qué número de células se estima tiene el cuerpo humano? ¿Y el diámetro de las bacterias?

Sobre el macro y el micromundo: necesidad de una notación especial

Ejemplo 1. El universo está compuesto, aproximadamente, por 100 mil millones de galaxias, es decir:

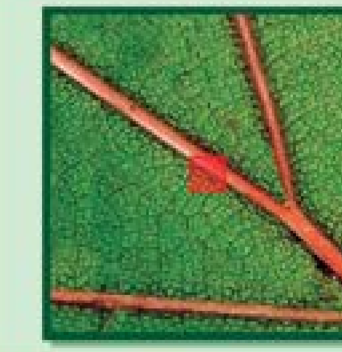
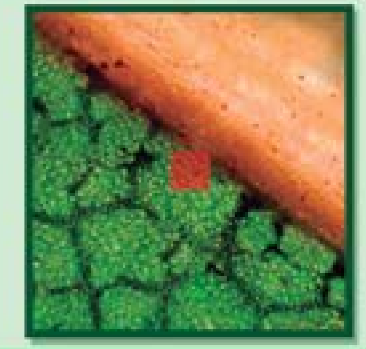
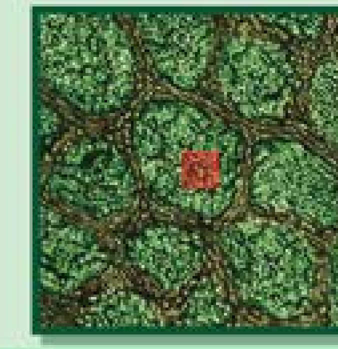
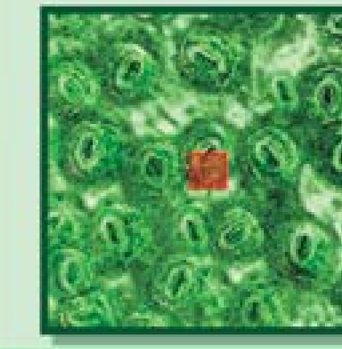
$$100.000.000.000$$

Número que podemos escribir como potencias de base 10. Veamos:

$$\begin{aligned} 100.000.000.000 &= 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 \\ &= 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1\cdot 10^1 \\ &= 10^{11} \end{aligned}$$

Observemos que nos hemos apoyado en la potenciación, en especial, en la multiplicación de potencias de igual base. Por ello, sumamos los exponentes del 10, y obtuvimos 10^{11}.

Ejemplo 2. Observemos la siguiente tabla. En ella presentamos una serie de imágenes en las que expresamos el área de algunas regiones de una hoja en función de las potencias de 10. Hacemos algo similar para algunas distancias astronómicas.

		
$10^{0}\ m = 1\ m = 100\ cm$	$10^{-1}\ m = 0{,}1\ m = 10\ cm$	$10^{-2}\ m = 0{,}01\ m = 1\ cm$
100 *centímetros*	10 *centímetros*	1 *centímetro*
		
$10^{-3}\ m = 0{,}001\ m = 1\ mm$	$10^{-4}\ m = 0{,}0001\ m = 100\ um$	$10^{-5}\ m = 0{,}00001\ m = 10\ um$
1 *milímetro*	100 *micrómetros*	10 *micrómetros*
		
$10^{18}\ m$	$10^{22}\ m$	$10^{15}\ km$
Aquí apenas observamos el Sol	Un millón de años luz	El diámetro de la Vía Láctea es de casi 1.000 billones de *km*
Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año (a una velocidad de 300.000 *km*), esto es, aproximadamente 9.460.728.000.000 *km*, cerca de 10 billones de kilómetros		

La notación científica

Escribir un número en función de las potencias de base 10 significa expresarlo en notación científica. Es decir, dado un número x su notación científica tendrá la forma que sigue:

$$x = a \cdot 10^{b}$$

donde a es un coeficiente mayor o igual a 1 y menor que 10, lo que simbólicamente se escribe así: $1 \leq a < 10$

Y b es un número entero (positivo o negativo), denominado **exponente** de 10.

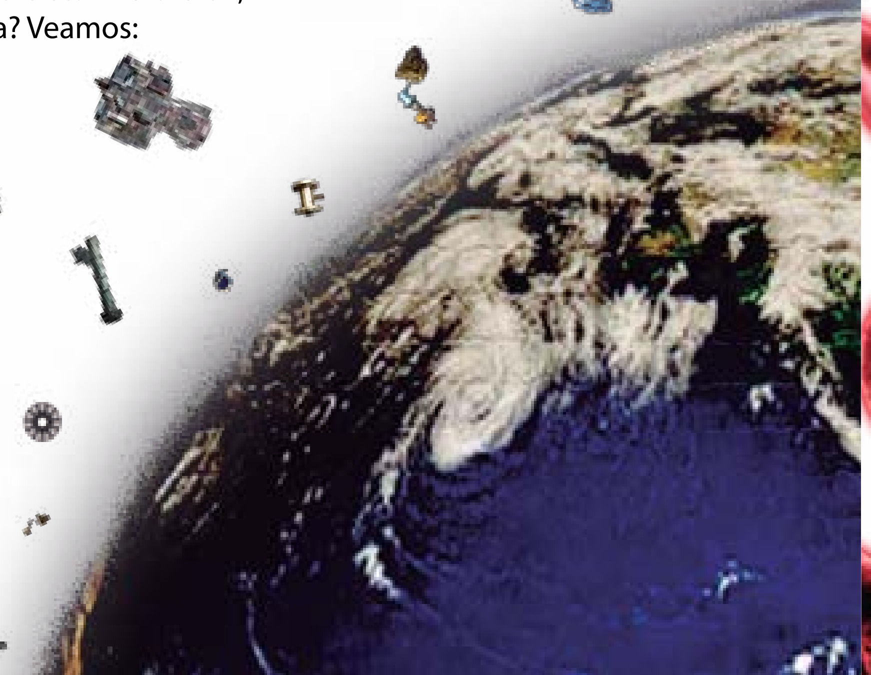
Este tipo de notación de números muy grandes o muy pequeños facilita, en general, los cálculos con ellos.

Ya en la sección anterior hemos visto algunos ejemplos, veamos otros:

Ejemplo. En el espacio se estima que hay cerca de 600.000 desperdicios en órbita, lo cual representa un riesgo, al menos, para los satélites y las naves espaciales tripuladas. Por esta razón, el Instituto Keldysh de Matemáticas Aplicadas, perteneciente a la Academia de Ciencias de Rusia y el Centro de Astronomía "Francisco J. Duarte" (CIDA), firmaron un acuerdo en octubre de 2010 para cooperar en la observación de estos desperdicios. Ahora bien, ¿cómo expresamos 600.000 en notación científica? Veamos:

$$\begin{aligned} 600.000 &= 6 \cdot 100.000 \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{coeficiente}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{potencia de base diez}}}{10^{5}} \end{aligned}$$

Observen que escribimos 600.000 como el producto de 6 y 100.000, donde el 6 es mayor o igual a 1 y menor a 10. Luego, expresamos 100.000 como una potencia de base 10, en este caso como 10^{5}.



Ejemplo. Tomemos por caso, la distancia aproximada entre el Satélite Simón Bolívar y la Estación Terrena de Control Principal: $35.784.000\ m$ (treinta y cinco millones setecientos ochenta y cuatro mil metros). Ahora, expresémoslo en notación científica:

$$\begin{aligned} 35.784.000 \text{ m} &= 3{,}5784 \cdot 10.000.000 \text{ m} \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{coeficiente}}}{3{,}5784} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{potencia de base diez}}}{10^{7}} \text{ m} \end{aligned}$$

Este procedimiento lo pueden verificar multiplicando $3{,}5784$ por $10.000.000$ y deben obtener $35.784.000$ m.

De esta manera el coeficiente verifica que $1 \leq 3{,}5784 < 10$.

$3{,}5784 \cdot 10^{7}$ m se lee: tres coma cinco mil setecientos ochenta y cuatro diez milésimas, por diez a la siete metros.

Ejemplo. Un glóbulo rojo tiene un diámetro estimado de:

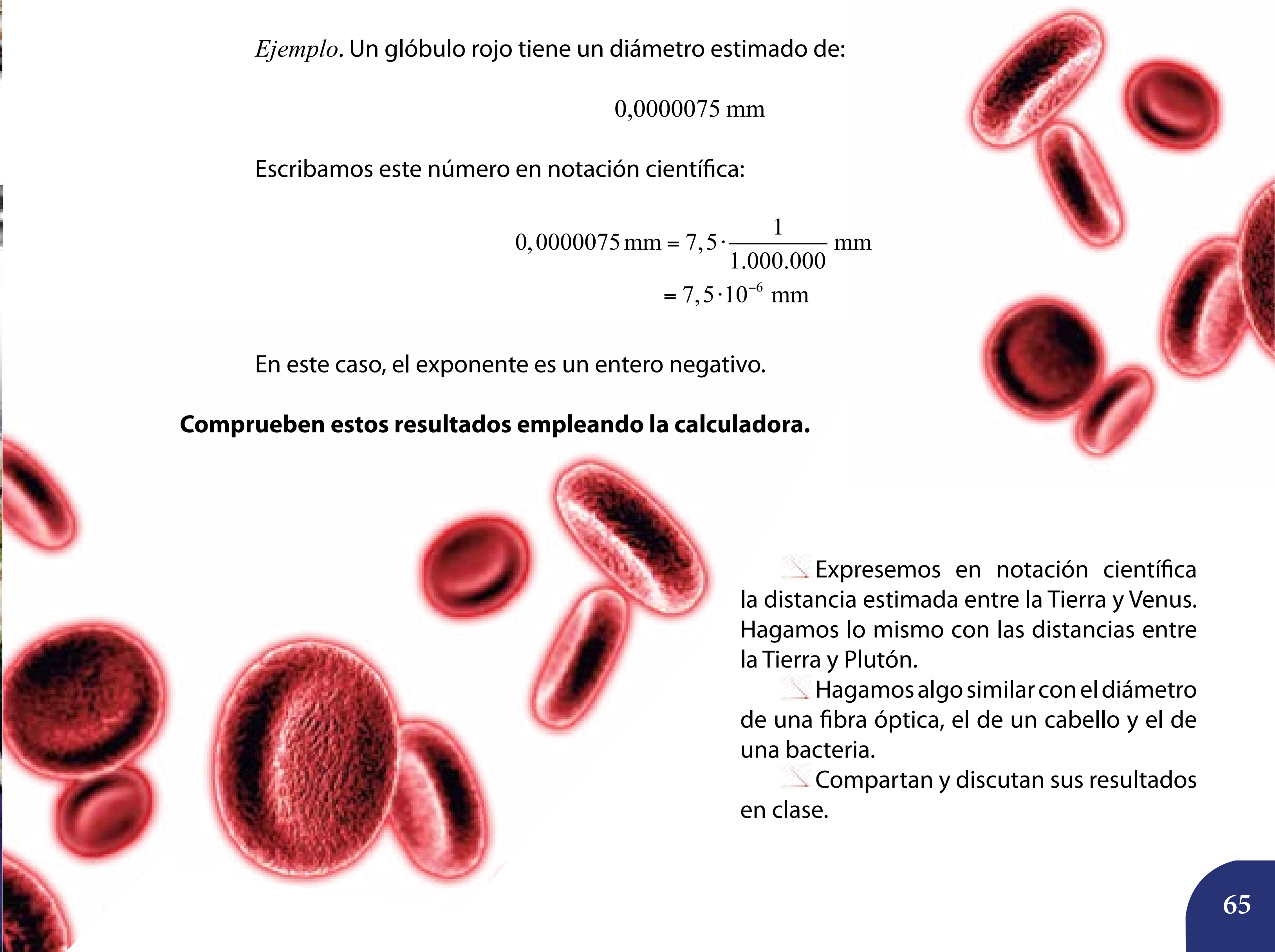
$$0{,}0000075 \text{ mm}$$

Escribamos este número en notación científica:

$$\begin{aligned} 0{,}0000075 \text{ mm} &= 7{,}5 \cdot \frac{1}{1.000.000} \text{ mm} \\ &= 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ mm} \end{aligned}$$

En este caso, el exponente es un entero negativo.

Comprueben estos resultados empleando la calculadora.



- Expresemos en notación científica la distancia estimada entre la Tierra y Venus. Hagamos lo mismo con las distancias entre la Tierra y Plutón.
- Hagamos algo similar con el diámetro de una fibra óptica, el de un cabello y el de una bacteria.
- Compartan y discutan sus resultados en clase.

Algunas nociones básicas de nuestro sistema de numeración

Órdenes y subórdenes	Lectura	Representación numérica	10^n
Unidad de cuatro millones	Un cuatrillón de unidades	1 seguido de 24 ceros	10^{24}
Centena de mil trillones	Cien mil trillones de unidades	1 seguido de 23 ceros	10^{23}
Decena de mil trillones	Diez mil trillones de unidades	1 seguido de 22 ceros	10^{22}
Unidad de mil trillones	Mil trillones de unidades	1 seguido de 21 ceros	10^{21}
Centena de trillón	Cien trillones de unidades	100.000.000.000.000.000.000	10^{20}
Decena de trillón	Diez trillones de unidades	10.000.000.000.000.000.000	10^{19}
Unidad de trillón	Un trillón de unidades	1.000.000.000.000.000.000	10^{18}
Centena de mil billones	Cien mil billones de unidades	100.000.000.000.000.000	10^{17}
Decena de mil billones	Diez mil billones de unidades	10.000.000.000.000.000	10^{16}
Unidad de mil billones	Mil billones de unidades	1.000.000.000.000.000	10^{15}
Centena de billones	Cien billones de unidades	100.000.000.000.000	10^{14}
Decena de billón	Diez billones de unidades	10.000.000.000.000	10^{13}
Unidad de billón	Un billón de unidades	1.000.000.000.000	10^{12}
Centena de mil millones	Cien mil millones de unidades	100.000.000.000	10^{11}
Decena de mil millones	Diez mil millones de unidades	10.000.000.000	10^{10}
Unidad de mil millones	Mil millones de unidades	1.000.000.000	10^{9}
Centena de millón	Cien millones de unidades	100.000.000	10^{8}
Decena de millón	Diez millones de unidades	10.000.000	10^{7}
Unidad de millón	Un millón de unidades	1.000.000	10^{6}
Centena de mil	Cien mil unidades	100.000	10^{5}
Decena de mil	Diez mil unidades	10.000	10^{4}
Unidad de mil	Mil unidades	1.000	10^{3}
Centena	Cien unidades	100	10^{2}
Decena	Diez unidades	10	10^{1}
Unidad	1 unidad	1	10^{0}
Décima	0,1 unidad	1/10	10^{-1}
Centésima	0,01 unidad	1/100	10^{-2}
Milésima	0,001 unidad	1/1.000	10^{-3}
Diezmilésima	0,0001 unidad	1/10000	10^{-4}
Cienmilésima	0,00001 unidad	1/100000	10^{-5}
Millonésima	0,000001 unidad	1/1.000.000	10^{-6}
Diezmillonésima	0,0000001 unidad	1/10.000.000	10^{-7}
Cienmillonésima	0,00000001 unidad	1/100.000.000	10^{-8}
Milmillonésima	0,000000001 unidad	1/1.000.000.000	10^{-9}

Descomposición polinómica de un número

Es posible escribir cualquier número como una suma de expresiones de la forma:

$$a \cdot 10^b$$

Veamos un caso.

Ejemplo. El diámetro de la Luna es aproximadamente:

3.476 km

Como sabemos, 6 representa a las unidades, 7 a las decenas, 4 a las centenas y 3 a las unidades de mil.

Veamos la tabla que sigue:

3 Unidades de mil	4 Centenas	7 Decenas	6 Unidades
$3 = 3 \cdot 1.000 = 3 \cdot 10^3$	$4 = 4 \cdot 100 = 4 \cdot 10^2$	$7 = 7 \cdot 10 = 7 \cdot 10^1$	$6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot 10^0$

Es decir, al descomponer el número 3.476 tenemos:

$$\begin{aligned} 3.476 &= 3.000 + 400 + 70 + 6 \\ &= 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Con ello hemos hecho la ***descomposición polinómica*** del número 3.476.

Ejemplo. Hagamos lo mismo con la distancia entre el Satélite Simón Bolívar y la estación terrena de Control Principal.

Investiguemos

1. Expresemos en notación científica las siguientes medidas:

Diámetro de un protón	0,000000000000001 mm
Tamaño de un virus	0,00000002 cm
Altura sobre el nivel del mar del observatorio de Astronomía Nacional	
Distancia desde China a Venezuela	
Dos diez milésimas	

2. Cierta hoja de periódico tiene un espesor de $0,1$ mm, lo cual es equivalente a 10^{-4} m. Es obvio que al doblar el papel, y asumiendo que no queda espacio entre los pliegos, el grosor de ambos será el doble. Repitamos este proceso diez veces y registremos los datos en la tabla que sigue:

Número de dobleces	Grosor (en notación científica)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3. ¿Cuál sería el grosor del papel si lo doblamos 20 veces? ¿Y si lo dobláramos 100 veces?

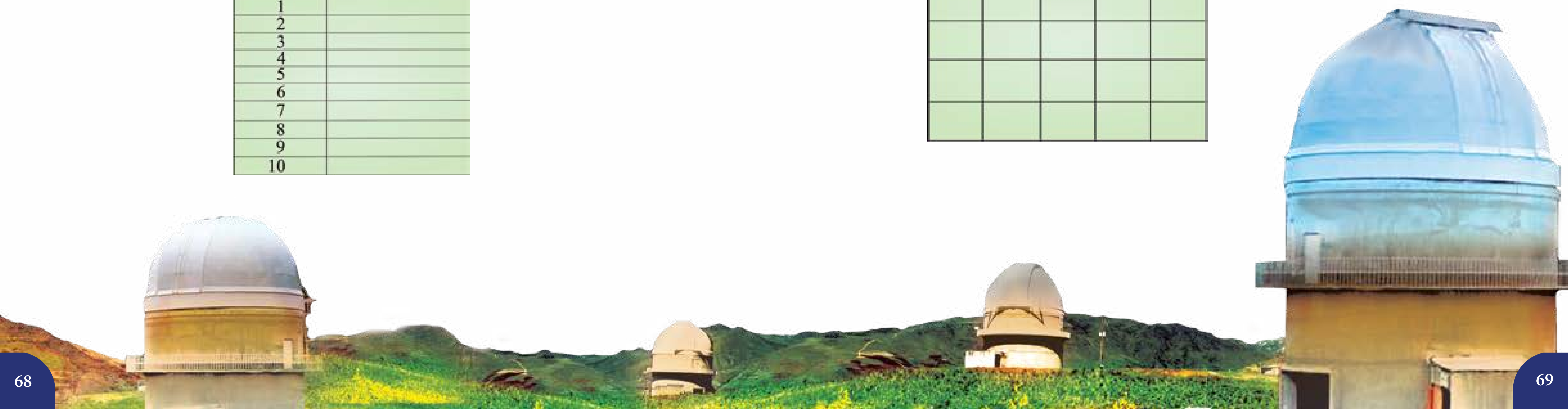
4. Realicen la descomposición polinómica de los números que corresponden a:

- El diámetro medio del Sol.
- El diámetro medio de la Tierra.
- Distancia que recorre la luz en una hora.
- Distancia media entre la Tierra y la Luna.

Para ello deben consultar estos datos en la biblioteca y en internet.

5. Consideremos una cuadrícula 5 por 5. Recorramos esta cuadrícula en cierto orden, de manera que asignemos a la primera casilla el número 1, a la segunda el número 10, a la tercera el número 100, a la cuarta el número 1.000, y así hasta llegar a la última. ¿Qué número debemos asignarle a la última casilla?

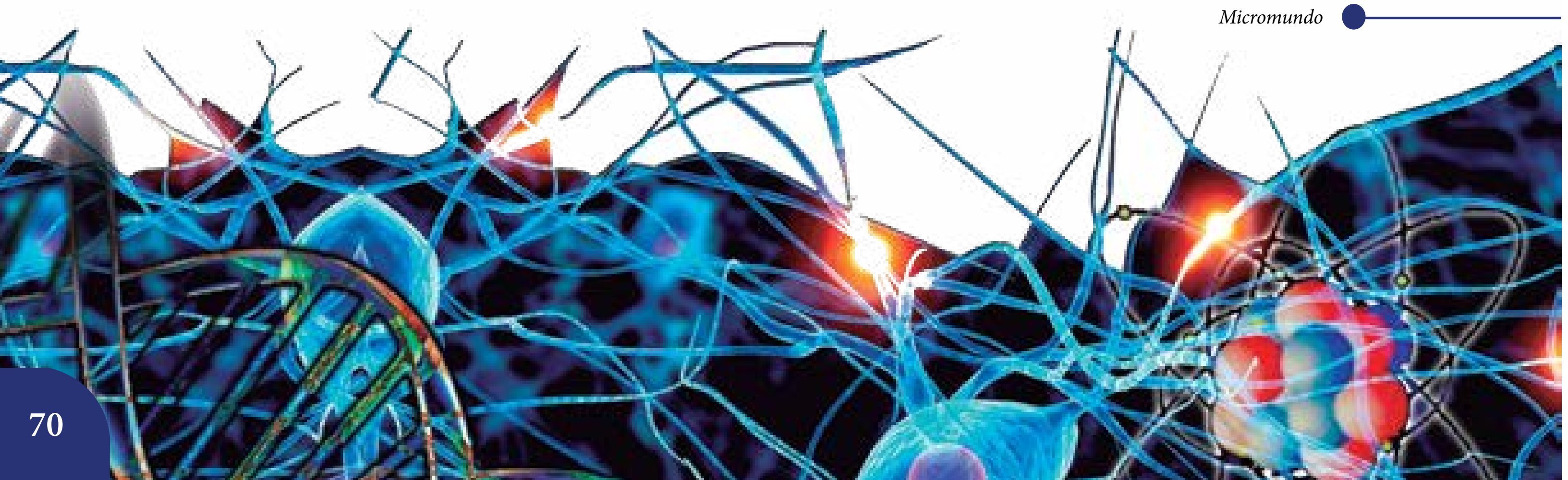
6. Además, expresen los números de la actividad anterior en notación científica y calculen su suma.



7 Ahora, partamos de la misma cuadrícula y asignemos el 1 a la primera casilla; 0,1 a la segunda; 0,01 a la tercera; y así sucesivamente. ¿Cuál es el número que debe asignarse a la última casilla? ¿Cuál es su notación científica?

8 Apóyense en un mapa como el adjunto y estimen el área del estado Guárico, además, compárenlo con los datos oficiales y determinen su descomposición polinómica.

9 Anímense a preparar un informe con sus cálculos y resultados con la intención de presentarlos a la comunidad de su liceo. También pueden presentar otros problemas que surjan de la discusión en la clase de Matemática, en especial por los estrechos vínculos que hay entre la notación científica de un número con lo que podríamos llamar el *macromundo* y el *micromundo.*



10 Venezuela cuenta con 4.150.000.000.000 m^3 de gas en reservas probadas. ¿Cómo quedaría expresado este número en notación científica?

11 Expresen en notación científica lo siguiente:

- Distancia Tierra-Luna: 384.000.000 m
- Distancia Tierra-Sol: 150.000.000 km
- Masa de estafilococo: 0,0000000001 g

12 La masa del Sol es aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg. La masa de la tierra es aproximadamente $6 \cdot 10^{24}$ kg. Utilizando notación científica y dividiendo, estimen cuántas veces es más pesado el Sol que la Tierra.

13 En Venezuela se imprimieron, en el período 2011-2012, 3.000.000 de libros de matemática para las y los estudiantes del Nivel Educación Primaria de escuelas oficiales y subvencionadas de todo el país. Si cada libro tiene un promedio de 178 páginas ¿cuántas páginas en total se imprimieron para la Educación Básica? Utilicen la idea de notación científica para resolver el problema y expresen el resultado como un número de la forma $a \cdot 10^b$ donde $1 \leq a < 10$ y b es un entero.

¡TREMENDA AREPA, COMADRE!
Números racionales

La arepa venezolana

Arepa de maíz pilado: el maíz pilado es cualquier maíz al que previamente se le ha quitado el lumen y la cáscara. Las dos principales arepas de maíz pilado son la de maíz amarillo, que es más áspera pero artesanal, y la de maíz blanco, que es suave y más común.

Arepa de maíz pelado: mejor conocida en la costa venezolana como "arepa pelada" o "arepa raspada" en Oriente, esta clase de arepa proviene del maíz pelado, que es aquel que conserva su cáscara y que se reblandece hirviéndolo con cal. Al molerlo, conserva los componentes nutritivos del lumen y la cáscara.

Arepa andina: se elabora con harina de trigo, y se consume principalmente en las zonas montañosas de los Andes venezolanos.

Arepa de harina de maíz precocida: se elabora con la harina que se obtiene luego de la precocción del maíz.

Esta arepa de maíz precocida es la más popular en los hogares venezolanos debido a su fácil preparación: una mezcla de agua, sal y harina de maíz, que es amasada hasta conseguir una consistencia que permita darle la forma redondeada que la caracteriza. Es asada generalmente en budares, o frita en aceite caliente.

De acuerdo con el Instituto Nacional de Estadísticas (INE), el consumo diario promedio, per cápita (por persona), de harina de maíz de las venezolanas y los venezolanos durante los años 2008 y 2009 fue el siguiente:

		2008		2009	
Producto	Unidad de medida	1er semestre	2do semestre	1er semestre	2do semestre
Harina de maíz	gramo (g)	78,61	76,95	78,09	77,66

Tabla 1 (tomada del INE)
http://www.ine.gob.ve

En la tabla anterior puedes observar que, durante el primer semestre del año 2008, el consumo promedio diario de harina de maíz fue de 78,61 g. ¿Cuántos kilogramos de harina de maíz consumió diariamente, en promedio, cada venezolana y venezolano en ese período? Veamos:

Sabemos que **la unidad** de medida de masa es el gramo (g). A partir de él haremos las conversiones a sus múltiplos, como el kilogramo (kg), el hectogramo (hg), el decagramo (dag); así como también a sus submúltiplos, tales como el decigramo (dg), el centigramo (cg) y el miligramo (mg). Observen la siguiente tabla en la cual ubicamos 1 g:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0	0	0	1	0	0	0

Con ayuda de esta tabla podemos leer con facilidad esta información de distintas maneras. Por ejemplo, podemos ver que 1 g es equivalente a 0,001 kg:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0	0	0	1	0	0	0

También podemos observar que 1 g es equivalente a 1000 mg:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0	0	0	1	0	0	0

Ahora bien, ubiquemos en una tabla similar la información sobre la cantidad de harina de maíz que consumió cada venezolana y venezolano, en promedio, durante el primer semestre de 2008. Recuerden que este promedio de consumo diario fue 78,61 g:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0	0	7	8	6	1	0

Podemos ver que en Venezuela, el consumo per cápita de harina de maíz, durante el primer trimestre del año 2008 fue de 0,07861 kg. Es importante que recuerdes que a números como 0,07861 se les llama números decimales y se representan así:

0, 07861

Parte entera — *Parte decimal*

La medida 78,61 g puede leerse de distintas formas, si consideramos cada una de las unidades presentes en la tabla anterior. Veamos en qué consiste:

Medida	Equivalencias
78,61 g	0,07861 kg
	0,7861 hg
	7,861 dag
	786,1 dg
	7.861 cg

Algunas actividades

Utilizando los múltiplos y submúltiplos del gramo, expresen las equivalencias de la cantidad de consumo diario promedio de maíz en Venezuela, per cápita, en el segundo semestre de 2008, y en el primer y segundo semestre de 2009.

A partir de los datos suministrados por el INE, se puede establecer que el consumo diario promedio, per cápita, durante el año 2008 de harina de maíz fue de 77,78 g. ¿Cómo se calculó este promedio?

Calculen el consumo diario promedio, per cápita, de harina de maíz en Venezuela durante el año 2009. ¿El consumo creció o disminuyó con respecto al año 2008?

Consulten en la página web del Instituto Nacional de Estadísticas, sobre el consumo diario promedio, per cápita, de harina de maíz en el año 2010, y compárenlo con el consumo de los años anteriores.

Estudiando las expresiones decimales

Estudiar los números fue una labor a la que dedicaron gran cantidad de tiempo importantes matemáticos como Euler, Gauss, Pitágoras, entre muchos otros. Investiguen quiénes fueron esos matemáticos. En esta parte del libro trabajaremos con las expresiones decimales.

Vamos a estudiar el número 78,61 g. Este número hace referencia al consumo promedio diario, por persona, de harina de maíz en el primer semestre de 2008 en nuestro país. Al representarlo en un cartel de valores, tenemos:

Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas
7	8	6	1

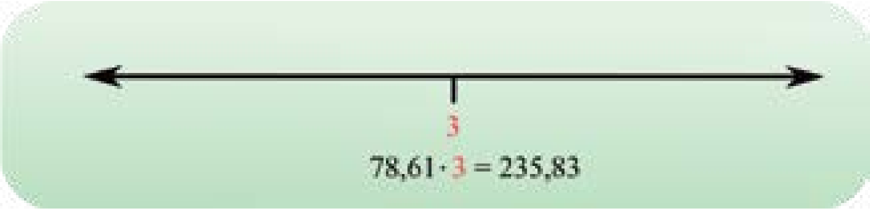
El número 78,61 puede leerse como: a) 7.861 centésimas; b) 78 unidades con 61 centésimas; c) 7 decenas, 8 unidades, 6 décimas y 1 centésima. Escriban, de una manera distinta a las mencionadas, el número 78,61.

Juguemos un poco con este número:

Para jugar vamos a necesitar la ayuda de una calculadora. El objetivo del juego es buscar un número que al ser multiplicado por 78,61 nos dé un resultado entre 200 y 205. Las reglas son las siguientes: (1) La única operación que podemos utilizar es la multiplicación, y (2) tendremos sólo 4 oportunidades para multiplicar.

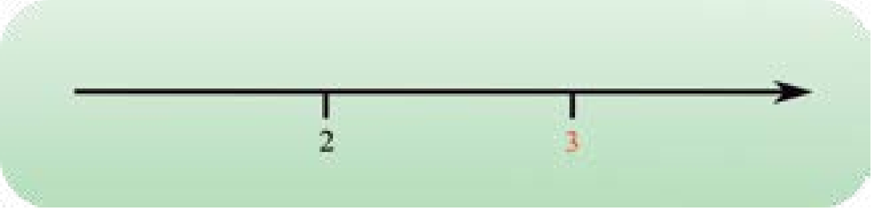
Vamos a ir representando el número que buscamos en la recta numérica. Veamos:

Haremos nuestro primer intento con el número 3.



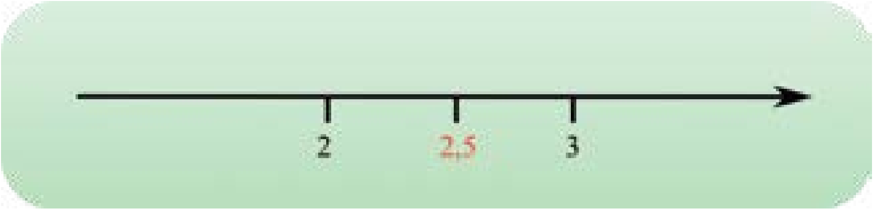
El resultado es mayor que 205, por lo tanto debemos multiplicar por un número menor que 3.

Vamos a probar ahora con el número 2.



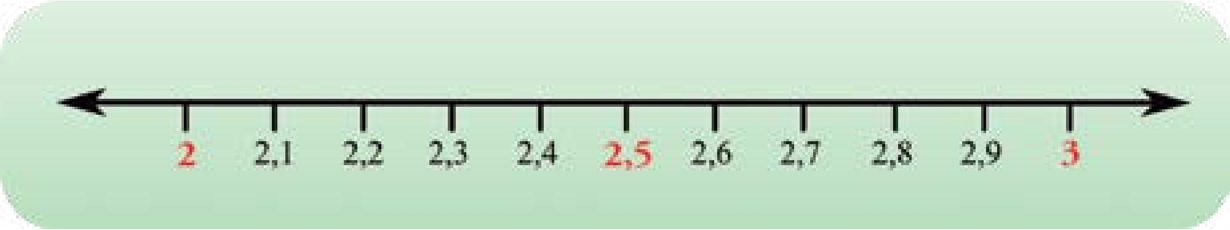
El resultado es menor que 200, entonces el número que buscamos es mayor que 2 y menor que 3, es decir que está entre 2 y 3.

¿Qué les parece si probamos con el número 2,5 en esta tercera oportunidad?



Tal como vemos en la recta, este número se encuentra en el punto medio entre 3 y 4.

Veamos una representación que muestra por qué esto es así:



Podemos observar que el número 2,5 está a la misma distancia del 2 y del 3.

Ahora multipliquemos $78,61 \cdot 2,5 = 196,525$.

El resultado es menor que 200, es decir que debemos buscar un número mayor que 2,5 y menor que 3. Como sólo nos queda un intento, debemos pensar bien el número por el que vamos a multiplicar 28,39 para que el resultado nos quede entre 200 y 205. Analicemos el número **2,6**.

Si aplicamos la propiedad aditiva del Sistema de Numeración Decimal, tenemos:

$$78,61 \cdot 2,6 = 78,61 \cdot (2,5 + 0,1)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición nos queda:

$$78,61 \cdot 2,6 = 78,61 \cdot (2,5 + 0,1) = (78,61 \cdot 2,5) + (78,61 \cdot 0,1)$$

Ya sabemos que $78,61 \cdot 2,5 = 196,525$. Veamos a qué es igual una décima parte de 78,61.

$$78,61 \div 10 = 7,861$$

Recuerda que $0,1 = \frac{1}{10}$

Ahora bien, podemos ver que la suma de la parte entera de estos resultados (196 y 7) es 203, entonces el número que obtendremos al multiplicar $78,61 \cdot 2,6$ estará entre 200 y 205. ¿Por qué podemos afirmar esto?

Ahora multipliquemos con la calculadora $78,61 \cdot 2,6 = 204,386$.

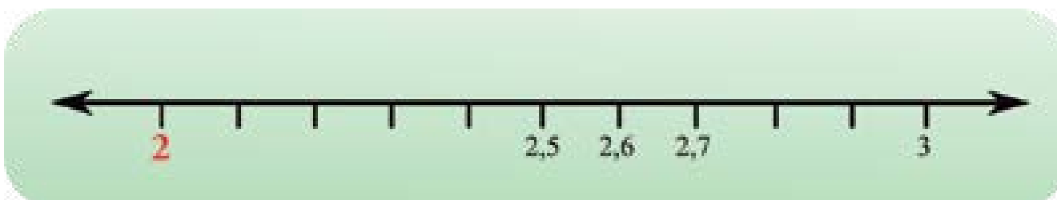
¡Hemos obtenido otro número que al ser multiplicado por 78,61 nos da un producto entre 200 y 205!

Respondan las siguientes preguntas con ayuda de su calculadora:

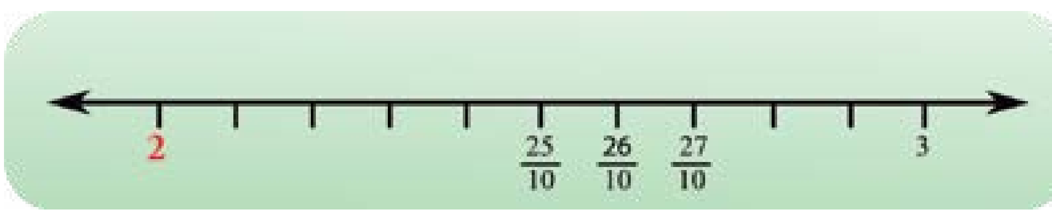
- ¿Qué sucede con el producto de 78,61 por 2,7 con respecto a los números 200 y 205?
- ¿Habrá otros números mayores que 2,6 que al ser multiplicados por 78,61 den un resultado entre 200 y 205? Representen estos números en la recta numérica.
- ¿Habrá números menores que 2,6 que cumplan con la condición dada en la pregunta anterior? Escriban al menos tres de ellos.

Veamos otra forma de escribir estos números:

Ubicaremos primero los números tal como los hemos visto en la recta numérica:



Sabemos que 2,5 unidades equivalen a 25 décimas; 2,6 equivale a 26 décimas; y 2,7 a 27 décimas. Entonces podemos representar estos números así:



Ahora vamos a simplificar estas fracciones de manera tal que queden reducidas a sus términos mínimos, es decir, vamos a escribirlas de forma que el único divisor común del numerador y el denominador sea 1. Veamos:

Sabemos que el máximo divisor común de 25 y 10 es 5. Entonces:

$$\frac{25}{10}=\frac{25\div 5}{10\div 5}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

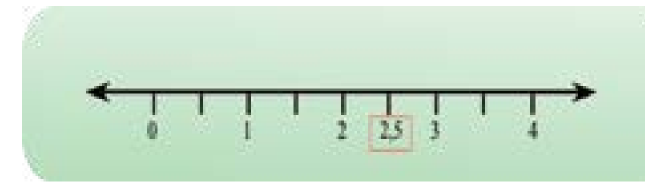
Sabemos que el mayor divisor común de 26 y 10 es 2. Por lo tanto:

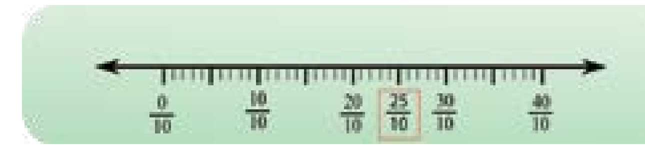
$$\frac{26}{10}=\frac{26\div 2}{10\div 2}=\frac{13}{5}$$

$$\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$$

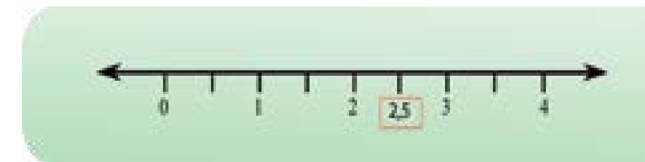
Al dividir el numerador y el denominador de una fracción por el máximo común divisor, la estamos simplificando, es decir, sustituyéndola por una **fracción equivalente**.

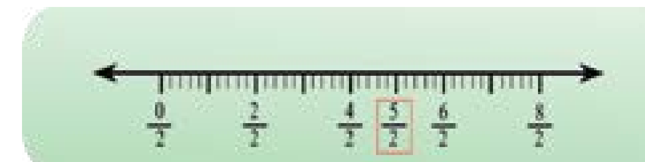
Veámoslo gráficamente.
En décimas:



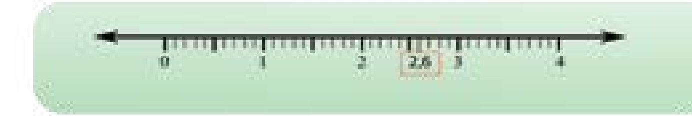


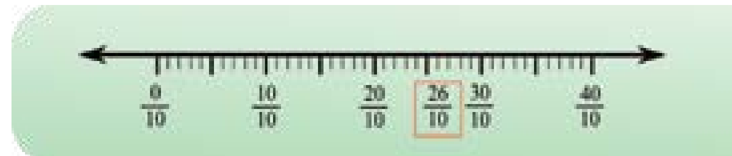
En medios:



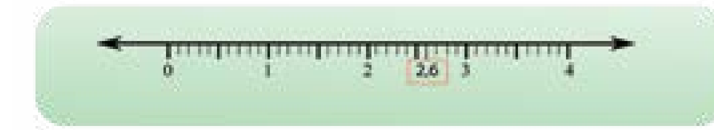


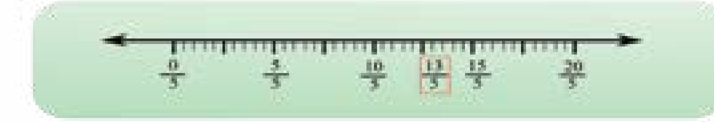
Veámoslo gráficamente.
En décimas:





En quintos:





Por su parte, el número $\frac{27}{10}$ no puede simplificarse, pues el único divisor común de 27 y 10 es el número 1.

Los números $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{27}{10}$ son elementos del conjunto denominado **números racionales**, también llamado conjunto $\mathbb{Q}$**.** Este conjunto se define así:

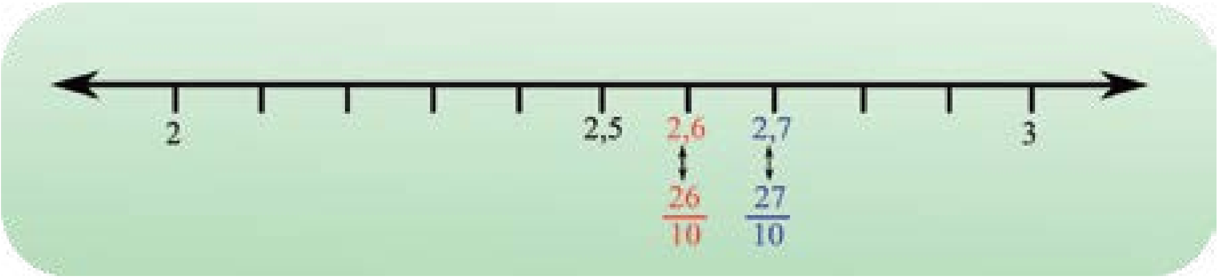
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}:a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}^{*}\right\}$$

Esto quiere decir que los elementos de $\mathbb{Q}$ tienen la forma $\frac{a}{b}$, siendo a un número entero y b un número entero distinto de cero.

Tal como pudimos observar, estos números pueden ser representados en la recta numérica y **siempre podemos encontrar entre cada par de números racionales otro número racional**, tal como lo hicimos jugando con la calculadora y las expresiones decimales de estos números racionales.

Esta característica del conjunto de los números racionales significa que el conjunto $\mathbb{Q}$ es **denso**.

Veamos un ejemplo de esta propiedad. Para ello, vamos a seguir utilizando las representaciones con las que hemos trabajado hasta ahora:



Busquemos el número racional que se encuentra en el punto medio de $\frac{26}{10}$ y $\frac{27}{10}$.

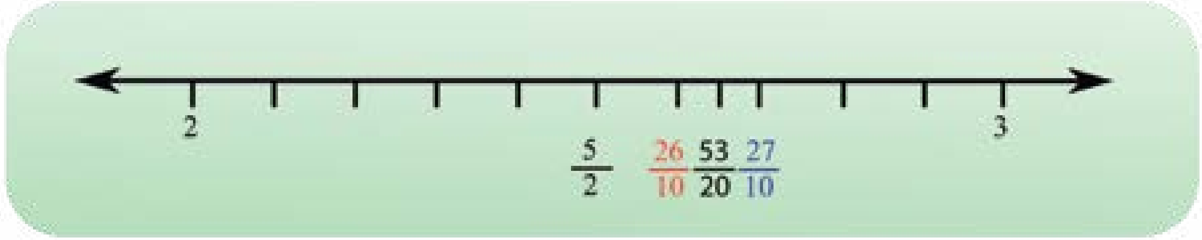
Con ayuda de la calculadora, hallaremos la semisuma de las expresiones decimales de estos racionales:

$$(2,6+2,7)\div 2=2,65$$

Esto puede leerse: "dos coma sesenta y cinco unidades", o también: "doscientas sesenta y cinco centésimas".

El número racional representado por esta expresión decimal es $\frac{265}{100}$ y simplificando, es decir, dividiendo entre el máximo común divisor de 265 y 100, el cual es 5, nos queda $\frac{53}{20}$.

Su representación en la recta es la que sigue:



Ésta es sólo una forma de conseguir un número racional que se encuentre entre otros racionales dados.

Ahora busquen un racional que se encuentre entre $\frac{5}{2}$ y $\frac{53}{20}$; y otro racional que esté entre $\frac{53}{20}$ y $\frac{27}{10}$

Jueguen con sus compañeras y compañeros otra vez

Desafíen a alguien de su salón a encontrar un número entre 100 y 101: primero escribe en la pantalla de tu calculadora el número que corresponde al consumo promedio, per cápita, de harina de maíz en Venezuela durante el año 2009. Luego, por turno van multiplicando el número que aparece en la pantalla por otro número a elección de la jugadora o el jugador.

El primero o la primera que logre mostrar, en la pantalla de la calculadora, un resultado que se encuentre entre 100 y 101 gana el juego. Es importante que tomen como referencia las estrategias ganadoras utilizadas en el juego anterior, por ejemplo: 1) la propiedad aditiva de los números decimales; 2) la idea de punto medio; 3) la representación de las expresiones decimales en la recta y 4) la propiedad de la densidad de los números racionales. Escriban en sus cuadernos cada una de las estrategias utilizadas, así como los números por los que van multiplicando.

Recuerden que las reglas son las siguientes: (1) La única operación que podemos utilizar es la multiplicación, y (2) tendremos sólo 4 oportunidades para multiplicar.

Variaciones en el consumo de harina de maíz

Veamos la variación neta del consumo promedio diario, per cápita, de harina de maíz entre el primer y el segundo trimestre del año 2009, de acuerdo con los datos extraídos del INE.

Producto	Unidad de medida	2009 1er semestre	2009 2do semestre
Harina de maíz	gramo (g)	78,09	77,66

Tabla 2: Tomada del INE

Para ello, vamos a calcular la diferencia entre el consumo promedio del semestre más reciente (segundo semestre de 2009) y el menos reciente (primer semestre 2009). Veamos:

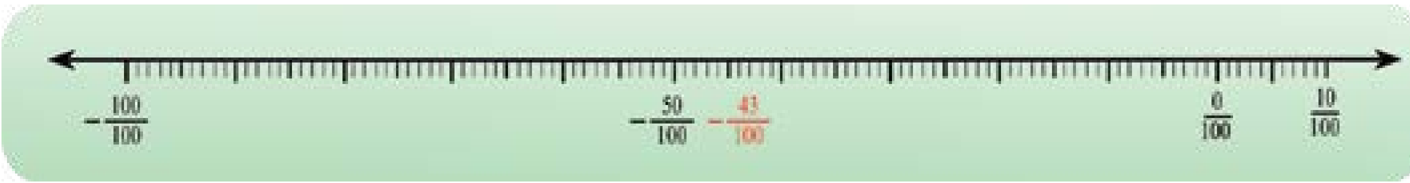
$$77,66\text{ g}-78,09\text{ g}=-0,43\text{ g}$$

Como podemos observar, la variación neta es negativa. Podemos decir entonces que hubo una disminución en el consumo de harina de maíz en el segundo semestre de 2009, con respecto al primer semestre de ese mismo año.

Ahora bien, el número $-0{,}43$ puede leerse "**menos cuarenta y tres centésimas**". Es decir que podemos expresarlo como un número racional:

$$-\frac{43}{100}$$

Podemos representarlo en la recta numérica como sigue:



Este número es lo que conocemos como un **número racional negativo**. Los racionales, al igual que los números enteros, se dividen en racionales negativos, el cero y los racionales positivos.

Al cero racional lo podemos escribir de la forma: $\frac{0}{b}$, siendo b un número entero distinto de cero.

Entonces se puede decir, por ejemplo, que los números $\frac{0}{-3}$, $\frac{0}{5}$ y $\frac{0}{100}$ también representan al cero en los racionales.

Por su parte, los **racionales positivos** se ubican a la derecha del cero. Este subconjunto de los racionales es denotado por $\mathbb{Q}^+$, y podemos definirlo como sigue:

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} : a \cdot b > 0\right\}$$

Esto quiere decir que, en el subconjunto de los números racionales positivos, se encuentran los racionales $\frac{a}{b}$ tales que $a \cdot b > 0$

A los racionales negativos los ubicamos a la izquierda del cero, y se denotan con $\mathbb{Q}^-$. Este subconjunto de los racionales se define así:

$$\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^- : a \cdot b < 0\right\}$$

Esto quiere decir que un número racional $\frac{a}{b}$ pertenece al subconjunto de los racionales negativos si $a \cdot b < 0$.

Otros elementos de los racionales

Existen otros elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ cuya expresión decimal tiene cierta particularidad. Para estudiar las características de estos números analizaremos los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{3}, \frac{110}{7}, -\frac{9}{44}, -\frac{4}{11}, \frac{31}{15}$$

Analizaremos la expresión decimal de cada uno de estos números racionales. Veamos:

$\frac{1}{3} = 0{,}33333...$	$-\frac{4}{11} = -0{,}36363636...$

Observando las expresiones decimales de los números $\frac{1}{3}$ y $-\frac{4}{11}$ podemos darnos cuenta de que, inmediatamente después de la coma, se repite indefinidamente una cifra o un grupo de cifras.

A estas expresiones decimales las denominamos **periódicas puras**, y a la cifra, o grupo de cifras, que se repite, lo llamaremos **período**.

$\frac{31}{15} = 2.06666...$	$-\frac{9}{44} = -0{,}204545$

Con respecto a las expresiones decimales de los números $\frac{31}{15}$ y $-\frac{9}{44}$, podemos ver que el período no empieza inmediatamente después de la coma. A estas expresiones decimales las llamamos **periódicas mixtas**, y a la cifra, o grupo de cifras, que aparece antes del período, lo denominamos **anteperíodo**.

Algunas actividades

¿Qué tipo de expresión decimal se genera a partir del número racional dado? ¿Por qué?

Usen la calculadora para buscar, al menos, tres números racionales cuyas expresiones decimales sean periódicas mixtas.

Jueguen con sus compañeras y compañeros a ver quién consigue un número racional que genere una expresión decimal cuyo período tenga más cifras.

Sigamos divirtiéndonos con los números

Con ayuda de una calculadora científica, hallamos la expresión decimal del siguiente racional: $\frac{110}{7} = 15,714285714285714285...$

Utilizando la calculadora científica, multipliquemos esta expresión resultante por el número 3,5; que es la expresión decimal del número racional $\frac{7}{2}$. Veamos:

$$15,714285714285714285 \cdot 3,5 = 55$$

Fíjense que el resultado puede expresarse de la forma $\frac{55}{1}$, es decir que el resultado nos queda dentro del conjunto de los racionales.

A los racionales del tipo $\frac{a}{1}$ se les denomina **racionales enteros**.

Busquemos un número racional que al ser multiplicado por: $15,714285714285714285$ dé como resultado un número racional entero. Para hacer esta multiplicación apóyate en la expresión decimal del número racional.

Busquen tres números racionales más que cumplan con esta condición. ¿Qué características tienen estos racionales? ¿Qué característica debe tener un racional cualquiera que cumpla con la condición dada? Formulen una conjetura.

Analizando el consumo calórico de algunos alimentos

La cantidad de alimentos que deben consumir las personas varía según su peso, estatura, actividad física y estado fisiológico. A la hora de llevar el control de la alimentación lo primero que debemos saber es la cantidad de energía que se requiere con base en las necesidades diarias. Para ello existen fórmulas que, de forma muy aproximada, estiman las calorías necesarias de cada persona teniendo en cuenta factores como el peso corporal, edad, altura, sexo y nivel de actividad.

Más adelante utilizaremos algunas de estas fórmulas con el fin de que nos permitan conocer cuál debe ser el consumo calórico aproximado de cada uno de nosotros. Pero en este momento, con la finalidad de **comparar el aporte nutricional de una arepa con queso amarillo y carne mechada con el de una hamburguesa con papas fritas**, como las que venden en muchos de los establecimientos de comida rápida. Tomaremos como base para nuestros cálculos una dieta de 2.000 calorías.

En la parte de atrás del empaque de la harina de maíz, se puede leer la siguiente información nutricional:

Información nutricional	
Contenido nutritivo por 100 g de producto	
Valores nutricionales	
Calorías (kcal)	354,0
Humedad (g)	11,2
Proteínas (g)	7,2
Grasas (g)	1,1
Carbohidratos totales (g)	80,2
Fibra dietética (g)	2,5
Cenizas (g)	0.3

Valores según Tabla de composición de alimentos del Instituto Nacional de Nutrición (INN). Revisión 1999

Es necesario acostumbrarse a leer la etiqueta nutricional debido a que en ella se muestra toda la información necesaria sobre el producto que se consumirá. La etiqueta nutricional nos permite seleccionar los productos que aportan mayores beneficios para la salud por ser más nutritivos.

La información que aparece en la tabla que mostramos a continuación está referida a la información nutricional de 100 g de queso amarillo y 100 g de carne de res (falda).

Información nutricional							
Contenido nutritivo por 100 g de producto							
Valores nutricionales							
Alimentos	Calorías (kcal)	Humedad (g)	Proteínas (g)	Grasa (g)	Carbohidratos (g)	Fibra dietética (g)	Sodio
Falda	91	77,2	20,6	0,9	0	0	0
Queso amarillo	376	39,0	22,4	31,2	1,3	0	0

Valores según Tabla de composición de alimentos del Instituto Nacional de Nutrición (INN). Revisión 1999
http://www.inn.gob.ve

Para la preparación de la carne mechada utilizaremos aproximadamente 100 g de falda, 25 g de tomate, 25 g de pimentón, 25 g de ají dulce y 100 g de cebolla. Todos estos ingredientes, según la tabla de composición de alimentos del Instituto Nacional de Nutrición, aportan un aproximado de 156 Kcal. A partir de los datos anteriores se puede determinar cuál es el aporte de Kcal que proporciona una arepa con carne mechada y queso amarillo a la dieta diaria de una persona.

Alimentos	kcal
Arepa (100 g)	354
Carne mechada (50 g)	78
Queso amarillo (50 g)	188
Total	620

Una arepa con carne mechada y queso amarillo aporta aproximadamente 620 Kcal.

Al simplificar y buscar la expresión decimal tenemos: $\frac{620}{2.000} = \frac{31}{100} = 0,31$

Veamos cuál es el porcentaje: $0,31 = \frac{31}{100} = 31\%$

En conclusión, una arepa con carne mechada y queso amarillo suministra aproximadamente el 31% de las Kcal necesarias, teniendo como base una dieta de 2.000 Kcal diarias.

Algunas actividades

Fíjense que una arepa que contenga 100 g de harina de maíz precocida, 50 g de carne mechada y 50 g de queso amarillo aporta, aproximadamente, 17 g de los 65 g de grasa que se deben consumir, como máximo, a diario, de acuerdo con el Instituto Nacional de Nutrición.

Utilizando estos datos y con base en lo discutido hasta el momento sobre número racional, determinen qué porcentaje de grasa aporta una arepa con carne mechada y queso a la dieta diaria de una persona.

Según los datos presentados en las tablas, una arepa con carne mechada y queso amarillo aporta $28,7$ g de proteína. Discutan con su profesora, profesor, compañeras y compañeros cómo se obtuvieron esos cálculos. Las proteínas son necesarias para el crecimiento y la construcción de tejidos y órganos, pues son sustancias orgánicas que contienen carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno; éstas deben ser ingeridas en nuestra dieta diaria, debido a que ayudan al funcionamiento de nuestro organismo y, además, nuestro cuerpo no puede producirlas por sí solo. Pregunten a su profesor o profesora de biología e investiguen en libros o internet cómo se clasifican las proteínas y qué función cumplen.

Ahora analicemos la información nutricional de una hamburguesa con doble queso y de unas papas fritas medianas. Para ello nos apoyaremos en la siguiente tabla:

Información nutricional Valores nutricionales					
Productos	Kcalorías (kcal)	Carbohidratos (g)	Proteínas (g)	Grasa total (g)	Sodio (mg)
Hamburguesa con doble queso	526	50	27	24	991
Papas fritas	366	49	4	17	379

Veamos qué porción de las 2.000 Kcal aportan una hamburguesa con doble queso y unas papas fritas medianas. Además, analizaremos la cantidad de sodio que consume una persona al ingerir estos productos.

Alimentos	kcal
Hamburguesa con doble queso	526
Papas fritas	366
Total	892

Noten que de las 2.000 Kcal una hamburguesa con doble queso y unas papas fritas medianas aportan aproximadamente 892 Kcal.

Al simplificar y buscar la expresión decimal tenemos: $\frac{892}{2.000} = \frac{223}{500} = 0,446$

Aproximando por exceso se tiene: $0,446 \approx 0,45$

Veamos cuál es el porcentaje: $0,45 = \dfrac{45}{100} = 45\%$

De lo anterior se puede concluir que una hamburguesa doble con queso y unas papas fritas medianas aportan, aproximadamente, el 45% de las Kcal necesarias, teniendo como base una dieta de 2.000 Kcal diarias.

Observen que una hamburguesa doble con queso y unas papas fritas aportan al organismo 41 g de grasa, es decir, $1,5$ veces más grasa, aproximadamente, que la suministrada por una arepa con carne mechada y queso amarillo. ¿Por qué podemos afirmar que la cantidad de grasa suministrada por una hamburguesa con doble queso y unas papas fritas son, aproximadamente, $1,5$ veces mayor que la aportada por una arepa con carne mechada y queso amarillo?

Otro elemento que nos debe llamar poderosamente la atención es que la hamburguesa y las papas fritas al ser consumidos suministran al organismo 1.370 mg de sodio, lo cual es bastante alto sobre todo si se considera que el consumo promedio de sodio debe ser 1.700 mg, según las recomendaciones hechas por la Organización Mundial para la Agricultura y la Alimentación (FAO) (consulten la página *https://www.fao.org/*). Es importante conocer que el consumo excesivo de sodio influye en los niveles de tensión arterial de las poblaciones y debe limitarse para reducir el riesgo de problemas con el corazón y de accidentes cerebro-vasculares.

Como ya hemos mencionado antes, todos estos promedios varían según la estatura, el peso, el estado fisiológico y la actividad física.

Cuando comparamos las Kcal de la arepa con carne mechada y queso amarillo con las de la hamburguesa doble con queso y papas fritas, es fácil darse cuenta en cuál de los dos casos el aporte de calorías es mayor, esto gracias a las distintas representaciones numéricas de cada uno de los casos. Veamos:

	Aporte calórico por producto en una dieta de 2.000 kcal diarias			
Productos	**Número racional de referencia**	**Número racional irreductible**	**Expresión decimal del número racional**	**Expresión porcentual del número racional**
Arepa con carne mechada y queso amarillo	$\frac{620}{2000}$	$\frac{3}{100}$	0,31	31 %
Hamburguesa con doble queso y papas fritas	$\frac{892}{2.000}$	$\frac{223}{500}$	0,446	45 %

Algunas actividades

1 Investiguen los requerimientos calóricos de una persona; según su edad, estatura y actividad física. Revisen el libro digital, colección Nutriendo Conciencias en las Escuelas para el Buen Vivir, del Instituto Nacional de Nutrición de 2011.

2 Consulten la tabla de composición de alimentos del Instituto Nacional de Nutrición (INN) y, con base en este documento, determinen la cantidad de sodio presente en los alimentos que consumen en su dieta diaria. Pueden ubicarlo en la página web del INN: *http://www.inn.gob.ve*

3 Consulten la etiqueta nutricional del jugo de su preferencia y el de una lata de refresco de 350 ml. Comparen los aportes nutricionales de cada uno, tomando como base una dieta de 2.000 Kcal. A partir de esto, ¿cuál de las dos bebidas es más beneficiosa para su salud?

6 ¡A COMER SANO Y SABROSO!

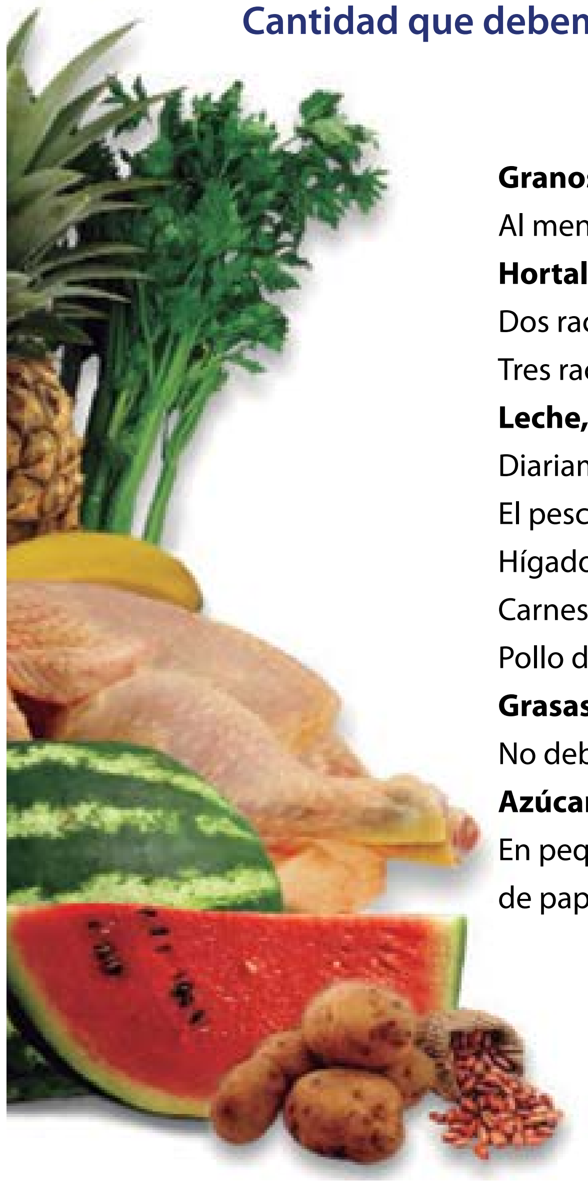
Operaciones con números racionales

Alimentación sana y balanceada

Una alimentación sana y balanceada nos ayuda a mejorar nuestra salud para tener una vida plena y feliz. Ésta debe ser variada en vitaminas y proteínas. Comer bien no significa comer mucho, sino comer variado: ensaladas, frutas, pescados, granos, entre otros.

En nuestro país contamos con un trompo de los alimentos. Éste nos permite ver, de manera sencilla, los distintos grupos de alimentos que deben constituir nuestro menú diario.

Cantidad que debemos consumir de cada grupo



Granos, cereales, tubérculos y plátanos
Al menos, dos raciones diariamente.
Hortalizas y frutas
Dos raciones diarias de hortalizas (crudas o cocidas).
Tres raciones de fruta al día (frescas preferiblemente).
Leche, carnes y huevos
Diariamente, la leche y sus derivados.
El pescado, al menos, tres veces por semana.
Hígado de res o pollo una vez a la semana.
Carnes rojas una vez por semana.
Pollo dos o tres veces por semana.
Grasas y aceites
No debe exceder una o dos cucharaditas en cada comida principal.
Azúcares
En pequeñas cantidades, dos o tres cucharaditas o un vaso de jugo de papelón.

Según el Instituto Nacional de Nutrición

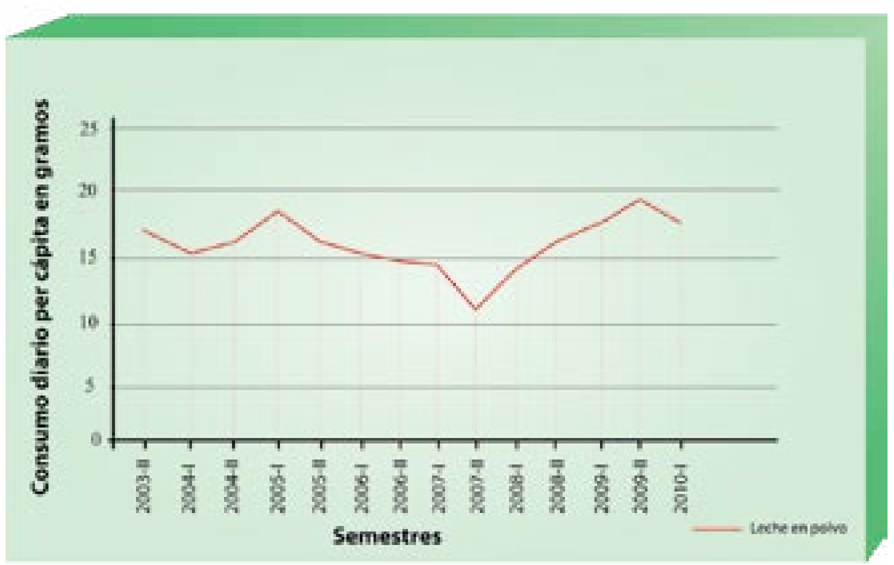
Algunas actividades

Investiguen los aportes nutricionales (vitaminas, minerales, proteínas, etc.), de cada grupo de alimentos.

Registren, en sus cuadernos, los alimentos y las raciones de éstos, que consumen en sus casas durante una semana. Comparen este registro con la información anterior suministrada por el Instituto Nacional de Nutrición, y, a partir de esta comparación, conversen con los miembros de sus familias acerca de la importancia de tener una alimentación balanceada.

En las siguientes gráficas podemos observar el consumo diario per cápita (por persona) de la leche, desde el segundo semestre de 2003 hasta el primer semestre de 2010. Estos alimentos, pertenecientes al grupo leche, carne y huevos, son muy importantes para nuestra alimentación pues aportan proteínas, contienen minerales, como el calcio y el hierro, vitaminas A, D, $B1$, $B2$, $B12$; además contribuyen a la formación y mantenimiento de los músculos, huesos y dientes.

Año	2003	2004		2005		2006		2007		2008		2009		2010
Semestre	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I
Consumo (g)	17,1	15,6	16,5	18,5	16,3	15,5	14,9	14,6	11,9	14,4	16,2	17,8	19,1	17,9



Fuente: Instituto Nacional de Estadística

Respondan las siguientes preguntas a partir de los datos anteriores:

- ¿En qué período se consumió más leche en polvo?
- ¿En qué período se consumió menos leche en polvo?
- ¿Cuál es el promedio de consumo diario per cápita de leche en polvo durante los años 2004, 2006 y 2008?
- ¿Cuál es la variación neta del consumo de leche en polvo entre los semestres 2007-I y 2007-II? ¿Qué representa este número?
- ¿Cuál es la variación neta del consumo de leche en polvo entre los semestres 2004-II y 2005-I? ¿Qué representa este número?

Adición en $\mathbb{Q}$

Para estudiar la adición en $\mathbb{Q}$ vamos a responder la tercera pregunta: ¿cuál es el promedio de consumo diario per cápita de leche en polvo durante los años 2004, 2006, y 2008?

Tomemos el consumo semestral de leche del año 2004 y calculemos cuál fue el promedio de consumo diario per cápita de leche ($\bar{x}$).

$$\bar{x} = \frac{15,6\text{ g} + 16,5\text{ g}}{2} \quad \text{por tanto} \quad \bar{x} = 16,05\text{ g}$$

Este **promedio** es lo que en estadística se llama **media aritmética** y la estudiaremos en la lección12.

Veamos cómo calcularlo con números racionales.

Primero hallamos la fracción decimal de $15,6$ g y $16,5$ g:

$$16,5\text{g} = \frac{165}{10}\text{ g} \qquad\qquad 16,5\text{g} = \frac{165}{10}\text{ g}$$

Luego calculamos **15,6 g + 16,5 g** $= \frac{156}{10}\text{ g} + \frac{165}{10}\text{ g}$:

$$= \frac{156\text{ g} + 165\text{ g}}{10}$$

$$= \frac{321}{10}\text{ g}$$

Otra manera de realizar esta adición es simplificando los números $\frac{156}{10}$ y $\frac{165}{10}$ como se muestra a continuación:

Operación	¿ Qué aplicamos ?
$\frac{156}{10}\text{ g} + \frac{165}{10}\text{ g} = \frac{78}{5}\text{ g} + \frac{33}{2}\text{ g}$	Sustituimos por las fracciones equivalentes
$\frac{78}{5}\text{ g} + \frac{33}{2}\text{ g} = \frac{78 \cdot 2 + 33 \cdot 5}{5 \cdot 2}\text{ g}$	Adición de fracciones
$= \frac{156 + 165}{10}\text{ g}$	Resolvemos las operaciones
$= \frac{321}{10}\text{ g}$	

Ahora bien, dividiremos la suma obtenida entre dos, lo que es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{2}$, con el fin de calcular el promedio de consumo diario per cápita de leche en polvo durante el año 2004, ya que la información que tenemos corresponde a los dos semestres de ese año. Veamos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{321}{10}$$

¿Cómo podemos calcular $\frac{1}{2}\cdot\frac{321}{10}$ g? Observen:

Escribiendo $\frac{321}{10}=\frac{320}{10}+\frac{1}{10}$, al descomponer $\frac{321}{10}$.

Luego, calculemos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{321}{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{320}{10}+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{320}{10}+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{10}$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Es decir, debemos calcular la mitad de $\frac{320}{10}$, la mitad de $\frac{1}{10}$ y luego hallamos la suma de ellos.

Veamos:

1 Para calcular la mitad de $\frac{320}{10}$ escribiremos este número como la adición de dos números iguales, es decir en dos mitades:

$$\frac{320}{10}=\frac{160}{10}+\frac{160}{10}$$

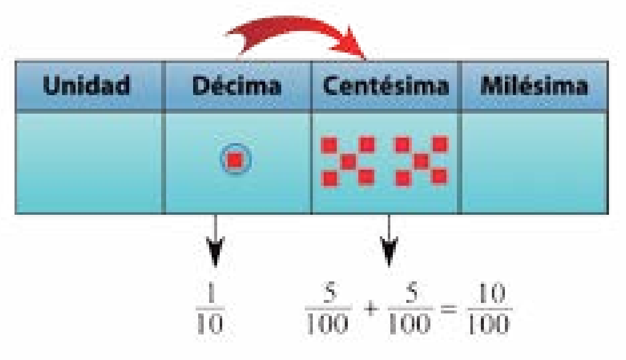
Luego, seleccionamos uno de los dos números y obtenemos la mitad que estábamos buscando. Nos queda:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{320}{10}\right)=\frac{160}{10}$$

2 De igual forma, para obtener la mitad de $\frac{1}{10}$ lo expresamos como la adición de dos números iguales $\frac{1}{10}=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}$.

Veamos por qué esto es así:

Recuerden que un décimo $\left(\frac{1}{10}\right)$ es equivalente a diez centésimas $\left(\frac{10}{100}\right)$.



Ahora bien, de la misma forma en que lo hicimos antes, tomamos uno de los sumandos y calculamos la mitad de este número. En consecuencia $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{100}$.

Sumando lo obtenido en 1 y 2, resulta la mitad de trescientos veintiún décimos.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{321}{10}=\frac{160}{10}+\frac{5}{100}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{321}{10}=\frac{321}{20}$$

El consumo diario per cápita de leche en el año 2004 fue de $\frac{321}{20}\text{ g}=16,05\text{ g}$.

Les toca a ustedes calcular los promedios de consumo diario per cápita de leche en polvo, durante los períodos 2006-I y 2006-II, 2008-I y 2008-II.

Adición de números racionales

Para sumar dos racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se opera así:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Como $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ la suma de ellos $\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\in\mathbb{Q}$.

Además, como $b\neq 0$ y $d\neq 0$ entonces $b\cdot d\neq 0$.

Propiedades de la adición de los números racionales $\mathbb{Q}$

Propiedad conmutativa

Esta propiedad se cumple para los conjuntos de los números naturales ($\mathbb{N}$), de los enteros ($\mathbb{Z}$) y de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Si tenemos $\frac{3}{5}$ y $\frac{-1}{6}$, al adicionarlos se cumple que:

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{-1}{6}\right)=\left(\frac{-1}{6}\right)+\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}+\frac{3}{5}$$

$$\frac{18-5}{30}=\frac{-5+18}{30}$$

así: $\frac{13}{30}=\frac{13}{30}$

Decimos entonces que:

Para cualesquiera números racionales $\frac{m}{r}$ y $\frac{n}{s}$ se cumple que:

$$\frac{m}{r}+\frac{n}{s}=\frac{n}{s}+\frac{m}{r}$$

Es decir, en la adición de números racionales se cumple que **el orden de los sumandos no altera la suma**.

Propiedad asociativa

Esta propiedad que estudiamos en los números naturales ($\mathbb{N}$) y enteros ($\mathbb{Z}$), también se cumple para los números racionales $\mathbb{Q}$**.**

Veamos un ejemplo:

Al realizar la suma de tres números racionales tenemos que:

$$\frac{-2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{7}{6}$$

$$\left(\frac{-2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{6}=\frac{-2}{3}+\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-8+3}{12}\right)+\frac{7}{6}=\frac{-2}{3}+\left(\frac{3+14}{12}\right)$$

$$\frac{-5}{12}+\frac{7}{6}=\frac{-2}{3}+\frac{17}{12}$$

$$\frac{-5+14}{12}=\frac{-8+17}{12}$$

$$\frac{9}{12}=\frac{9}{12}$$

Decimos entonces que:

Para cualesquiera número racional $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$ y $\frac{c}{z}$ se cumple que :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=$$

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}+\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

Por tanto, en la adición de los números racionales la forma de agrupar los sumandos no altera la suma.

Existencia de elemento neutro

En la adición de los números racionales se verifica la existencia de un elemento neutro. Veamos un ejemplo.

Si tenemos $\frac{-2}{5}$, entonces: $\frac{-2}{5}+0=\frac{-2}{5}+\frac{0}{5}.$

$$\frac{-2+0}{5}=\frac{-2}{5}$$

Decimos entonces que:

Para cualquier número racional $\frac{a}{b}$, entonces, $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$.

Es decir, el cero es el **elemento neutro** de la adición en $\mathbb{Q}$, ya que al sumar cero a un número racional cualquiera obtenemos ese mismo racional.

Consumo mensual de leche

Ahora, queremos saber cuántos gramos de leche consumió, mensualmente, en promedio, una persona durante el año 2005.

Lo primero que haremos será calcular, tomando como base los datos del cuadro presentado al comienzo de esta lección, el consumo diario promedio per cápita durante este año. Veamos:

$$\frac{18,5\text{ g}+16,3\text{ g}}{2}=17,4\text{ g}$$

A partir de la operación anterior podemos afirmar que el consumo diario promedio de leche per cápita para el año 2005 fue de 17,4 g.

Ahora multiplicaremos 17,4 g por los 30 días que, en promedio, tiene cada mes y de esta manera conoceremos el consumo mensual promedio de leche per cápita para el año 2005.

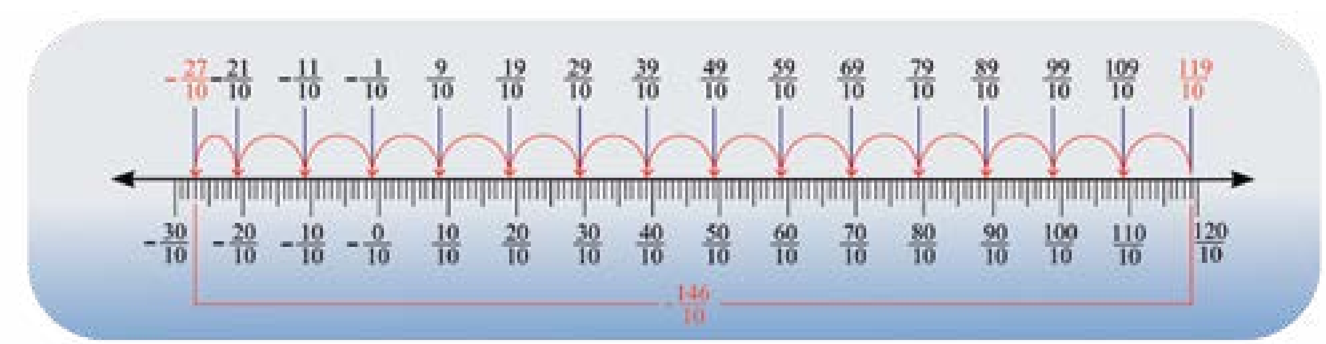
Operación	¿ Qué aplicamos ?
$17,4\cdot 30=\frac{174}{10}\text{ g}\cdot\frac{30}{1}$	Escribimos 17,4 como un número racional, y 30 como un número racional entero
$17,4\cdot 30=\frac{174\text{ g}\cdot 30}{10\cdot 1}$	Multiplicamos números racionales
$17,4\cdot 30=\frac{174\text{ g}\cdot(3\cdot 10)}{10}$	Escribimos 30 como la multiplicación de dos factores $(3\cdot 10)$
$17,4\cdot 30=\frac{(174\text{ g}\cdot 3)\cdot 10}{10}$	La propiedad asociativa de la multiplicación
$17,4\cdot 30=\frac{522\text{ g}\cdot 10}{10}$	Multiplicamos
$17,4\cdot 30=522\text{ g}\cdot\frac{10}{10}$	Organizamos los factores para simplificar
$17,4\cdot 30=522\text{ g}$	Simplificamos (recuerda que: $\frac{10}{10}=1$)

Entonces, el consumo promedio mensual de leche per cápita para el año 2005 fue de 522 gramos (g). Ahora, calculen ustedes este mismo promedio para los restantes años que aparecen en la tabla.

Sustracción en $\mathbb{Q}$

Si queremos calcular la variación del consumo diario de leche per cápita, durante los períodos 2007-I y 2007-II, podemos realizar la siguiente sustracción $\frac{119}{10}-\frac{146}{10}$ ¿Por qué esto es cierto?

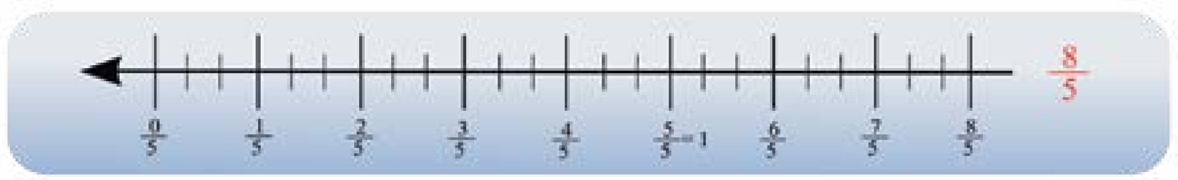
Observen que en la recta numérica representamos el número $\frac{119}{10}$ y nos movemos $\frac{146}{10}$ hacia la izquierda (dando saltos de diez décimas en diez décimas).

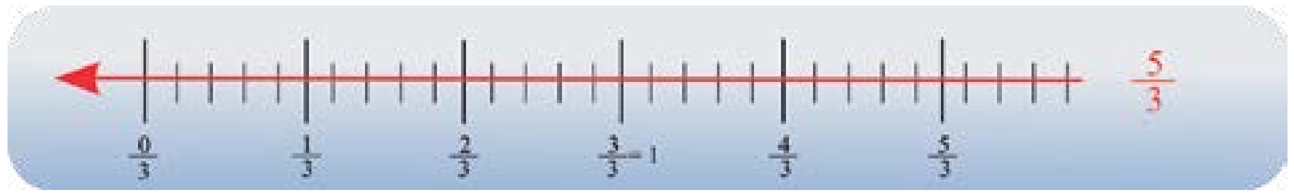


Entonces, $\frac{119}{10}-\frac{146}{10}=\frac{119-146}{10}=-\frac{27}{10}$

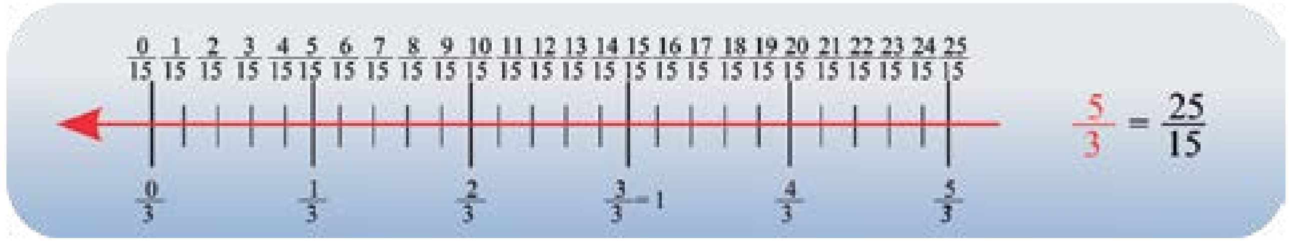
Para calcular la diferencia de dos números racionales como los siguientes $\frac{8}{5}$ y $\frac{5}{3}$ procedemos de la siguiente manera:

Observen que hemos representado en la recta numérica los números $\frac{8}{5}$ y $\frac{5}{3}$.

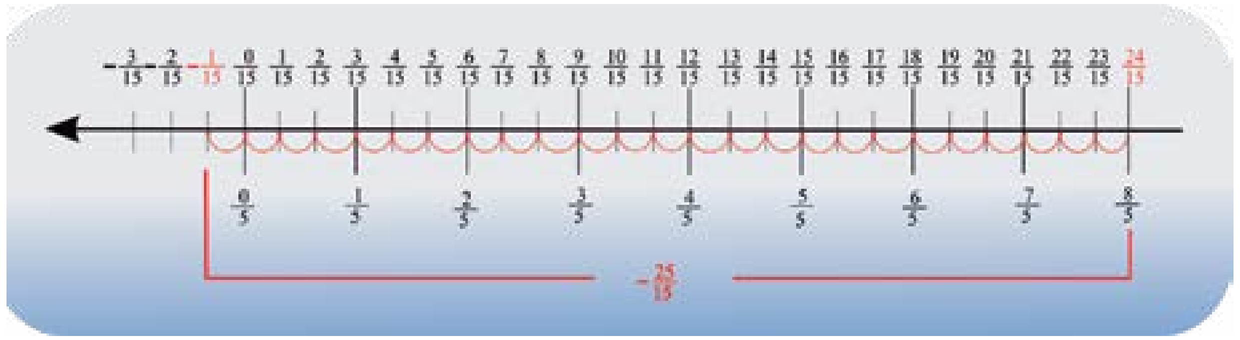




Hemos dividido los quintos en tercios y los tercios en quintos.



Noten que en la recta numérica representamos el número $\frac{8}{5}$ y $\frac{24}{15}$ y nos desplazamos $\frac{5}{3}=\frac{25}{15}$ hacia la izquierda (dando saltos de un quinceavo en un quinceavo).



Entonces, $\frac{8}{5}-\frac{5}{3}=\frac{8\cdot 3-5\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{24-25}{15}=-\frac{1}{15}$

Sustracción de números racionales

Para calcular la **diferencia** de dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ procederemos de la siguiente forma:

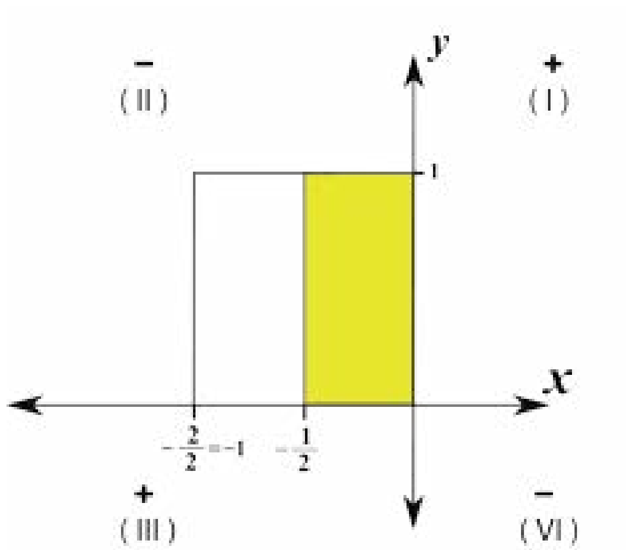
$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$

Como $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ su diferencia $\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\in\mathbb{Q}$.

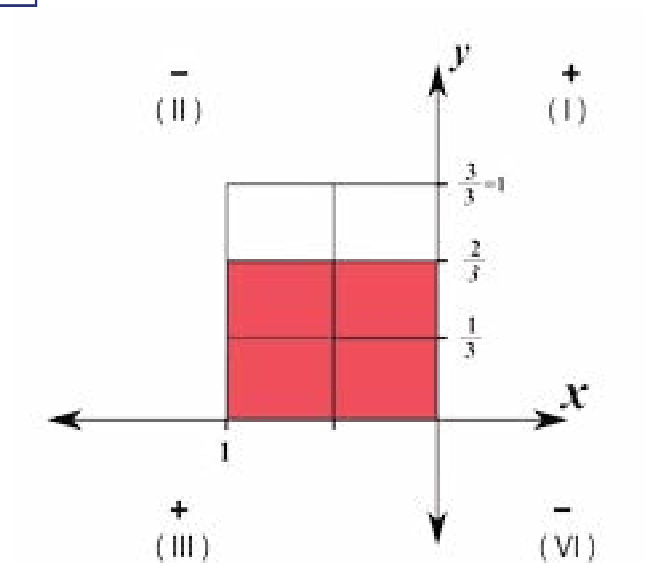
Además, como $b\neq 0$ y $d\neq 0$ entonces $b\cdot d\neq 0$.

Multiplicación en $\mathbb{Q}$

Vamos a multiplicar $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$. Para ello nos apoyaremos en figuras rectangulares que representaremos en el plano, mediante un sistema de coordenadas cartesianas.

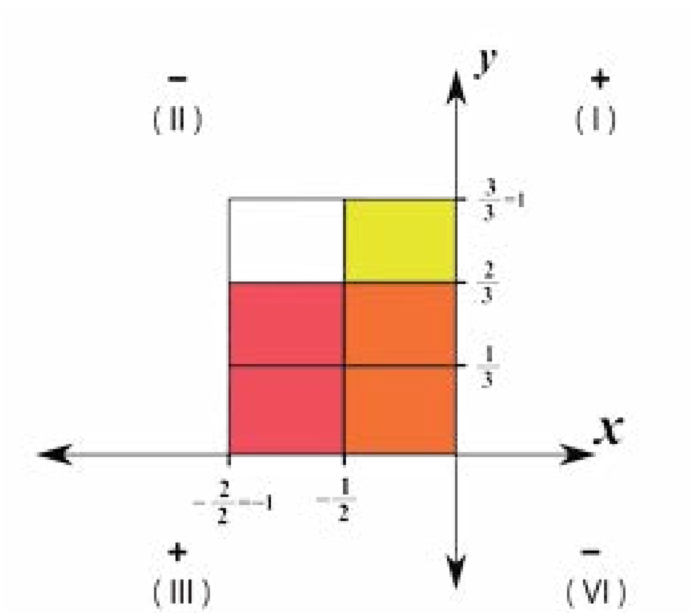


Hemos representado $-\frac{1}{2}$ en el plano, utilizando el eje horizontal.



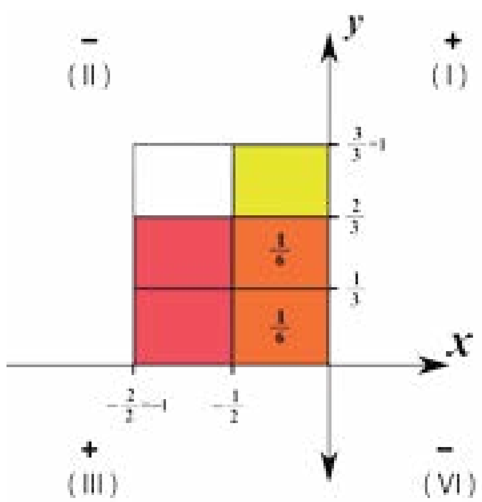
Ahora representamos $\frac{2}{3}$, utilizando el eje vertical.

Como se pueden dar cuenta, la unidad quedó dividida en sextos.



Al superponerlas nos queda la intersección de ambas regiones

Esta intersección representa el producto de la multiplicación.



Si contamos los sextos que quedaron en la intersección, vemos que resulta $\frac{2}{6}$.

Como queda en el segundo cuadrante, decimos que el resultado es negativo, es decir:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{6}$$

Multiplicación de números racionales

Para multiplicar dos racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se opera así:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

como $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$

el producto $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\in\mathbb{Q}$

Además como $b\neq 0$ y $d\neq 0$ entonces $b\cdot d\neq 0$.

Propiedades de la multiplicación de los números racionales

Propiedad conmutativa

Para cualesquiera números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se cumple que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

Esta propiedad, que también se cumple en la multiplicación de naturales ($\mathbb{N}$) y enteros ($\mathbb{Z}$), la pueden verificar con cualesquiera números racionales.

Veamos un ejemplo:

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)=\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\frac{2}{5}$$
$$\frac{-6}{20}=\frac{-6}{20}$$

Propiedad asociativa

También para la multiplicación de los números racionales se cumple esta propiedad, que hemos estudiado en los conjuntos de números naturales ($\mathbb{N}$) y números enteros ($\mathbb{Z}$).

Multipliquemos los números racionales $\frac{2}{5}, \frac{-1}{3}$ y $\frac{-3}{8}$:

$$\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{-3}{8}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-3}{8}\right)\right]$$

$$\left(\frac{-2}{15}\right)\cdot\left(\frac{-3}{8}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{24}\right)$$

$$\frac{(-2)\cdot(-3)}{15\cdot 8}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 24}$$

$$\frac{6}{120}=\frac{6}{120}$$

Simplificando, es decir, dividiendo numerador y denominador de ambas fracciones por el M.C.D. $(6, 120)$ que es **6**.

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$$

En general:

Si tenemos $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ y $\frac{z}{c}$ números racionales cualesquiera, entonces:

$$\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\right)\frac{z}{c}=\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}\right)$$

Es decir que la forma en que agrupen los factores de una multiplicación no altera el producto.

Existencia del elemento neutro

El elemento neutro de la multiplicación de los números racionales es el 1. Este número puede escribirse como $\frac{a}{a}$ en donde $a \neq 0$. A las fracciones de este tipo se les denomina **fracción unidad**.

Veamos unos ejemplos:

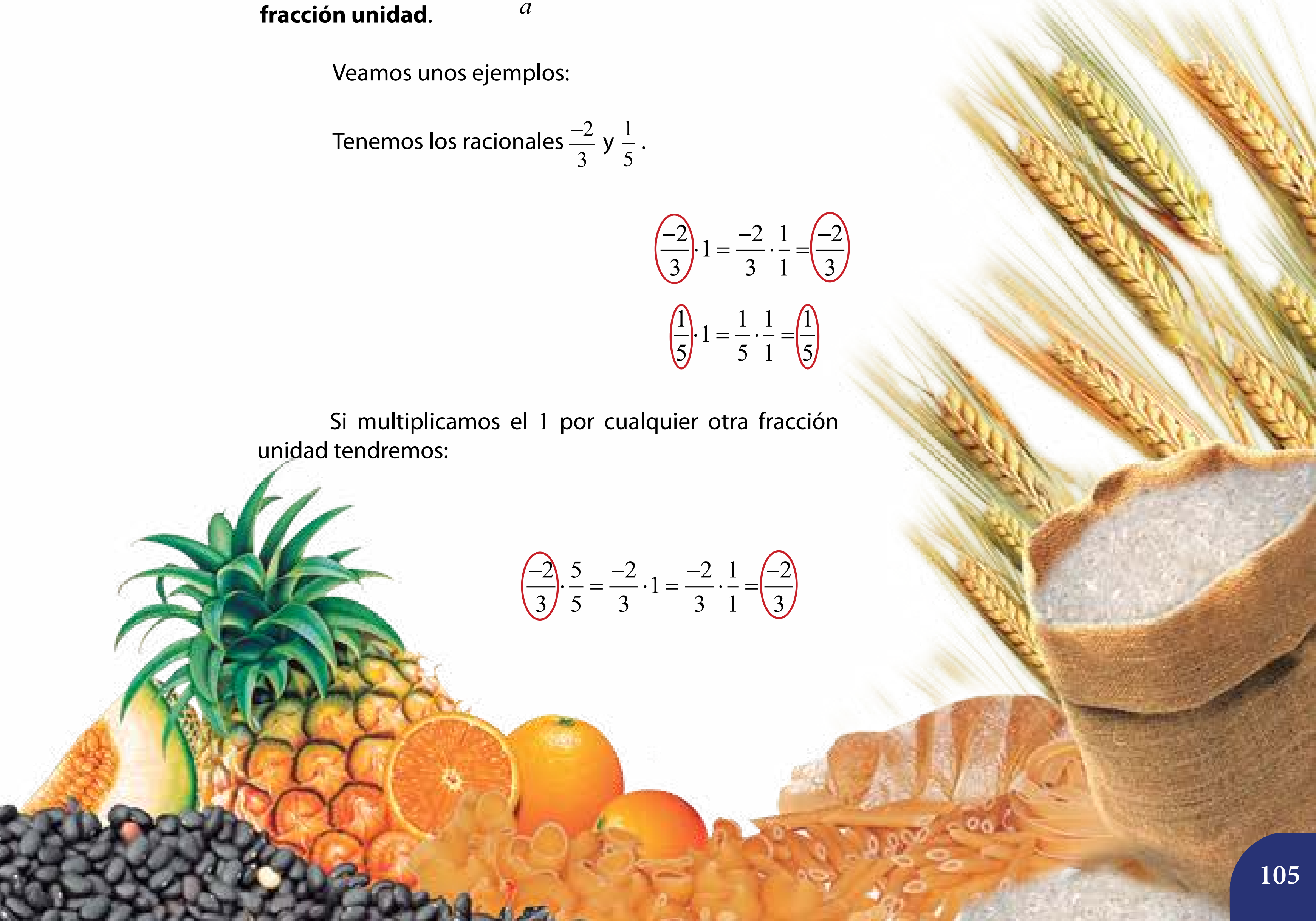
Tenemos los racionales $\frac{-2}{3}$ y $\frac{1}{5}$.

$$\frac{-2}{3}\cdot 1=\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{-2}{3}$$

$$\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{5}$$

Si multiplicamos el 1 por cualquier otra fracción unidad tendremos:

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{-2}{3}\cdot 1=\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{-2}{3}$$



Revisemos el primer ejemplo de multiplicación, en donde debemos resolver $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$:

Operación	¿ Qué aplicamos ?
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\left(-1\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$	Expresamos : $-\frac{1}{2}=-1\cdot\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)$	Aplicamos la propiedad asociativa
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-1\cdot\frac{2}{6}$	Multiplicamos dos números racionales
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{6}$	Expresamos $-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}$ como el número racional $-\frac{2}{6}$

Existencia de un elemento simétrico

Dado un racional $\frac{a}{b}$, existe siempre otro número racional $\frac{a}{b}$, tal que:

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$$

Al racional $\frac{a}{b}$ se le conoce como elemento simétrico u opuesto del racional $\frac{a}{b}$. Como ejemplo numérico tenemos:

Dado $\frac{7}{3}$, existe otro número racional, en este caso, $-\frac{7}{3}$ tal que: $\frac{7}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=0$.

Entonces, decimos que $-\frac{7}{3}$ es el opuesto o simétrico de $\frac{7}{3}$.

Inverso multiplicativo de un número racional

Tomemos un número racional $\frac{5}{6}$ y multipliquémoslo por $\frac{6}{5}$:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{5\cdot 6}{6\cdot 5}=\frac{30}{30}=1$$

El resultado es 1, y por esa razón se dice que $\frac{6}{5}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{6}$.

Ahora junto con tus compañeras y compañeros generalicen la propiedad anterior.

¿Inverso aditivo o multiplicativo?

Si alguien te pregunta cuál es el inverso de $\frac{4}{3}$ ¿qué le responderías?

Para poder contestar correctamente esta interrogante tendríamos que saber si se refiere al inverso aditivo o al inverso multiplicativo. Por ejemplo:

El inverso aditivo de $\frac{4}{3}$ es aquel número que sumado con $\frac{4}{3}$ da como resultado el elemento neutro de la adición, que es el cero. Veamos:

$$\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{12-12}{9}=\frac{0}{9}=0$$

Mientras que el inverso multiplicativo de $\frac{4}{3}$ es aquel número que multiplicado por $\frac{4}{3}$ da como resultado el elemento neutro de la multiplicación, que es el 1. Veamos:

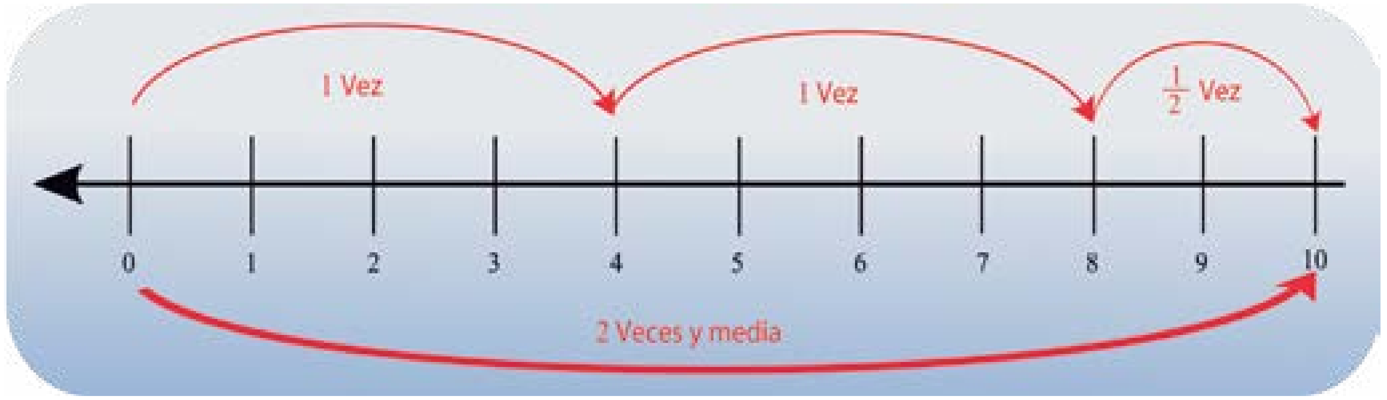
$$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{12}{12}=1$$

División en $\mathbb{Q}$

Vamos a recordar lo que significa dividir un número natural entre otro: si buscamos el cociente $10 \div 4$ nos preguntamos cuántas veces está contenido 4 en 10:

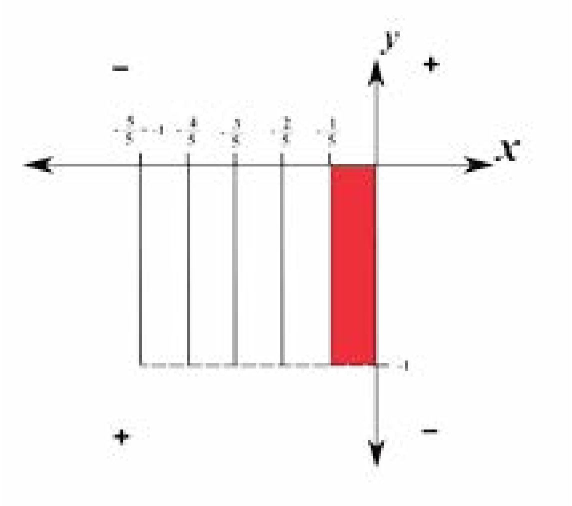
$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline -8 & 2{,}5 \\ 20 & \\ -20 & \\ 0 & \end{array}$$

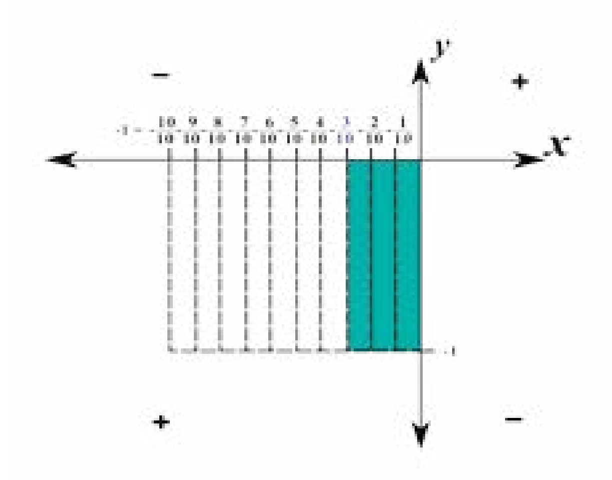
Lo que indica que el número 4 está contenido dos veces y medio en el número 10. Veamos cómo se representa esto en la recta numérica:



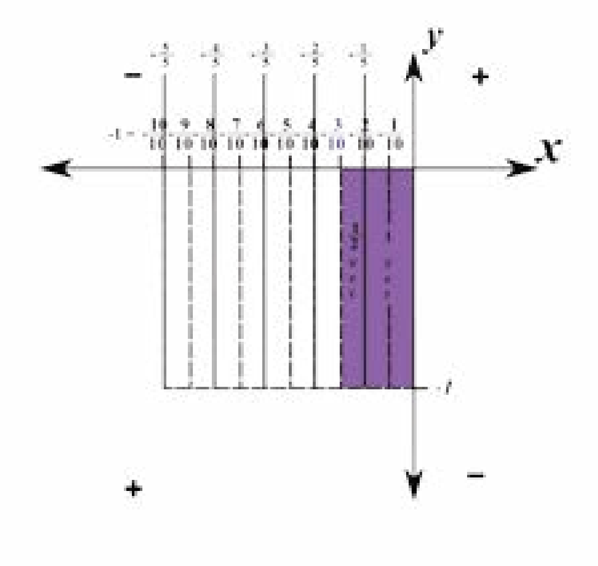
Aplicando este mismo principio de la división como contención, vamos a dividir un número racional entre otro. En este caso veremos cuánto es $-\frac{3}{10}$ entre $-\frac{1}{5}$. Es decir, nos preguntamos cuántas veces está contenido en $-\frac{1}{5}$.

Representamos gráficamente ambos racionales en el plano cartesiano:





Ahora veamos cuántas veces está contenido $-\frac{1}{5}$ en $-\frac{3}{10}$:



Por tanto: $-\frac{1}{5}$ está contenido una vez y media en $-\frac{3}{10}$.

Veamos a qué fracción corresponde este cociente:

$$1\,vez + \frac{1}{2}\,vez = \frac{3}{2}\,veces$$

En otras palabras:

$$-\frac{3}{10} : \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2}$$

División de números racionales

Para dividir dos racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se procede de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \text{ Con } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Como $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ y\ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, su cociente $\frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$.

Además, como $b \neq 0\ y\ c \neq 0$ entonces $b \cdot c \neq 0$.

Analizando las variaciones del consumo de leche

Vamos a observar la variación que hubo en los dos semestres del año 2009 en el consumo diario, per cápita, de leche en polvo. Si se fijan en la tabla, pueden ver que éste aumentó de 17,8 g, en el primer semestre de ese año, a 19,1 g en el segundo semestre.

Año	2003	2004		2005		2006		2007		2008		2009		2010
Semestre	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I
Consumo (g)	17,1	15,6	16,5	18,5	16,3	15,5	14,9	14,6	11,9	14,4	16,2	17,8	19,1	17,9

Calculen:

- ¿Cuál es la variación neta entre los semestres I y II del año 2009?
- ¿Cuál es el porcentaje de aumento del 2009-II con respecto al 2009-I?

Vamos a ayudarles a responder la segunda pregunta.

Podemos pensar que si multiplicamos el número correspondiente a lo consumido en el semestre I por una cantidad, que en este caso desconocemos (x), nos dará como resultado el número correspondiente a lo consumido en el semestre II. Esto es: $17{,}8 \cdot x = 19{,}1$

Ahora bien, $x = \frac{19{,}1}{17{,}8}$. Consulten con su profesora o profesor por qué esto es así.

Veamos cómo nos queda el valor de x:

Operación	¿ Qué aplicamos ?
$x = \dfrac{\frac{191}{10}}{\frac{178}{10}}$	Escribimos la expresión anterior usando números racionales
$x = \dfrac{\frac{191}{10}}{\frac{178}{10}} = \dfrac{191 \cdot 10}{178 \cdot 10}$	La división de racionales
$x = \frac{191}{178} \cdot \frac{10}{10}$	Escribimos los números como una multiplicación de racionales
$x = \frac{191}{178}$	Multiplicamos por la unidad (recuerden que : $\frac{10}{10} = 1$)
$x = 1{,}073033707 \approx 1{,}07$	Dividimos y aproximamos a la centésima

¿Qué significa este 1,07? Veamos:

Operación	¿ Qué aplicamos ?
$1{,}07 = 1 + 0{,}07$	Descomponemos el número 1,07 en sumandos, usando el principio aditivo del Sistema de Numeración Decimal
$1{,}07 = \frac{100}{100} + \frac{7}{100}$	Escribimos las expresiones decimales como número racional

Recuerden que la adición $\frac{100}{100} + \frac{7}{100}$ se puede interpretar como $100\% + 7\%$, es decir, como la suma de porcentajes. Esto quiere decir que durante el II semestre de 2009 el consumo diario, per cápita, de leche en polvo aumentó 7% con respecto al I semestre de ese año.

Ahora calculen el porcentaje de variación semestral del consumo diario, per cápita, de leche en polvo de los años 2004, 2005, 2006, 2007 y 2008.

Como se han dado cuenta, los números racionales y sus operaciones nos permiten comprender situaciones tales como la importancia de comer sanamente y el consumo de alimentos de la población de nuestro país. También nos pueden ayudar a estudiar el consumo de energía eléctrica en nuestros hogares, la variación diaria del precio del barril de petróleo, entre muchas otras situaciones relacionadas con tu realidad local, regional, nacional, latinoamericana y mundial.

7 BALANZAS E IGUALDAD
Ecuaciones de primer grado

Irregularidades con balanzas

Es muy probable que sus mamás o papás hayan observado, mientras hacen sus compras de alimentos, que algunos comerciantes utilizan **balanzas** (instrumentos que permiten medir la *masa* de un *cuerpo u objeto*) que están calibradas en kilogramos o en libras. De hecho, la medida oficial de la masa en Venezuela es el kilogramo. Por lo tanto, los instrumentos que se usen para tal fin en nuestro país deben estar calibrados en kilogramos. Quizás algunos han pasado la desagradable experiencia de que les han entregado menos masa que la que han cancelado, por ejemplo, cuando han querido comprar 1 kg de alguna fruta.

Esta situación no es poco común: sólo en uno de los operativos llevados a cabo por el Instituto para la Defensa de las Personas en el Acceso a los Bienes y Servicios (Indepabis) y el Servicio Autónomo Nacional de Normalización, Calidad, Metrología y Reglamentos Técnicos (Sencamer), en un día del mes de febrero de 2012 en las avenidas Fuerzas Armadas, Andrés Bello y en Bellas Artes, y Quinta Crespo de Caracas, se decomisaron 96 balanzas y otros tipos de instrumentos con irregularidades, y 40 balanzas y pesas con doble viraje (es decir, que indican la masa tanto en kilogramos como en libras). Irregularidades que pueden comunicarse al número 0800-Calidad (0800-2254323).

Algunos tipos de balanzas son las que se presentan a continuación.

Recuerden, como vimos en 5^{to} y 6^{to} grados, las balanzas se utilizan para medir la masa de un cuerpo o sustancia. El principio de su funcionamiento es equilibrar las masas en los dos platillos.

Antes de seguir, conversen con sus compañeras y compañeros la pregunta:

- ¿Un kilogramo equivale a una libra?
- ¿Cuál es la relación entre estas unidades de medida de masa?

Balanza granataria

Un ejemplo de irregularidad

Supongamos que la balanza marca 1, pero está calibrada en libras (lb). Recordemos que:

$$1\text{ kg} \approx 2,205\text{ lb}$$

es decir, un kilogramo equivale aproximadamente a dos coma doscientos cinco libras (dos libras con doscientos cinco milésimas).

Observen que hemos usado el símbolo $\approx$ para indicar "es aproximado a".

Así, para saber cuántos kilogramos equivalen, aproximadamente, a una libra, escribimos las relaciones:

$$1\text{ kg} \approx 2,205\text{ lb} \qquad x = \frac{1\text{ kg} \cdot 1\,\cancel{\text{lb}}}{2,205\,\cancel{\text{lb}}} \qquad x = 0,45351\text{ kg}$$
$$x \approx 1\text{ lb}$$

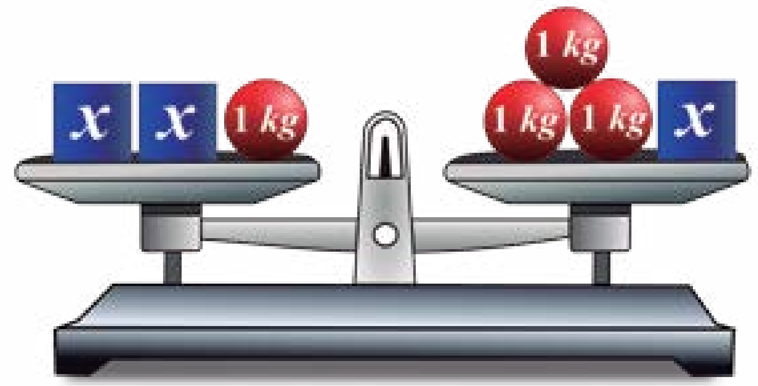
Con ello, cada libra es poco menos de medio kilogramo, unos 454 *gramos*. Sin embargo, algunos comerciantes lo hacen "pasar" como 1 *kg*. He allí la irregularidad a la que se prestan las balanzas calibradas en libras.

- Si la balanza marca 2 lb, ¿cuál es su equivalente en kg?
- Si 1 kg de fruta tiene un costo de Bs. 15, ¿cuánto debemos cancelar si la balanza marca 2 lb?
- Discutan esto con sus compañeras y compañeros.

Balanza antigua romana

Equilibrando balanzas

Situación 1. Consideremos la siguiente situación: en una balanza hemos dispuesto dos tipos de cuerpos, uno de masa desconocida x y otro de masa de 1 kg, de manera que quede en equilibrio. ¿Cuál es la masa de x (en kilogramos)?



Esta balanza en equilibrio se corresponde con la igualdad:

$$x + x + 1\text{kg} = 1\text{ kg} + 1\text{ kg} + 1\text{ kg} + x$$

la cual es equivalente a:

$$2x + 1\text{kg} = 3\text{ kg} + x$$

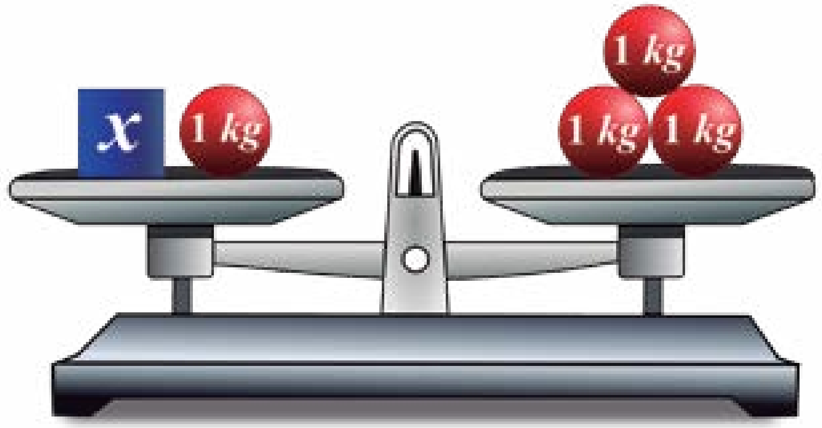
En este caso, podemos quitar un objeto de masa x en cada uno de los platillos de la balanza, con ello permanecerá en equilibrio. Es decir,

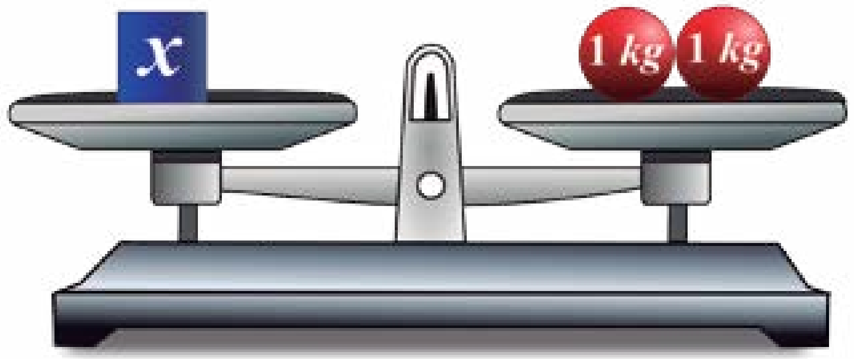
$$2x + 1\text{kg} - x = 3\text{ kg} + x - x$$

que simplificando nos queda:

$$x + 1\text{kg} = 3\text{ kg}$$

Ahora quitamos un objeto de masa 1 de cada platillo.





Esta balanza en equilibrio se corresponde con la igualdad:

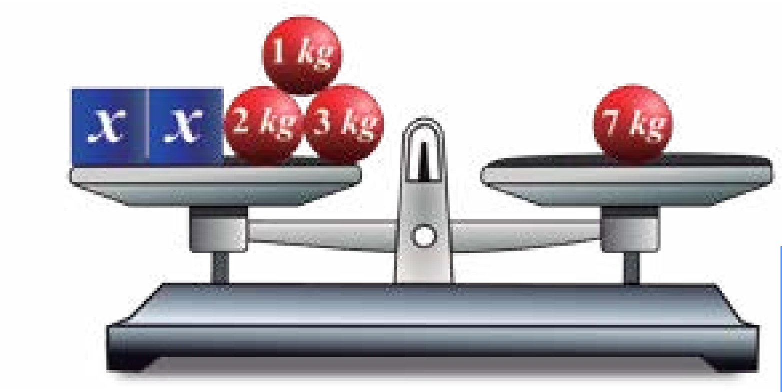
$$x + 1\text{kg} - 1\text{ kg} = 3\text{ kg} - 1\text{ kg}$$

la cual es equivalente a:

$$x + 0 = 2\text{ kg}$$
$$x = 2\text{ kg}$$

En conclusión, para que la balanza esté en equilibrio la masa de x debe ser de 2 kg.

Situación 2. Ahora tenemos en equilibrio la balanza que sigue. En ella intervienen cuerpos de masas 1 kg, 2 kg, 3 kg y 7 kg. ¿Cuál es la masa de x?



Ésta se corresponde con la igualdad:

$$x + x + 1\,\text{kg} + 2\,\text{kg} + 3\,\text{kg} = 7\,\text{kg}$$

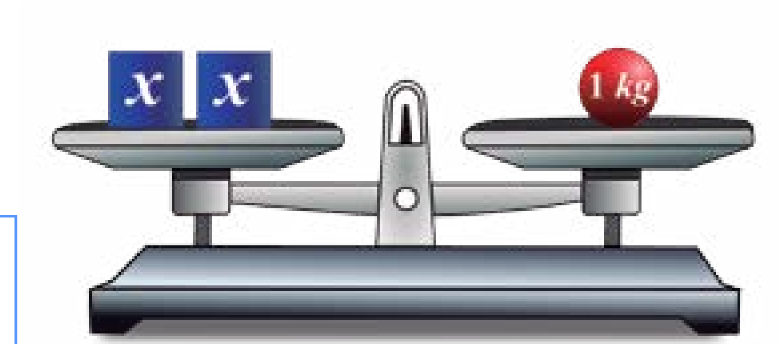
la cual es equivalente a:

$$2x + 6\,\text{kg} = 7\,\text{kg}$$

Es decir, "dos equis más seis es igual a siete".

Ahora podemos quitar los tres objetos de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg del platillo de la izquierda y sustituir los 7 kg del platillo de la derecha por un cuerpo de masa 1 kg.

$$2x + 6\,\text{kg} - 6\,\text{kg} = 7\,\text{kg} - 6\,\text{kg}$$



que simplificando nos queda

$$2x + 0 = 1\,\text{kg}$$
$$2x = 1\,\text{kg}$$

Entonces, dividiendo por 2 cada lado de la igualdad obtenemos:

$$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}\,\text{kg}$$

es decir:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,\text{kg}}$$

Pesas de balanza

Por tanto, la balanza está en equilibrio cuando $x = \frac{1}{2}$ kg.

Las ecuaciones

Una **ecuación** es una expresión en la que se da una igualdad. Además, intervienen una o varias **variables** o **incógnitas.** Por ejemplo:

$$2x + 1 = 3 + x$$
$$2x + 6 = 7$$

son ecuaciones con la variable o incógnita x.

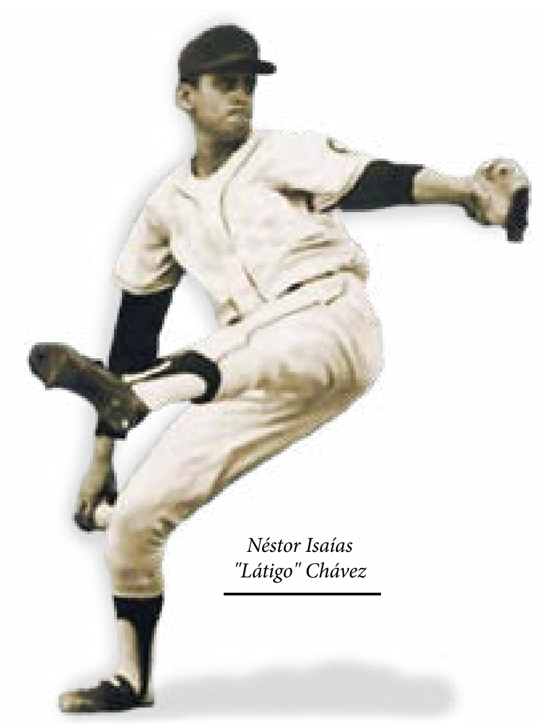
En cambio,

$$x + y = 2$$

es una ecuación con dos variables, x y y.

Incluso, hay ecuaciones con más variables.

Las **soluciones** o **raíces** de una ecuación son los valores numéricos que al ser sustituidos en las variables o incógnitas hacen que se cumpla la igualdad, tal como vimos en las situaciones anteriores. El grado de una ecuación está dado por el mayor de los exponentes al que está elevado su o sus variables o incógnitas. Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones o raíces.
Más aún, dos o más ecuaciones se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones.

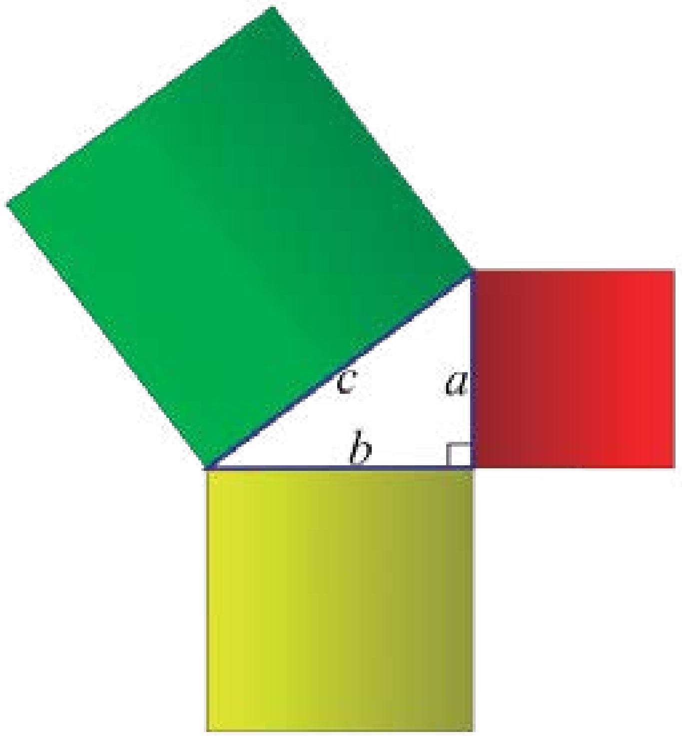


Néstor Isaías "Látigo" Chávez

Otros ejemplos de ecuaciones son:

- El área de un rectángulo de lados a y b está dada por la ecuación $A_{\square} = a \cdot b$.
- El área de un círculo de radio r es $A_{\bigcirc} = \pi \cdot r^2$.
- La ecuación para calcular la efectividad de un pitcher en el béisbol es $E = \frac{9 \cdot n}{i}$, donde E es la efectividad de un pitcher, n la cantidad de carreras limpias permitidas por ese pitcher, e i el número de innings lanzados por el pitcher.
- La ecuación para convertir grados Farenheit a Centígrados es: $t(°C) = \frac{t(°F) - 32}{1{,}8}$.

- $a=\frac{v}{t}$ es la aceleración dada por el cociente entre la velocidad y el tiempo.
- El famoso "Teorema de Pitágoras", que estudiarás más adelante, está dado por la ecuación $c^2=a^2+b^2$, donde a y b son los lados perpendiculares de un triángulo rectángulo y c es su hipotenusa (ver el gráfico que sigue).



Las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, guardan la siguiente relación: $c^2=a^2+b^2$

Seguramente conocen muchos más ejemplos, pues desde la escuela primaria han estudiado otras ecuaciones.

- Den otros ejemplos de ecuaciones.
- Construyan un diagrama en el que clasifiquen estas ecuaciones de acuerdo con la cantidad de variables o incógnitas que tienen.
- ¿Cuál es el grado de cada una de las ecuaciones dadas antes?
- Discútanlo con sus compañeras y compañeros.

Como ven, no todas estas ecuaciones tienen que ver con balanzas en equilibrio, sino que tocan muchas y variadas situaciones de la vida cotidiana y de las ciencias.

El enigma de Diofanto: una ecuación con una incógnita

Diofanto (quien vivió, aproximadamente entre los años 200 o 214 y 284 o 298), sistematizó sus ideas con el empleo de símbolos propios, por ello se le reconoce, con justicia, como el "padre del álgebra". Publicó la obra *Aritmética*, en la que sus variados problemas y hábiles soluciones se constituyeron, siglos después, en modelos para importantes matemáticos como: Fermat, Euler y Gauss.

La edad de este matemático quedó registrada para siempre en un acertijo descrito con términos algebraicos. Este acertijo, atribuido a Hipatia, primera mujer matemática de quien se tiene conocimiento, gran estudiosa y analizadora de los trabajos de Diofanto, reza así:

Dios le concedió ser niño durante una sexta parte de su vida, y una duodécima parte de ella más tarde cubrió de vello sus mejillas; encendió en él la antorcha del matrimonio tras una séptima parte, y cinco años después le concedió un hijo. ¡Ay! Un chico de nacimiento tardío y enfermizo al que el frío destino se llevó cuando alcanzó la edad de la mitad de la vida total de su padre. Éste consoló su aflicción con la ciencia de los números durante los cuatro años siguientes, tras los cuales su vida se extinguió.

Para calcular los años vividos por el matemático, no hay más que expresar en términos algebraicos cada uno de los segmentos de su vida y formular la ecuación correspondiente. Veamos:

Asignemos la variable x a la edad de muerte de Diofanto. Ahora:

$\frac{x}{6}$	Representa su niñez
$\frac{x}{12}$	Es su juventud
$\frac{x}{7}$	Tiempo en que estuvo casado
5	Nacimiento del hijo
$\frac{x}{2}$	Muerte del hijo de Diofanto
4	Tiempo dedicado a la ciencia de los números hasta que se extinguió su vida

Resultando de las expresiones anteriores la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

El mínimo común múltiplo de 6, 12, 7 y 2, es 84, en efecto, listemos los múltiplos de cada uno:

múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96 …
múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 …
múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98 …
múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84 …

Observen que el 84 es múltiplo de los cuatro números que consideramos. Es decir, es un múltiplo común en las cuatro listas, y además, es el más pequeño entre los comunes.

Otro método que también pueden utilizar, consiste en descomponer 6, 12, 7 y 2 en sus factores primos y tomar los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Con lo cual la ecuación anterior es equivalente a la que sigue:

$$84\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4\right)=84x$$

$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x$$

$75x+756=84x$, simplificando los términos semejantes.

Y ahora, sumamos a cada lado de la igualdad:

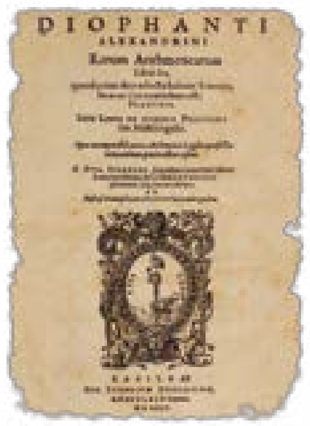
$$\begin{aligned}75x+756-75x&=84x-75x\\75x-75x+756&=9x\\0x+756&=9x\\756&=9x\end{aligned}$$

Finalmente, dividimos cada miembro de la igualdad por 9:

$$\frac{9x}{9}=\frac{756}{9}$$

Y obtenemos $x=84$

Balanza antigua



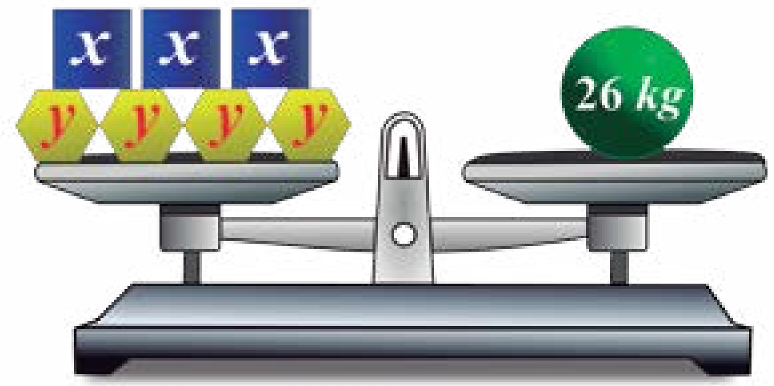
Obra aritmética de Diofanto

¡Diofanto, de acuerdo a este acertijo vivió 84 años! En este caso, la ecuación $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$ tiene una solución única. Pero comprobemos la solución que obtuvimos; para ello sustituiremos a x por su valor en la ecuación $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$ y verificaremos que la igualdad se cumple.

$$\begin{aligned}\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5+\frac{84}{2}+4&=14+7+12+5+42+4\\&=84.\end{aligned}$$

Unas ecuaciones especiales: con dos incógnitas y de soluciones enteras

Situación 3. Supongamos que dos de nuestras masas de referencia no tienen inscrito su valor, pues se les ha borrado. Sólo sabemos que sus valores son enteros y que hemos logrado equilibrar la balanza de la siguiente manera:



¿Cómo saber cuáles son las masas x y y? Para responder esto escribimos, en primer lugar, la ecuación que representa a la balanza en equilibrio.

$$3x+4y=26$$

Ahora "despejamos" una de las variables o incógnitas. Nosotros hemos seleccionado a la x:

$$3x=26-4y$$

Seguidamente, damos valores a la incógnita y. ¿Qué valores? Justo valores enteros desde el 0 hasta 3–1 (justo un entero menos que el coeficiente de la x). Veamos.

y	$3x = 26 - 4y$	¿ El resultado es divisible por 3?
$y = 0$	$3x = 26 - 4\ (0) = 26$	No
$y = 1$	$3x = 26 - 4\ (1) = 22$	No
$y = 2$	$3x = 26 - 4\ (2) = 18$	Sí

Al preguntarnos si el resultado es divisible por 3 tiene sentido, pues cuando dividamos la expresión $3x = 26$ por 3, y $3x = 22$, obtendremos $x = \frac{26}{3}$ y $x = \frac{22}{3}$, respectivamente, que no son números enteros (observa que la división no es exacta). La única expresión que conlleva a una solución entera es:

$$\boxed{3x = 18}$$

Por tanto,

$$\boxed{x = \frac{18}{3} = 6}$$

Finalmente, sólo nos falta "sustituir" este valor de x en la primera ecuación $3x + 4y = 26$, y así obtendremos y. Esto lo hacemos de la siguiente forma:

$3(6) + 4y = 26$	Ecuación que es equivalente a $18 + 4y = 26$
$18 + 4y - 18 = 26 - 18$	Restando 18 a cada miembro de la ecuación
$18 - 18 + 4y = 8$	Aplicando la propiedad conmutativa y simplificando el miembro derecho de la ecuación
$0 + 4y = 8$	Restando 18–18
$4y = 8$	Ya que el 0 es el neutro aditivo
$\frac{4y}{4} = \frac{8}{4}$	Dividiendo por 4 cada miembro
$y = 2.$	

Con todo esto hemos obtenido la solución $x=6$ y $y=2$. La cual es fácil de comprobar:

$$3(6) + 4(2) = 18 + 8 = 26$$

Si tenemos la ecuación $ax + by = c$, donde a, b y c son enteros conocidos, decimos que la misma tiene solución entera si el máximo común divisor de a y b es 1.
En el problema que acabamos de resolver, el $MCD(3,4) = 1$.
Las ecuaciones de la forma $ax + by = c$ son **ecuaciones diofánticas**.

Situación 4. ¿Cómo sabemos si una ecuación de este tipo no tiene solución entera? Por ejemplo, sea la ecuación:

$$5x + 10y = 21$$

A partir de ésta obtenemos la ecuación equivalente. Ahora seguimos el procedimiento expuesto antes: daremos valores a y, desde el 0 hasta el 4 (hasta uno menos que el coeficiente de x), y efectuamos los cálculos correspondientes.

y	$5x = 21\quad 10y$	¿ El resultado es divisible por 5?
$y = 0$	$5x = 21 - 10\ (0) = 21$	No
$y = 1$	$5x = 21 - 10\ (1) = 11$	No
$y = 2$	$5x = 21 - 10\ (2) = 1$	No
$y = 3$	$5x = 21 - 10\ (3) = -9$	No
$y = 4$	$5x = 21 - 10\ (4) = -19$	No

Y como ninguno de los números obtenidos es divisible por 5, entonces no tiene soluciones enteras. Observen que ninguna de las fracciones $\frac{21}{5}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{9}{5}$, y $-\frac{19}{5}$, es equivalente a un entero.

Resolvamos la siguiente ecuación:

$\frac{1+2x}{3} = -\frac{3}{2}$	
$3 \cdot \left(\frac{1+2x}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$	Multiplicando por 3
$1 + 2x = -\frac{9}{2}$	Simplificando y resolviendo
$-1 + 1 + 2x = -1 - \frac{9}{2}$	Sumando -1
$2x = \frac{-2-9}{2}$	Adicionando
$2x = -\frac{11}{2}$	Resolviendo adición
$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{11}{2}\right)$	Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\boxed{x = -\frac{11}{4}}$$

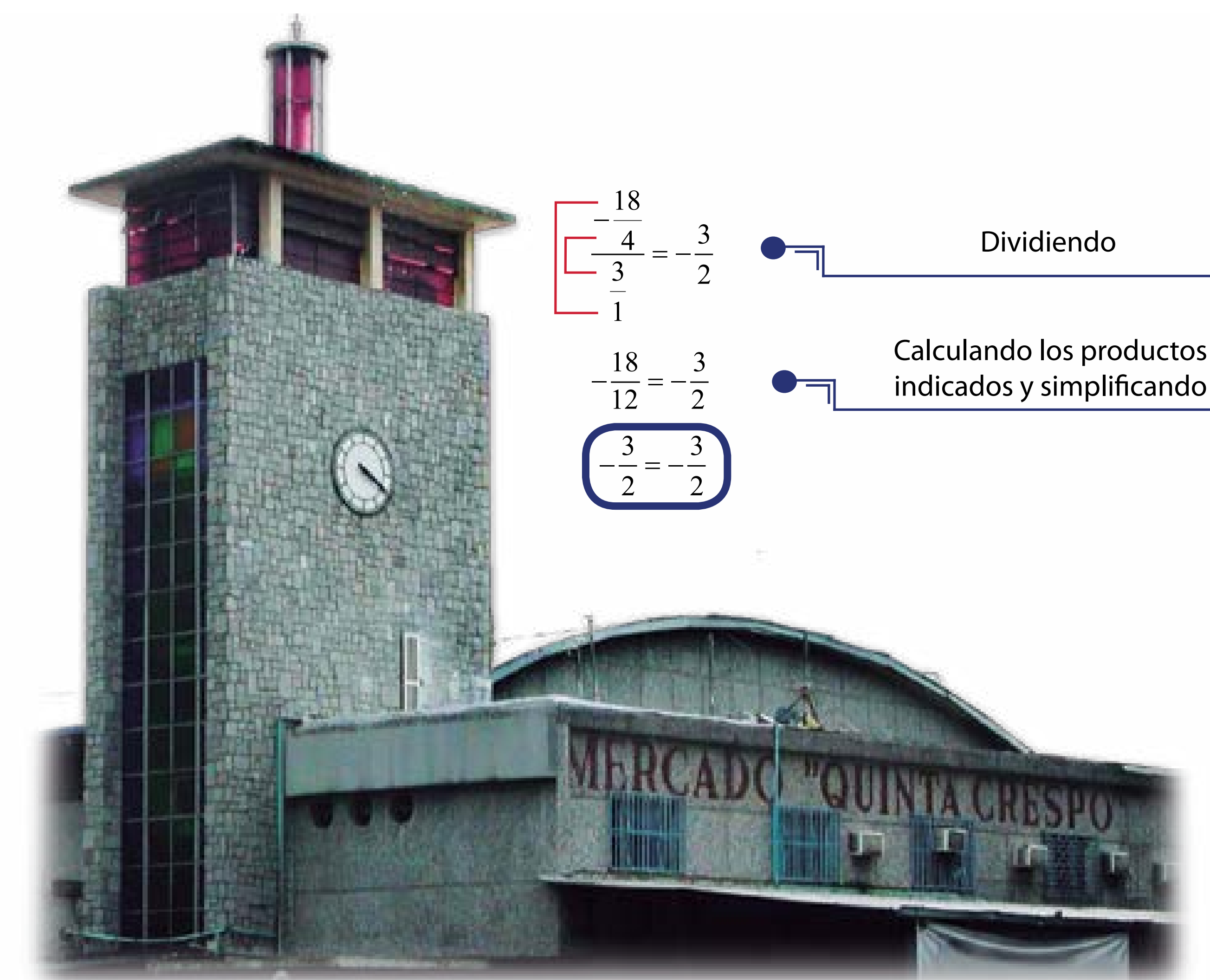
Sustituyendo el valor de x en la ecuación inicial:

$$\frac{1+2\left(-\frac{11}{4}\right)}{3}=-\frac{3}{2}$$ Sustituyendo el valor de x

$$\frac{1+\left(-\frac{22}{4}\right)}{3}=-\frac{3}{2}$$ Multiplicando

$$\frac{\frac{4-22}{4}}{3}=-\frac{3}{2}$$ Adicionando con apoyo en el $m.c.m$

$$\frac{-\frac{18}{4}}{3}=-\frac{3}{2}$$ Adicionando



$$\frac{-\frac{18}{4}}{\frac{3}{1}}=-\frac{3}{2}$$ Dividiendo

$$-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}$$ Calculando los productos indicados y simplificando

$$\boxed{-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}}$$

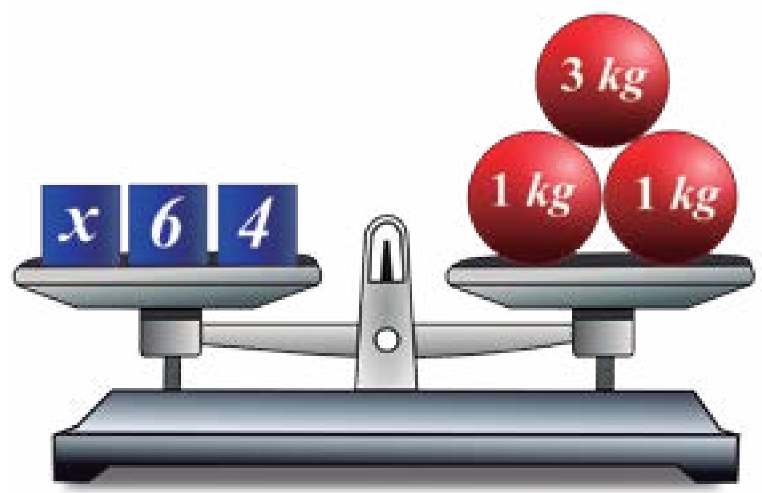
Investiguemos

1. ¿Cuál o cuáles son las variables o incógnitas en las siguientes ecuaciones? ¿Cuál es su grado?

$$6x+5=x+3$$
$$10x+8=2+3+x$$
$$1+2+5+x=10+x$$

2. Aporten la representación de estas ecuaciones como balanzas en equilibrio.

3. Resuelvan la ecuación dada por la balanza:



4. Den ejemplos de otras ecuaciones de una y dos variables.

5. ¿Tienen solución en $\mathbb{Q}$? En ese caso, muestren el proceso para obtener la solución y debatan esto con sus compañeras y compañeros.

6. Resuelvan las ecuaciones que siguen:

- $6-x=4$
- $6-x+11=4$
- $1+12x-20=3$
- $1+x+2x+3x=-1-2-3$
- $\frac{-1-x}{2}=5$
- $\frac{-1-x}{2}=5x$
- $\frac{6x+1}{3}=2x+\frac{1}{3}$

7 Empleen el proceso que describimos para obtener las soluciones enteras (en $\mathbb{Z}$) de una ecuación diofántica, para resolver el siguiente problema: Tenemos Bs. 100 que destinaremos a la compra de dos tipos de estampillas referentes a las especies en peligro de extinción en nuestro país (estampillas de colección). Una de ellas tiene un costo de Bs. 20 y la otra de Bs. 15. ¿Cuántas estampillas de cada tipo podemos comprar? Como ven, este problema abre una gama variada de aplicaciones para tal tipo de ecuaciones.

8 Una de las patas de una mesa tiene 2 cm menos de altura que las demás. Necesitamos equilibrarla provisionalmente para lo cual disponemos de varios discos de madera de 2 mm y 3 mm. ¿Cuántas soluciones hay para este problema? ¿Cuáles son?

9 **Formen pequeños grupos y construyan una balanza con materiales aprovechables**

Consigan, con ayuda de sus padres, vecinas y vecinos, objetos de masas 10 g, 20 g, 40 g, 80 g y 100 g. (Sólo pueden tener uno de cada uno). Empléenlos para equilibrar la balanza al colocar otros objetos.

- Como por ejemplo un cuaderno, un libro, entre otros.
- Con estas masas, ¿cómo equilibras un objeto de 190 g?
- Preparen una exposición del curso con todas las balanzas construidas. Animen a otros cursos a que hagan lo mismo.

10 **Las palomas y el gavilán**

Estaba un gavilán posado en la rama de un árbol. Éste, admirado de ver a las hermosas palomas volar, le dijo a una de ellas: —¡Adiós mis cien palomas, qué bellas se ven! Una de ellas, llena de amabilidad, le dijo: —Disculpe señor gavilán, pero nosotras no somos cien. Nosotras, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras, más usted, señor gavilán, sí somos 100 aves. ¿Podrían decir cuántas palomas son?

El juicio de Osiris: una nota histórica

La *balanza* era ya conocida por el pueblo Egipcio; incluso, se utilizaba con un sentido mágico-religioso: con ella se juzgaba el corazón de un difunto (en un espacio llamado “sala de las dos verdades”) para determinar si había causado algún mal y si era merecedor de una vida feliz más allá de la muerte.

El corazón de toda persona representaba la conciencia y la moralidad. Éste lo extraía mágicamente el Dios Anubis y lo presentaba ante el tribunal de Osiris, allí era contrapesado con una pluma de Maat, justo un símbolo de verdad y justicia universal.

Mireya Vanegas Wesoloski

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Mireya Vanegas Wesoloski (1918-1947)

Mireya Vanegas Wesoloski nació en Caracas el 21 de agosto de 1918, siendo su madre la destacada maestra Rosa Wesoloski de Vanegas.

Hacía parte de una familia de educadores ya que tanto su madre como sus hermanos -Horacio y Gladys- también abrazaron el magisterio.

En la página web del Instituto Escuela se señala que ella "se tituló maestra de aula y de kindergarten, obtuvo el diplomado de metodología del lenguaje del magisterio primario para luego adaptarlo a la enseñanza especial de ciegos y sordo-mudos."

Realizó estudios superiores en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN) [actual Instituto Pedagógico de Caracas]. Allí obtuvo los títulos de Profesor de Educación Secundaria y Normal, tanto en Física como en Matemática y fue integrante de la primera promoción egresada de esa casa de estudios.

Trabajó en varias instituciones educativas de Caracas: en el Instituto Escuela, desde el año 1944 hasta 1947 y en el liceo Luis Razetti, desde los inicios de este último plantel en el mes de octubre de 1946. Pasó a ser nombrada subdirectora del mismo el 22 de enero de 1947, cargo que ocupó hasta su prematura muerte. A Mireya Vanegas se le debe el diseño del primer uniforme que lucieron las alumnas del liceo Luis Razetti.

Es de destacar que con motivo de celebrarse el décimo aniversario del Instituto Pedagógico, Mireya pronuncia en el auditorio de esta casa de estudios un sentido y emotivo discurso lleno de matices poéticos.

Nuestra biografiada produce una de las primeras investigaciones realizadas en nuestro país sobre la enseñanza de la Física, la cual lleva por título "La enseñanza de la Física en las escuelas normales" (1947).

La profesora Vanegas fallece trágicamente, cuando contaba apenas con 29 años de edad, el 8 de abril de 1947, al retornar a Caracas desde la ciudad de Cumaná. El avión que la transportaba junto con un grupo de alumnos y de colegas, que habían viajado para un intercambio deportivo, se estrelló en el cerro Las Pavas, en la jurisdicción de Araira (estado Miranda).

El aparato en que viajaban era un avión Douglas C47 siglas YV-C-ALO acondicionado para el transporte de carne, pero, en lugar de carga, llevaba personas, de los cuales algunas eran venezolanas. En este accidente, perdieron la vida todos los pasajeros, así como sus tres tripulantes.

La aeronave empleada para el traslado de esta delegación no era apta para el transporte de pasajeros y sin embargo se empleó para tal fin de manera irresponsable.

Hecho similar se repitió el 3 de septiembre de 1976, cuando un Hércules C-130 de la Fuerza Aérea Venezolana (avión de carga) se estrella en las islas Azores y mueren los integrantes del orfeón universitario de la UCV, junto con su director, el maestro Vinicio Adames.

En el accidente aéreo de Las Pavas muere también su hermana menor, Gladys, quien era maestra normalista.

A pesar de su corta vida, esta educadora realizó una encomiable labor en los cargos que le tocó ejercer y, en su honor, un plantel de Caracas lleva su nombre.

8 DERECHO A UNA VIVIENDA

Rectas, segmentos y polígonos. Círculo y circunferencia

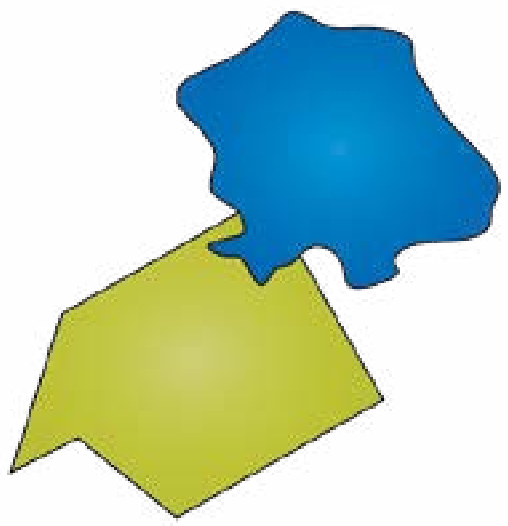
Terrenos para viviendas

Los planes de inversión, que se han orientado en el país para el desarrollo de las comunidades con carencias de viviendas, reclaman la participación de las mismas, en forma organizada, para garantizar que estos planes se cumplan. De esta manera, los Consejos Comunales y los Comités de Tierras pueden constituirse en garantes de los principios de la Constitución de la Republica Bolivariana de Venezuela y procurar el beneficio de todas y todos los venezolanos.

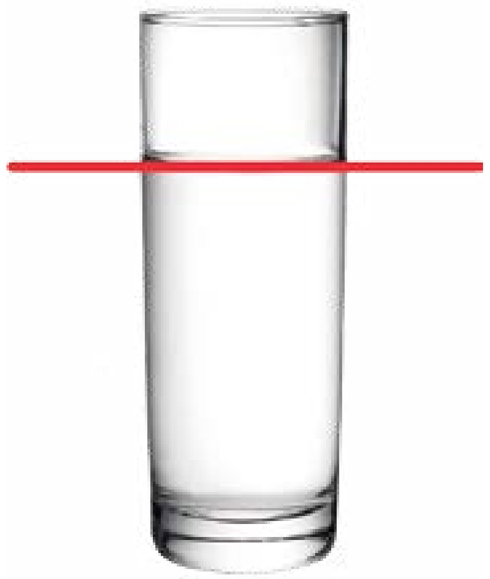
Los terrenos subutilizados, baldíos u ociosos son contrarios a este principio. El Consejo Comunal Batalla de Carabobo ha ubicado un terreno con características adecuadas para ser utilizado con fines habitacionales, y se quiere delimitar para presentar el proyecto al Estado venezolano con el fin de que pueda ser desarrollado.

Líneas y segmentos

En la comunidad Batalla de Carabobo, se ha conformado un comité de Tierras Urbanas y se ha formado una Brigada de Construcción de Viviendas para apoyar la Gran Misión Vivienda Venezuela. Se debe entregar el plano del terreno en donde van a construirse las viviendas de la comunidad, describiendo sus **linderos** o **límites** y así facilitar el trabajo de inspección por parte de los organismos que otorgan los recursos para este fin. A través del Satélite Simón Bolívar, que tiene Venezuela en el espacio desde el 29 de octubre del año 2008, se ha obtenido una imagen con escala $1\ cm$: $1\ km$ (un centímetro del plano representa el equivalente a un kilómetro en la vida real), a partir de la cual se deben indicar las medidas aproximadas de los límites o linderos del terreno, es decir, del perímetro a considerar para la construcción. En el mapa observamos la zona baldía (en color verde) y un lago cercano que ocupa parte del terreno.



Los miembros de la comunidad fueron delineando sobre la imagen los límites aproximados del terreno. Trazaron primero las líneas **horizontales**, éstas son las líneas que coinciden con el horizonte. ¿Cómo es eso?



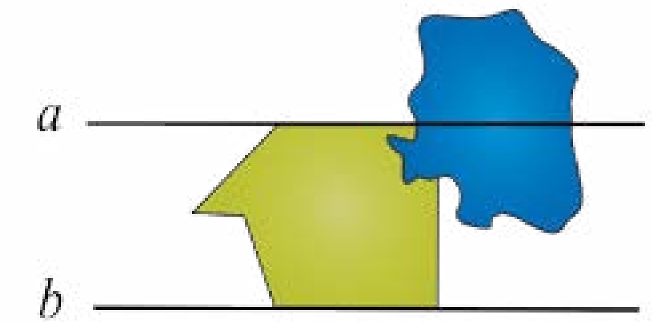
Fíjense, si tienen un vaso de vidrio con agua o cualquier otro líquido en reposo y nos colocamos a su altura, la línea que observan en la parte superior del líquido con el vaso, es una línea horizontal.

¿Qué otros ejemplos conocemos de línea horizontal?

En el plano obtenido para planificar la construcción de viviendas, marcaremos los puntos donde se cortan las rectas que delinean el terreno. Empezando tenemos en el mapa dos líneas horizontales que fueron denotadas con las letras minúsculas a y b. No quedan exactamente por el lindero, pero son una buena aproximación y serán las que se utilizarán para presentarlo en el informe final del plano, para la construcción de las viviendas.

Además, hay un lago cerca del terreno que cuando se realice el estudio del suelo para la construcción de las casas, tendrá que tener un margen de protección para conservarlo y prever que, si el mismo crece, no afecte a los habitantes de la zona.

Dibujadas las líneas horizontales, trazaremos algunas líneas **perpendiculares** y algunas líneas **oblicuas**.



Notación de las líneas perpendiculares, horizontales y oblicuas

Vamos a ponernos de acuerdo en la notación que utilizaremos para poder tener una mejor comunicación. Utilizaremos letras minúsculas para denotar las líneas, como ya lo hemos hecho con las líneas horizontales. En donde se intersecan dos líneas, lo denotaremos con una letra mayúscula. Estas letras mayúsculas las utilizaremos para indicar los puntos, como se muestra en la *figura 1*. Allí están marcadas dos rectas.

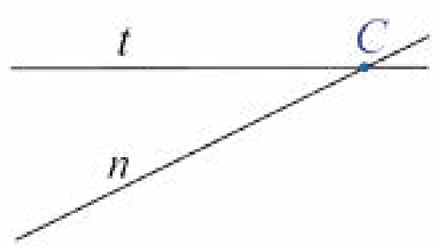


Figura 1

La recta horizontal t y la recta oblicua n. Estas dos rectas se intersecan o cortan en un punto y lo hemos marcado con la letra C.

Una recta se dice que es **perpendicular** a otra cuando en su intersección forman un ángulo recto o de medida igual a 90º (noventa grados). Observen la *figura 2*. Estas líneas son perpendiculares porque en el punto C, donde se cortan o intersectan forman un ángulo recto o de 90 grados. Si colocan la esquina de una hoja blanca en el punto C y sus bordes sobre las rectas v y p, podremos ver que forman un ángulo recto.

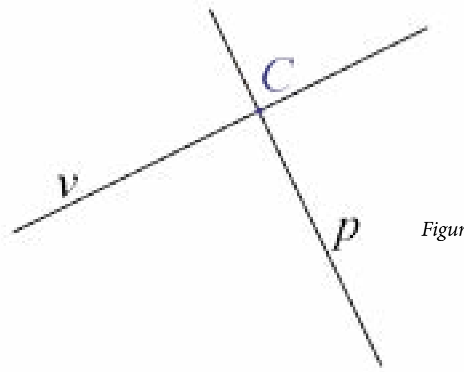


Figura 2

Cuando las rectas no se cortan decimos que son rectas paralelas, como cuando vemos las aceras de una calle que es recta. Éstas no se cortan. En la *figura 3* se muestran dos rectas **paralelas**.

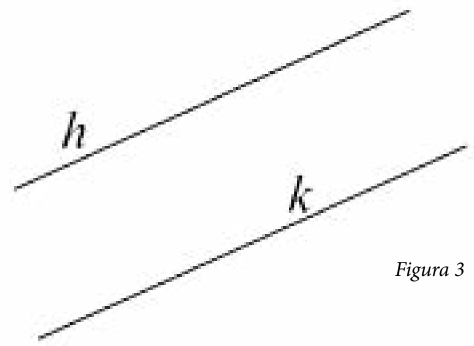


Figura 3

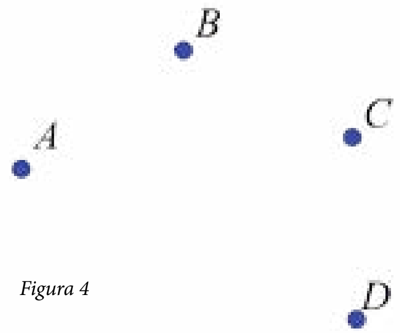


Figura 4

Conversen con sus compañeras y compañeros en relación con la siguiente pregunta: según lo estudiado, ¿cuándo podemos decir que una recta l es oblicua?

Tenemos otra curiosidad. Miren el gráfico de puntos que hemos colocado en la *figura 4*. En él están marcados varios puntos. ¿Cuántas rectas puedes trazar que pasen por los puntos A y B? ¿Y cuántas que pasen por los puntos A y C? Ahora, si te dijéramos que traces todas las rectas que puedan pasar por el punto D, ¿cuántas trazarías? ¿Cuántos puntos hacen falta para determinar una y solo una recta?

Por dos puntos, como el A y el B de la *figura 4*, sólo se puede trazar una recta que los contenga a los dos. Lo mismo ocurre con los puntos B y C. Sólo puede trazarse una recta. Por eso decimos que una recta está determinada sólo por dos puntos, lo que quiere decir que basta tener dos puntos para trazarla. Como han podido comprobar, por un punto pasan infinitas rectas.

Formalizando el informe

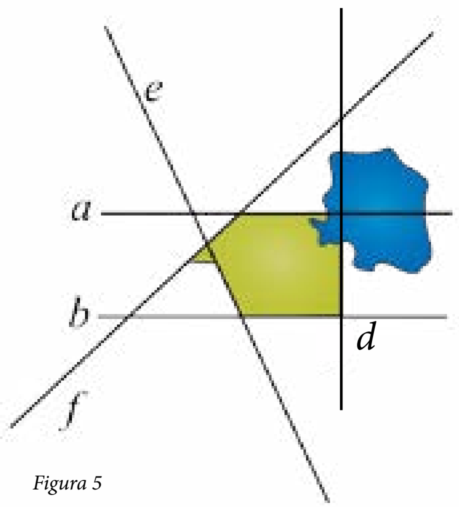


Figura 5

Los miembros del comité para continuar en su labor y con el conocimiento que hemos repasado relacionado con las líneas rectas, marcaron las otras líneas. La recta d perpendicular a la recta b y las oblicuas e y f. (*Figura 5*)

Para indicar esto en el informe, utilizaron la siguiente notación: si dos rectas son perpendiculares se escribe el símbolo $\perp$ entre las letras que representan ambas líneas para indicarlo. Ejemplo: $\mathbf{b \perp d}$, lo que puede leerse como: *"b y d son perpendiculares" o "b es perpendicular a d"*. También, "d es perpendicular a b".

Veamos el caso de las rectas paralelas. Si observas las rectas a y b, aunque las prolonguemos por todo el croquis, nunca se cortarán, es decir, mantienen la distancia de separación. A estas líneas las denominamos **paralelas**. Entonces podemos escribir "$a \parallel b$" y se lee "***a*** es **paralela** a ***b***", o "***b*** es paralela a ***a***" o "***a*** y ***b*** son **paralelas**". También se dice que una recta es paralela con ella misma.

Edificio ubicado en esquina
Plaza España, Caracas
Rectas paralelas

Semirrectas y no rectas

En la cotidianidad frecuentemente utilizamos la geometría de manera intuitiva. Cuando nos encontramos en medio de la acera de una calle, decimos que esta tiene dos sentidos: el que va hacia nuestra izquierda y el que va en sentido opuesto, a la derecha. O el que sube y el que baja. En este caso nosotros somos el punto, la referencia.

¿Cómo matematizamos esta situación?

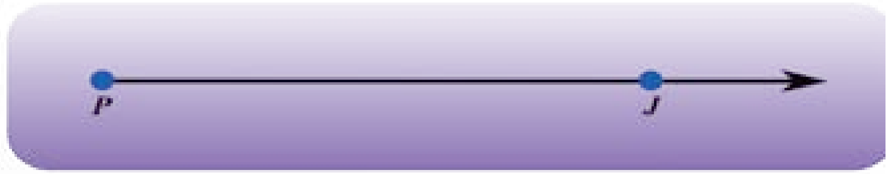
Una línea recta puede representar la calle y nosotros, estaríamos representados por un punto sobre ella. Llamemos a este punto P. Necesitamos otro punto de referencia para determinar la calle, podría ser la tienda de la Sra. Luisa. En la recta, esto estaría representado por el punto J. Ahora la calle, es decir la recta del gráfico, está totalmente determinada.

Esta recta pasa por P y por J. Para denotarla colocamos una doble flecha sobre los dos puntos que la determinan, como se muestra a continuación:

$\overleftrightarrow{PJ}$ que se lee: recta que pasa por los puntos P y J.

Si consideramos nuestra posición como punto de partida sobre la calle, ésta queda dividida en dos, en el sentido que va hacia la tienda de la Sra. Luisa y el sentido opuesto. Cada una de estas partes la denominamos semirrecta de origen P, que es el punto que la divide.

Así, la parte de la recta que tiene por origen el punto P y pasa por J la denominamos semirrecta $\overrightarrow{PJ}$.



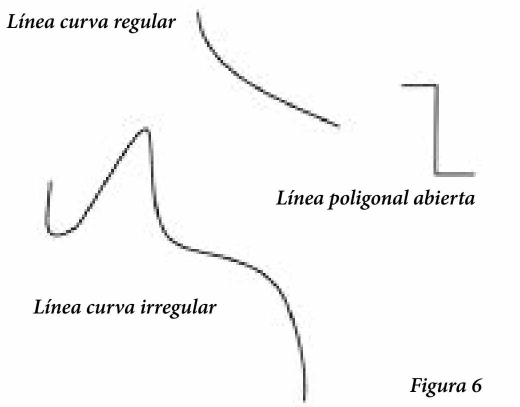


Figura 6

Observen que cuando se utilizan dos letras de una semirrecta para denotarla, se le coloca encima una flecha indicando primero el punto de origen y luego el punto por donde pasa. No son las rectas y las semirrectas los únicos tipos de líneas que hay. De hecho, hay muchísimos tipos de líneas que pueden ser diferentes a éstas como las que se muestran en la *figura 6.*

Puente Orinoquia
Edo. Bolívar

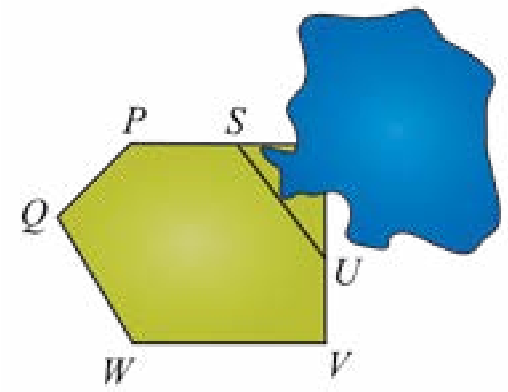
Realicemos la siguiente actividad

Completen en la siguiente tabla, en sus cuadernos, las características de cada una de las líneas, que se les indican y que utilizamos en geometría.

Tipo de línea	Características
Horizontales	
Paralelas	No se intersecan
Oblicuas	
Perpendiculares	
Curvas	No son horizontales, no son verticales, no son poligonales, no son oblicuas

Segmentos y polígonos

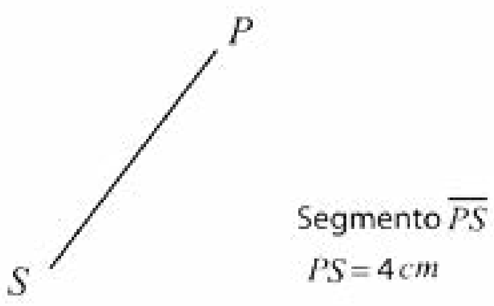
Para finalizar la delimitación de la superficie a reportar a los miembros de la comunidad borraron todos los pedazos sobrantes quedando sólo marcados las partes de las rectas entre dos puntos. Estos pedazos de rectas son denominados segmentos.



Un segmento es una parte de una línea recta que está comprendido entre dos puntos, incluyendo dichos puntos. Los dos puntos se denominan extremos del segmento.

Al igual que las rectas, es necesario ponernos de acuerdo con la notación de los segmentos. Si queremos denotar un segmento cuyos extremos son los puntos P y S, como se muestra en la *figura 7*, le colocamos una raya arriba de las dos letras como se muestra a continuación: $\overline{PS}$, y lo leemos "**segmento de extremos *P* y *S***" o "**segmento**" $\overline{PS}$ y cuando queremos referirnos a la longitud del segmento, podemos indicarlo escribiendo solamente sus letras, una al lado de otra, o utilizando, la abreviación de medida, **med** y luego las letras entre paréntesis como se muestra a continuación:

Figura 7

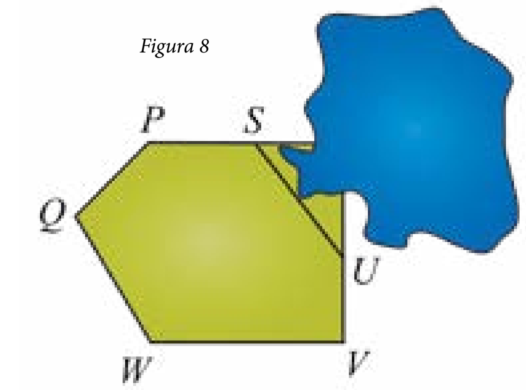


PS=4 cm o med (PS)= 4 cm, que es como lo tenemos en el plano según la escala.

La diferencia es que cuando hablamos de medida del segmento no se coloca la rayita arriba.

Estas letras escritas así indican que es la medida de una magnitud, en este caso la longitud. Si tiene la rayita arriba se está hablando de un objeto geométrico.

Figura 8



En el croquis que estamos trabajando en la *figura 8*, para el proyecto en elaboración, se puede observar que se han marcado los siguientes segmentos: $\overline{PS}$, $\overline{SU}$, $\overline{UV}$, $\overline{VW}$, $\overline{WQ}$ y $\overline{QP}$.

¿Cuántos segmentos hay? ¿Qué figura les recuerda la que quedó delimitada en el croquis con los puntos que están marcados?

Seguramente dijeron que un hexágono, porque es un polígono que tiene seis lados y seis ángulos.

Polígonos

¿Qué cosas podemos construir con los segmentos?

Observen, de la demarcación del terreno hemos obtenido un polígono.

Los polígonos son figuras planas (tienen dos dimensiones: largo y ancho) formadas por la unión de segmentos no alineados, que se intersecan sólo en sus puntos extremos. Cuando se forma un polígono, automáticamente en la unión de cada par de segmentos se forma un ángulo. Por eso un polígono tiene tantos ángulos como lados tenga. La palabra polígono significa (poli) muchos (gonos) ángulos. Los segmentos que forman el polígono reciben el nombre de lados (*Figura 9*).

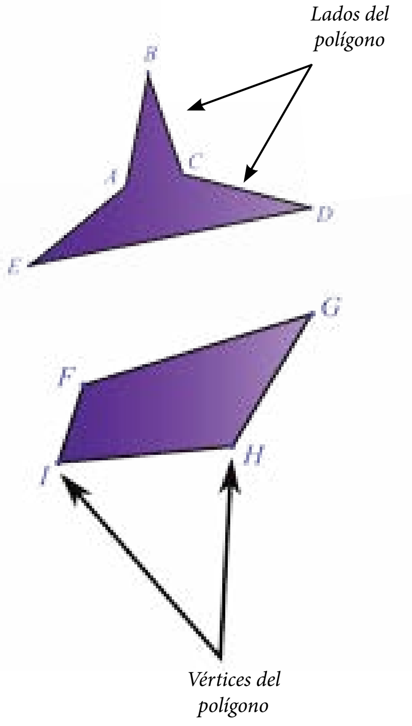


Figura 9

Investigando los nombres de los polígonos

¿Cuál es el polígono de menor número de lados que se puede trazar? ¿Cómo se llama el polígono que tiene cuatro lados? ¿Y el de cinco lados?

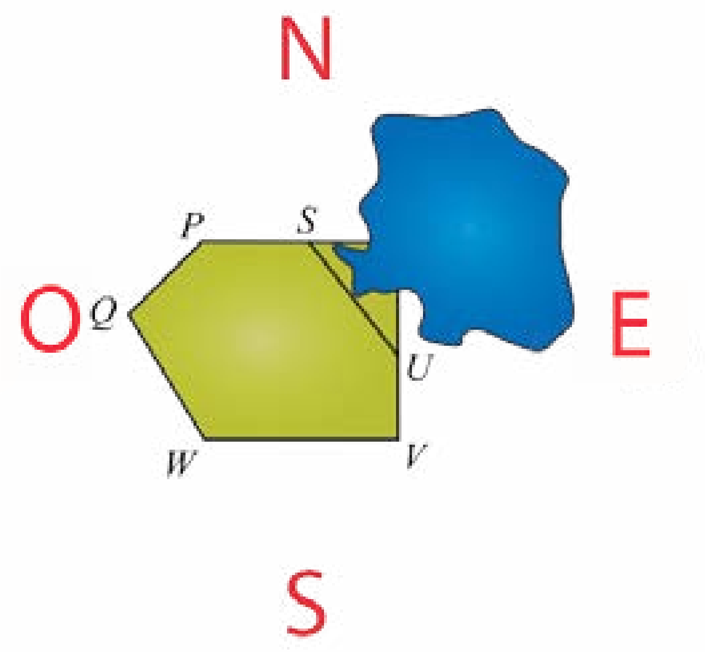
Según el número de ángulos internos o de lados, los polígonos reciben un nombre que atiende a la clasificación por esos criterios. Todo está en conocer los prefijos que nos indican a cuántos ángulos o lados se refiere. Así, *tri* nos indica tres, por eso denominamos al polígono de tres ángulos y tres lados, triángulo. *Cuadri*, se refiere a cuatro, *penta* nos indica cinco, *hexa* (seis), *hepta* (siete), *octo* (ocho),y así sucesivamente. Completen la tabla que se presenta a continuación:

Número de lados	Prefijo	Nombre del polígono	Número de lados	Prefijos	Nombre del polígono
3	Tri	Triángulo	7	Hepta	
4	Cuadri	Cuadrilátero	8	Octa	Octágono
5	Penta	Pentágono	9	Enea	
6	Hexa		10	Deca	

¿Hasta dónde se puede construir?

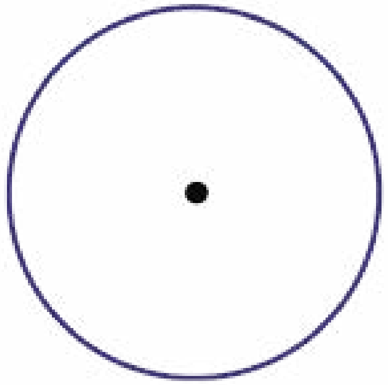
Hay una situación problemática que tiene que ver con la irregularidad del terreno que los miembros de la brigada están delimitando. Por estar cerca del lago, hay que mantener una zona de protección del mismo y de sus habitantes en la zona Norte-Este (Noreste).

Las viviendas a construir tienen que hacerse de tal manera que cuando el lago pase su borde, en período de lluvia, no afecte las casas por la porosidad y humedad del terreno. Adicionalmente, debe haber un margen, de protección de la fauna y vegetación del lago para evitar su contaminación y lograr su aprovechamiento para la siembra de árboles.



Con la ayuda de agricultores de la zona, se determinó que lo más conveniente era trazar una línea curva que simulara un arco de circunferencia al borde del lago y a partir de allí establecer la zona de protección. Lo más cercano, entonces, para proteger el lago y cuidar el ambiente, será demarcar un **arco de circunferencia** adecuado, que pase por los puntos S y U y otro punto adicional T en el terreno que habrá que determinar.

Círculo, circunferencia y sus elementos



Recordemos que una circunferencia es una línea curva, plana y cerrada donde todos los puntos de la curva son equidistantes de otro que llamaremos centro. Los bordes de las monedas y los bordes de los discos dan idea de circunferencia.

Un arco de circunferencia es la parte de la circunferencia que está comprendida entre dos puntos de la misma incluyendo a éstos. Observa la *figura 10*. Allí hemos marcado dos arcos de circunferencia. ¿Cómo haríamos, si no tuviésemos los colores, para diferenciar un arco de otro? Si colocamos en la circunferencia los puntos M y N, se determinan dos arcos $\widehat{MN}$ y $\widehat{M'N'}$.

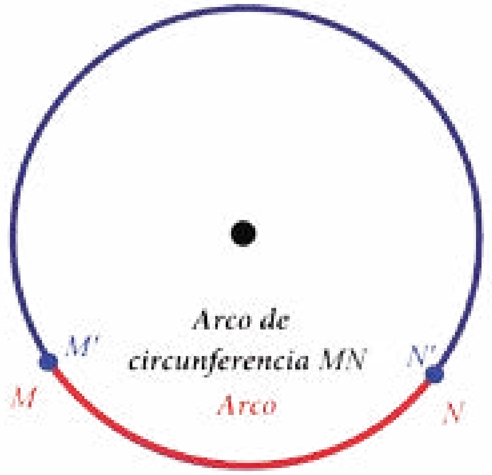


Figura 10

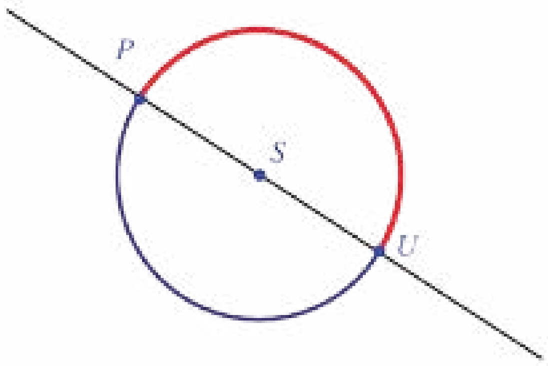


Figura 11: Media circunferencia

Ahora, si estos puntos determinan dos pedazos de la circunferencia con igual medida ¿qué nombre creen que llevarán los arcos? (*Figura 11*)

Podemos también considerar segmentos que tengan dos puntos sobre la circunferencia. A éstos los denominamos cuerdas.

Observen la *figura 12*, allí están marcadas dos cuerdas. ¿Qué nombre recibe la cuerda que pasa por el centro B de la circunferencia que denotamos con las letras $\overline{CD}$?

Seguros estamos de que respondieron que su nombre es el **diámetro**. Además no olvidaron que mide dos radios.

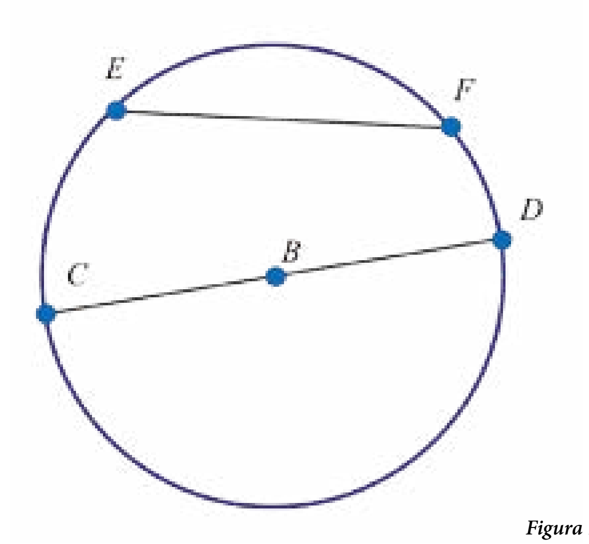
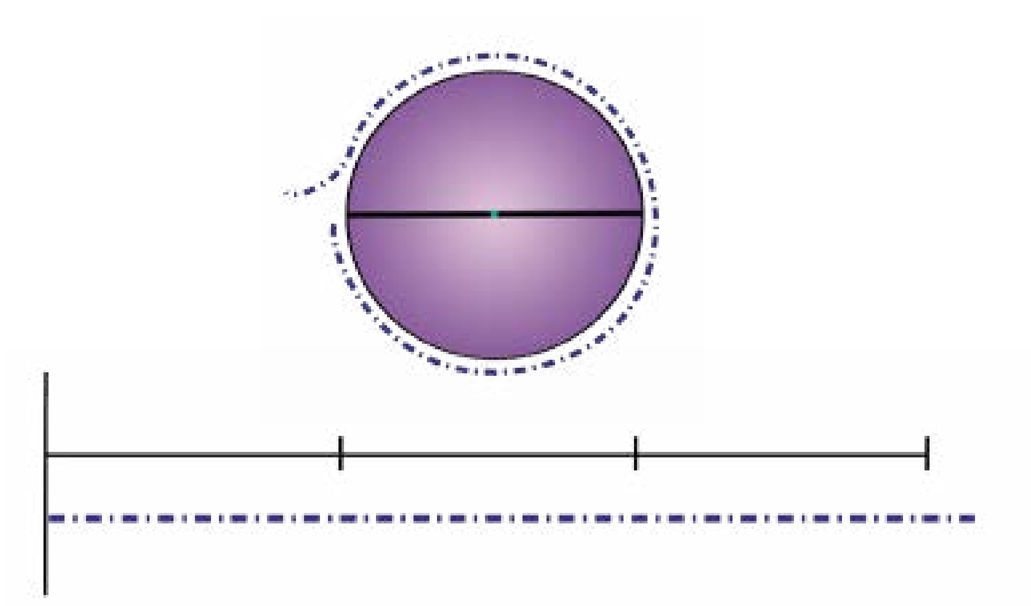


Figura 12

nvestiguemos

¿Cuántas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia? ¿Qué quiere decir esto? Si no pudiéramos cortar la circunferencia y estirarla y tomar el diámetro y colocarlo encima de la misma, ¿cuántas veces podríamos hacerlo?



Pareciera que en la longitud de la circunferencia caben tres diámetros y un poco más.

Realicemos la siguiente actividad

- Consigan un grupo de tapas o envases que tengan un borde circular.
- Dibújenlas sobre una hoja de papel y recórtenlas.
- Doblen la figura que obtuvieron por la mitad.
- Desdoblen y marquen el segmento que quedó destacado al realizar el doblez. Eso representaría el diámetro de la circunferencia.
- Alrededor de la misma tapa coloquen un trozo de pabilo, de manera que puedan tomar su medida.
- Estírenlo sobre la hoja y mídanlo con una regla. Eso representaría la longitud de la circunferencia.
- Tomen la medida del diámetro que determinaron en la circunferencia que dibujaron en la hoja de papel.
- Utilizando una calculadora, dividan la longitud de la circunferencia entre la longitud del diámetro.
- Dibujen, en sus cuadernos, la tabla que mostramos.
- Registren el valor obtenido considerando el mayor número de decimales que puedan.
- Repitan esta actividad con varias tapas.

Tapa	Longitud del diámetro	Longitud de la circunferencia	(Circunferencia / diámetro)
Tapa 1			
Tapa 2			
Tapa 3			

Socialicen con sus compañeras, compañeros y profesora o profesor, los resultados obtenidos.

¿Cómo son todos los resultados? ¿Pueden establecer alguna relación entre la longitud de las circunferencias trabajadas, la medida de sus diámetros y los resultados obtenidos?

Lo que hemos querido con esta actividad es guiarlos a que ustedes mismos obtengan una aproximación de un número que denominamos π (pi).

π es un número que tiene infinitos decimales. Se han calculado más de cinco billones de decimales, pero a nosotros nos bastará con unos cuantos para nuestros cálculos. Una aproximación de π que es la siguiente:

3,1415965358979324

Para nuestros cálculos bastará que utilicemos hasta las primeras cuatro cifras decimales, una aproximación con cuatro decimales. Es decir, que hagamos un redondeo hasta las diez milésimas.

¿Cómo tomamos esa aproximación?

Pues, como la queremos con cuatro decimales, tenemos que evaluar los decimales que están hasta las cien milésimas, el quinto de ellos. Recordemos, si esta cifra es mayor o igual que cinco, aumentamos en uno el valor del suborden decimal anterior y lo denominamos aproximación por exceso, y si es menor que cinco, lo dejamos igual y es una aproximación por defecto. Ayúdanos a calcular este valor.

¿Cuál es el valor de las cien milésimas? (el quinto de los decimales).

Como es mayor que cinco, ¿en cuánto nos quedará el dígito de las diez milésimas, si debemos aumentarlo en uno?

El número obtenido es una aproximación por exceso de π. Seguro te quedó:

$\pi \approx$ **3,1416**, que será el valor que utilizaremos para nuestros cálculos.

Observemos que hemos utilizado el símbolo $\approx$ para indicar que es una aproximación al valor exacto de π.

Este valor es el resultado de dividir la longitud de la circunferencia entre la longitud del diámetro. Esto nos conduce a la siguiente relación matemática:

$$\boxed{\pi = \frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diámetro}}$$

Si utilizamos ℓ para indicar la longitud de la circunferencia y d para indicar la longitud del diámetro, tendríamos la siguiente fórmula.

$\pi = \frac{\ell}{d}$ Como sabemos que la longitud del diámetro es equivalente a la longitud de dos veces el radio, es decir $d = 2r$, donde r es la longitud del radio, podemos también escribir: $\pi = \frac{\ell}{2r}$.

Si deseamos calcular la longitud de la circunferencia, debemos despejar ℓ de la fórmula:

¿Cómo podemos hacerlo?

$\pi = \frac{\ell}{2r} \Rightarrow \pi \cdot 2r = \frac{\ell}{2r} \cdot 2r$ — Al multiplicar por $2r$ ambos miembros de la igualdad

$\pi \cdot 2r = \ell \cdot 1$ — Simplificando

$2 \cdot \pi \cdot r = \ell$ — Por ser 1 el elemento neutro de la multiplicación

Conversemos

David comentaba: "La circunferencia y el círculo siempre andan juntos."

Claro, cada vez que tenemos una circunferencia, ésta demarca tres partes de un plano: su interior, su exterior y ella misma.

¡Ah! "Y un círculo es una figura plana formada por una circunferencia y los puntos interiores a ésta. Por eso siempre andan juntos".

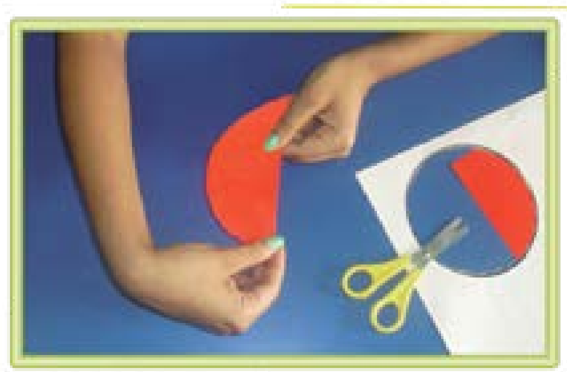
A proteger el lago

Recuerden que tenemos que proteger el lago que está en el terreno donde se van a construir las casas. Nos hace falta encontrar el centro de la círcunferencia para determinar el arco de circunferencia que delimitará hasta dónde se puede construir:

Actividades

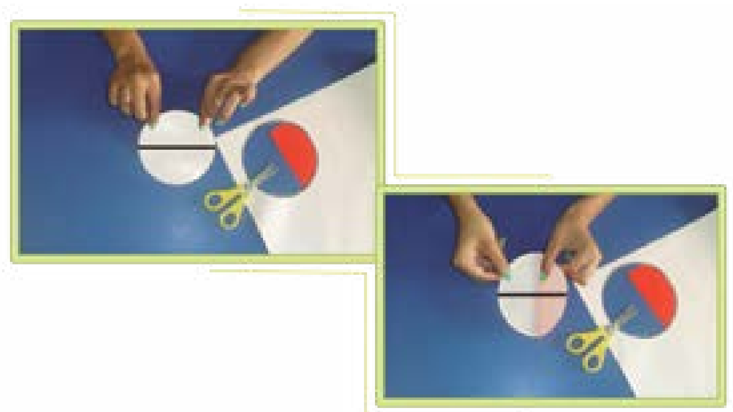
En búsqueda del centro de una circunferencia

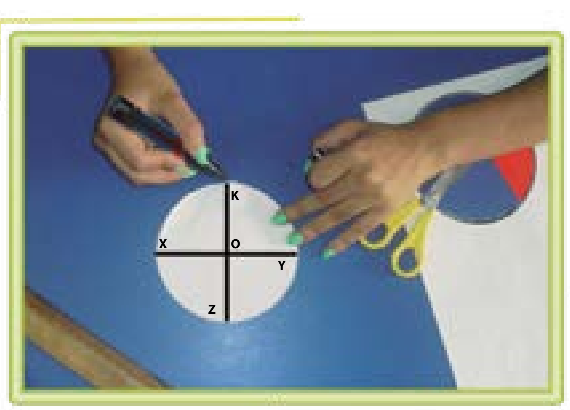
Sobre una hoja de papel que podamos recortar (puede ser reusable), dibujemos el borde de un objeto que tenga forma circular. Podemos utilizar el borde de una tapa o de un pote, como se muestra en la figura. Recortemos la figura que tiene forma circular.



Doblen por la mitad el círculo dibujado en el papel, haciendo coincidir los bordes de la circunferencia.

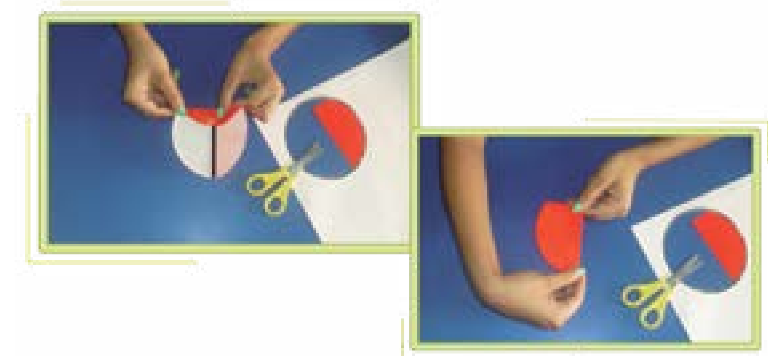
Doblen nuevamente el dibujo en el papel, haciendo coincidir esta vez los extremos del doblez anterior.





Abran el papel que contiene el dibujo y tracen las líneas marcadas con los dobleces. El punto de corte de ambas líneas será el centro de la circunferencia. Mide ambas líneas llamadas cuerdas ($\overline{xy}$, $\overline{zk}$). Recuerda que una cuerda, en la circunferencia, es un segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia.

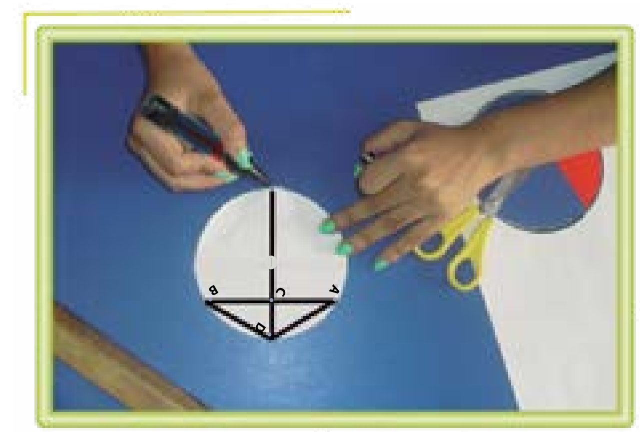
Trazando una cuerda y su mediatriz



Dibujen y recorten otra figura con forma circular como la anterior. Realicemos un pequeño doblez en cualquier de sus partes.

Hagamos coincidir los extremos o dos puntos de la circunferencia que este doblez determina.

Desdoblemos y marquemos los puntos que quedan de las intersecciones de cada doblez realizado como se observa a continuación:



Observemos, del primer doblez quedaron marcados dos puntos, que podemos denominarlos A y B. Del segundo doblez, quedaron marcados el punto C que es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, y el punto D, que también es un punto de la circunferencia que representa el borde de la cartulina recortada. Tracen con un lápiz y una regla los dobleces. ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle ADB$? ¿Por qué? La línea que pasa por $\overleftrightarrow{CD}$ se denomina mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y tiene la propiedad de ser perpendicular a éste. Es decir $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$. Por tanto, forman ángulos rectos en el punto C.

Midan las cuerdas $\overline{BD}$, $\overline{DA}$ y $\overline{BA}$ y comparen los resultados con los obtenidos al medir las cuerdas $\overline{XY}$ y $\overline{KZ}$. ¿Qué observan? ¿Cuál es la cuerda de mayor longitud entre las trazadas? ¿Sabes qué características tiene esa cuerda? ¿Qué relación existirá entre esa cuerda y el radio de la circunferencia?

El diámetro es la cuerda de mayor longitud y pasa por el centro de la circunferencia.

Observemos que los segmentos $\overline{XY}$ y $\overline{ZK}$ que representan las cuerdas más largas que hemos trazado se cortan en un punto. Ese punto es el centro de la circunferencia representada por el borde. Denótenlo con la letra O.

Y de verdad, ¿éste es el centro de la circunferencia? ¿Por qué?

Cuando doblamos la cartulina que hemos recortado, ¿no nos queda como una media luna? Observa que al unir los puntos A y B, queda también marcada la mitad del $\overset{\frown}{AB}$ y lo mismo sucede con el EF. Y para hacerlo, hemos doblado por la mitad la hoja recortada.

Vamos a comprobarlo con otros dobleces.

Doblemos por la mitad la cartulina recortada y marquemos los puntos extremos, que quedan al desdoblarla con las letras J y K.

¿Pasan por el punto O? Toma la medida que hay desde el punto O hasta el punto J y luego la medida desde el punto O hasta el punto K. Hagamos lo mismo con los puntos L y M. Anotemos las medidas en la tabla siguiente.

Comprobando las medidas de los radios		
Medidas	Medidas	¿Están los puntos ubicados a igual distancia del punto O? (Responde Sí o No)
$OJ=$	$OK=$	
$OL=$	$OM=$	

Hagamos la prueba con otro par de puntos L y M. Registremos en la tabla y revisemos el concepto de circunferencia. ¿Qué pueden concluir? ¿El punto O representa el centro de una circunferencia?

¿Y ahora?

Con este conocimiento, los miembros del comité resolvieron el problema de determinar la zona de protección del lago. Había que determinar el arco de una circunferencia que pasara por los puntos S, T y U.

Primero tracemos los segmentos $\overline{ST}$ y $\overline{TU}$. Estos segmentos representan los que se marcan en las actividades anteriores. Considerando su punto medio, como no podemos doblar el mapa, trazamos dos líneas perpendiculares en el punto medio de esos segmentos. Es decir, trazamos sus Mediatrices (*figura 13*).

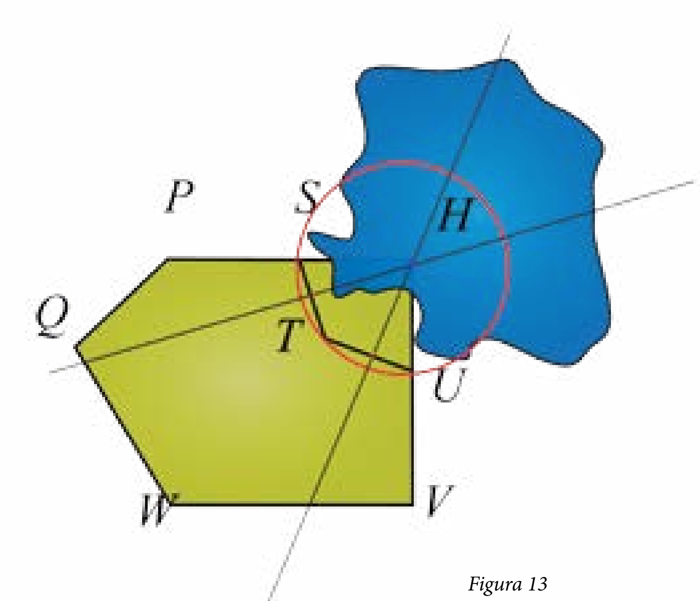


Figura 13

Como en la actividad de "corte y doblado", las líneas se cortan en el punto O y ése es el centro de la circunferencia, según lo que hemos estudiado. Al trazar la circunferencia que determinan los puntos S, T y U, se puede marcar el arco de circunferencia de protección necesario para completar el croquis del mapa a entregar. Con esto queda resuelta la tarea que tenían los miembros del comité.

Conversemos

1. La cuerda l se enrolla en los n círculos, según la *figura 14*:


Figura 14

2. ¿Cuál es la longitud de la cuerda l?

Los cuadrados de la *figura 15* están formados por la intersección del segmento AB, que mide 24 cm, por la línea quebrada $AA_1A_2:::A_{12}B$. Podrías indicarnos cuál es la longitud $AA_1A_2:::A_{12}B$.

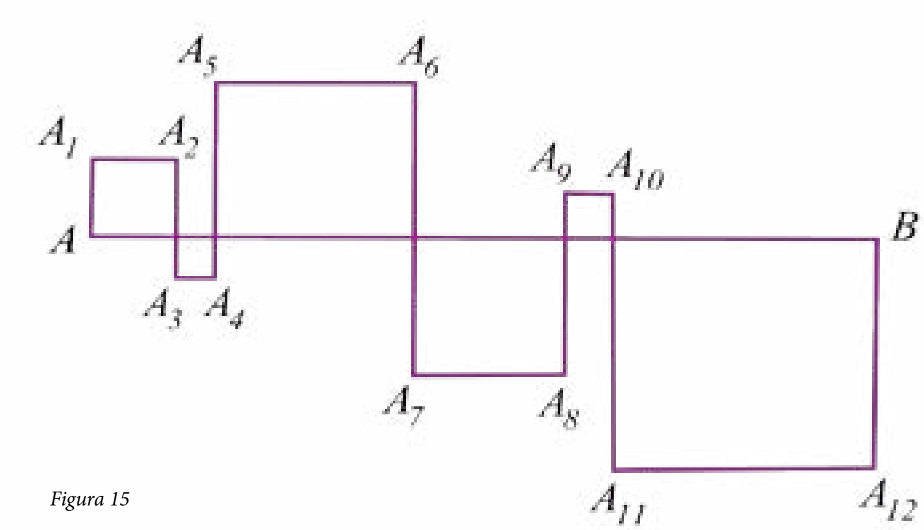
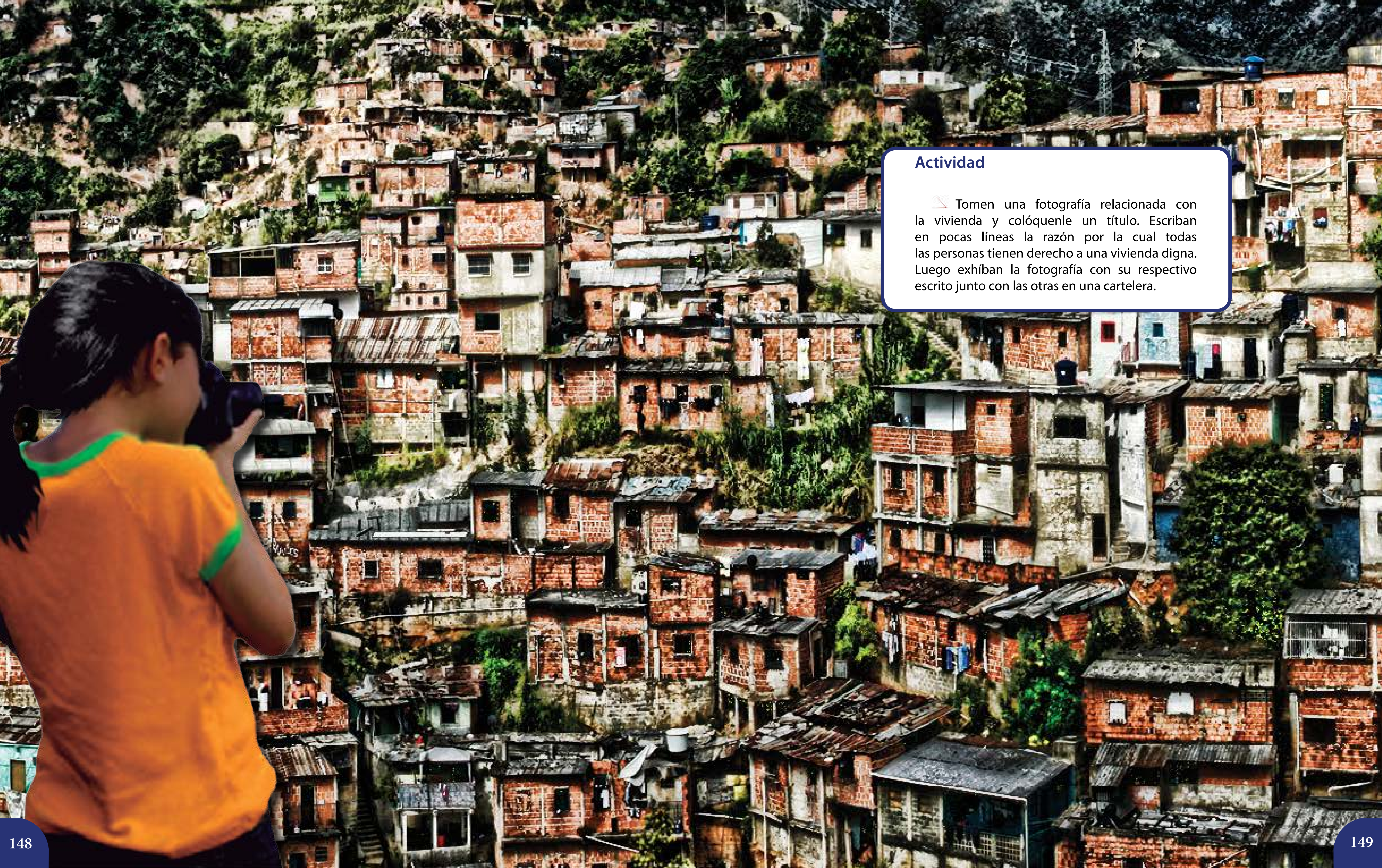


Figura 15



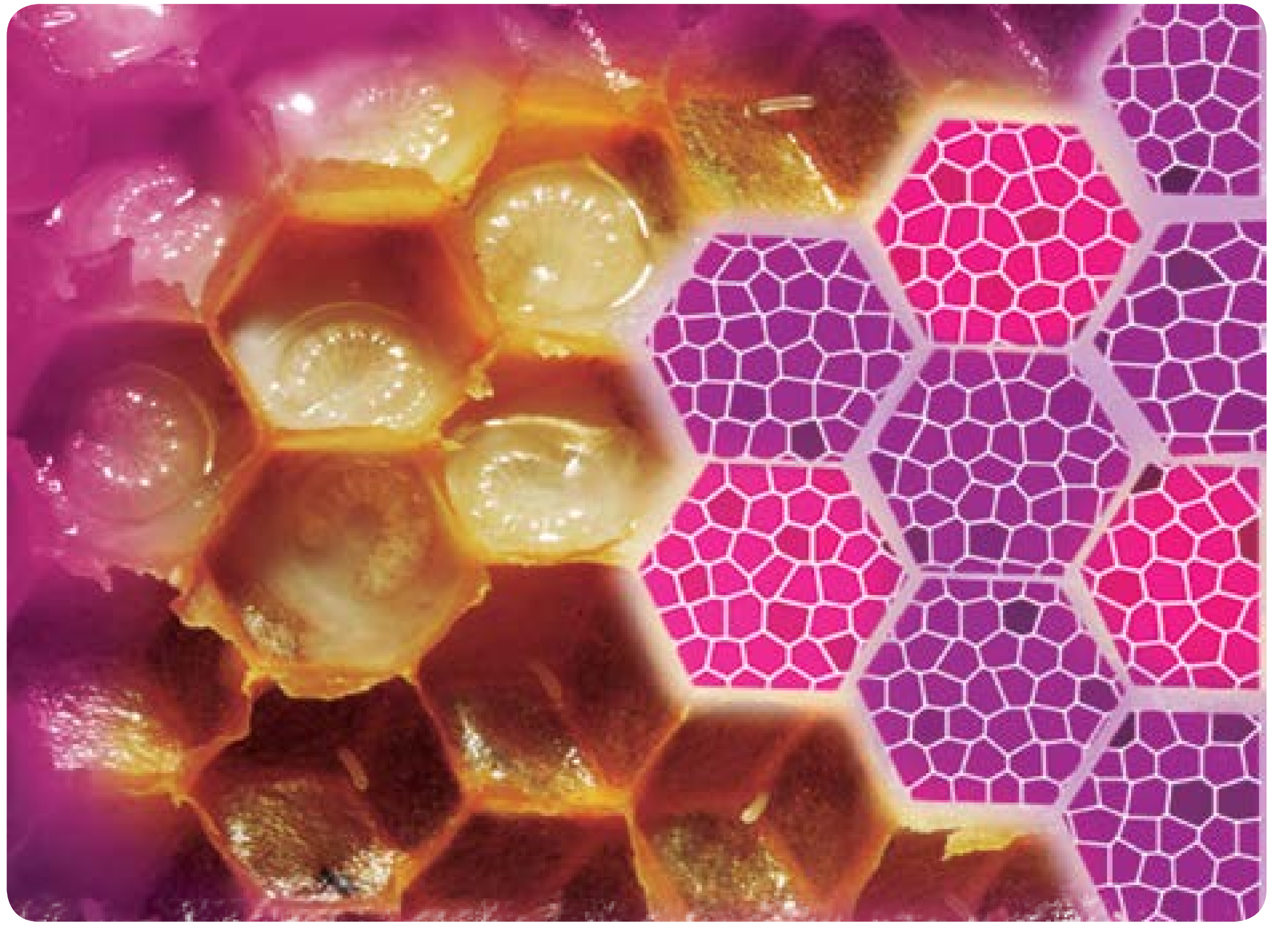
Actividad

Tomen una fotografía relacionada con la vivienda y colóquenle un título. Escriban en pocas líneas la razón por la cual todas las personas tienen derecho a una vivienda digna. Luego exhíban la fotografía con su respectivo escrito junto con las otras en una cartelera.

9

EL PANAL DE ABEJAS

Polígonos



Las abejas y la geometría

Dos cosas muy importantes podemos aprender de las abejas: pasan por un proceso de organización y trabajan con base en las necesidades de toda la población de la colmena. Estas dos premisas fundamentales son las que mantienen el equilibrio en una colmena de abejas.

Las abejas parecen compartir el "conocimiento" para poder mantener el equilibrio de la colmena. Lo hacen a través del intercambio de alimentos y haciendo circular la jalea real, que es la que produce la abeja reina.

¿Qué conceptos matemáticos consideran que están presentes en las construcciones que realizan las abejas? Vamos a reunirnos en equipo para completar la siguiente tabla: observemos la gráfica que se muestra en la foto del panal y escriban en sus cuadernos, en la siguiente tabla, los conceptos matemáticos, que se relacionan con la construcción de un panal.

Las abejas y la matemática	
¿Qué forma tienen las celdas en donde almacenan miel las abejas?	
¿Qué forma tiene la parte superior de cada celda?	

Vamos a comparar las respuestas que dieron a la primera, esperábamos que dijeran que tenía forma de prisma, o mejor aún, un prisma hexagonal.

¿Y qué es un prisma?

Un prisma es un sólido o cuerpo geométrico formado por dos polígonos o caras congruentes (bases) situadas en dos planos paralelos, y por tantos paralelogramos (caras laterales), como lados tengan los polígonos de las bases.

Observemos la *figura 1*, en ella hemos representado un cuerpo en forma de prisma hexagonal: sus bases son polígonos en forma de hexágono y sus seis caras son paralelogramos.

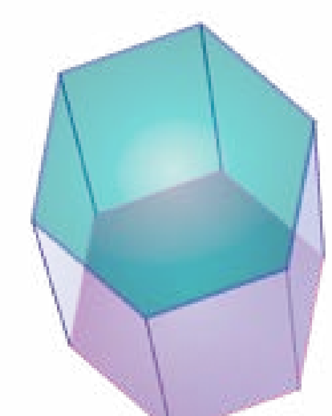


Figura 1: Prisma hexagonal

¿Qué otros cuerpos pueden ustedes indicar que tienen forma de prisma hexagonal?

Debatan las respuestas con su profesora o profesor.

A la segunda pregunta de la tabla, esperábamos que dijeran que tenía forma de hexágono, pero más aún, esperábamos que nos dijeran que tenía forma de hexágono regular. ¿Y qué es lo regular?

Polígono regular

Como estudiamos en 6to grado, un polígono regular es aquel que tiene sus lados congruentes y sus ángulos también son congruentes. He allí lo regular.

Tracen en sus cuadernos la siguiente tabla y complétenla:

Un polígono se dice que es regular si cumple:		
Primera condición		
Segunda condición		
Indica ejemplos de polígonos regulares		
Ejemplo de polígonos no regulares con ciertas condiciones		
Indica un ejemplo donde un polígono cumpla la primera condición pero no la segunda		
Indica un ejemplo donde un polígono cumpla la segunda condición pero no la primera		

Las dos condiciones tienen que darse para que un polígono sea considerado como polígono regular, puesto que una variación de alguna de las mismas lo excluye de esa clase de polígonos.

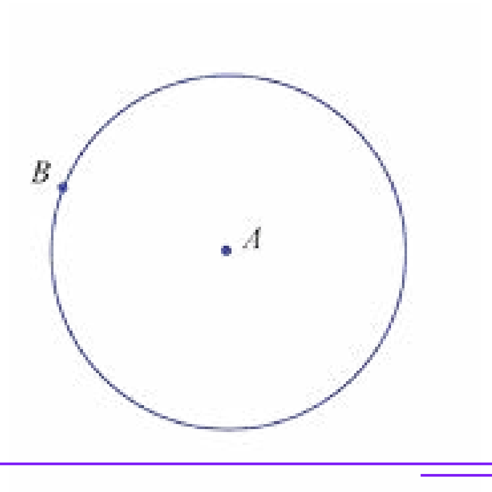
Decimos que **un polígono es regular** si tiene todos sus lados de igual medida y las medidas de sus ángulos son las mismas.

Si nos ayudamos con el trazado de circunferencias, podemos construir fácilmente polígonos regulares cualesquiera.

Construyamos un triángulo equilátero

Un **triángulo equilátero** es un polígono regular cuyos lados tienen igual medida. También se le denomina triángulo equiángulo, puesto que sus ánglos interiores son congruentes, es decir sus medidas son iguales.

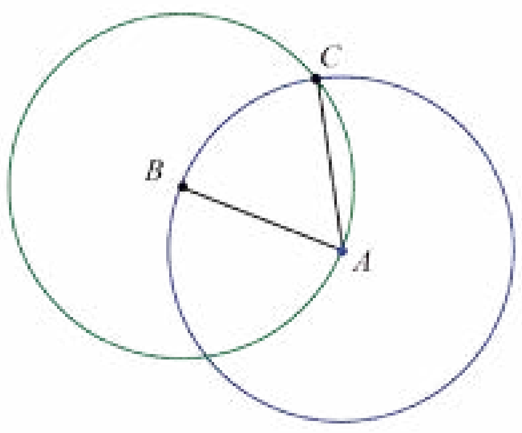
Cómo podemos construir un **triángulo equilátero o equiángulo:**

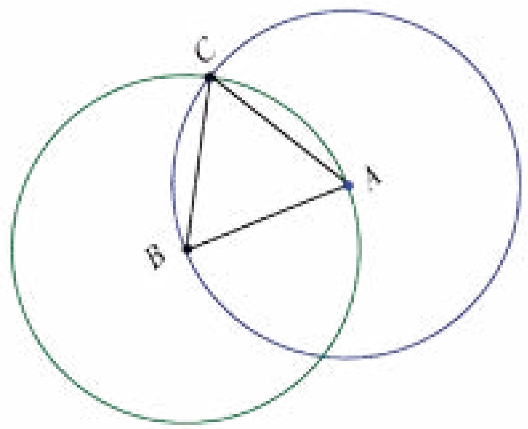


Tracen una circunferencia y en ella marquen el centro A y uno de sus puntos B.

Hagan, ahora, centro en el punto B y, con el mismo radio $\overline{AB}$, tracen otra circunferencia.

Esta circunferencia corta a la anterior en dos puntos. A uno de éstos lo llamaremos C.





Triángulo equilátero

Ahora si unen los puntos A, B y C tendrán un triángulo. ¿Será equilátero? Es decir, ¿todos sus lados tendrán igual medida? Demuestren esto:

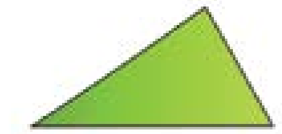
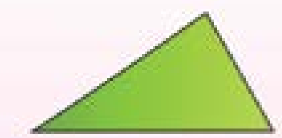
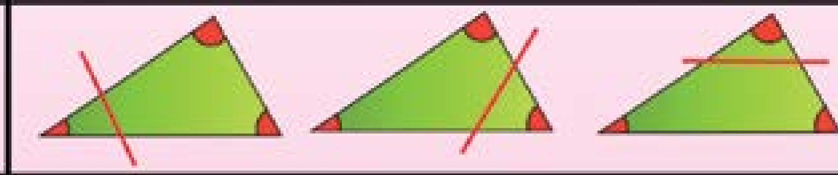
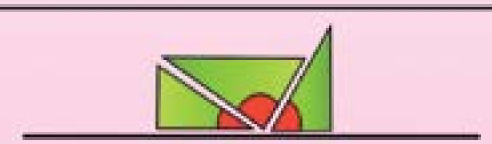
- El segmento $\overline{AB}$ es un radio de la circunferencia de centro A.
- El segmento $\overline{AC}$ es un radio de la misma circunferencia, por lo tanto, los segmentos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. (Esto se lee el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{AC}$)
- Finalmente, $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ ya que, la circunferencia de centro B tiene el mismo radio de la circunferencia de centro A.

La manera en que se le ha dado respuesta a la pregunta de si el triángulo es equilátero es lo que denominamos en Matemática demostración, es decir, una prueba de que lo que hemos afirmado es verdadero. Las demostraciones son en la Matemática la manera de comprobar que algo es cierto.

Nos gustaría que demostraran que el triángulo equilátero que construyeron es también un triángulo equiángulo. Es decir, cada ángulo tiene la misma medida. ¿Cuál será el plan? ¿Cómo lo harán? Presenten a sus compañeras y compañeros el plan de trabajo para hacer esta demostración y discutan con su profesora o profesor cuál será el camino a seguir. Tracen en sus cuadernos la siguiente tabla y establezcan el plan a seguir:

Plan de trabajo para la demostración de que el triángulo equilátero es equiángulo	
Primero	
Segundo	
Tercero	
Cuarto	
Quinto	

Por otra parte, hay afirmaciones, llamadas en Matemática **teoremas**, que todavía no podemos demostrar, pero sí podemos hacer comprobaciones de que se cumplen. Para ello, les invitamos a realizar la siguiente actividad.

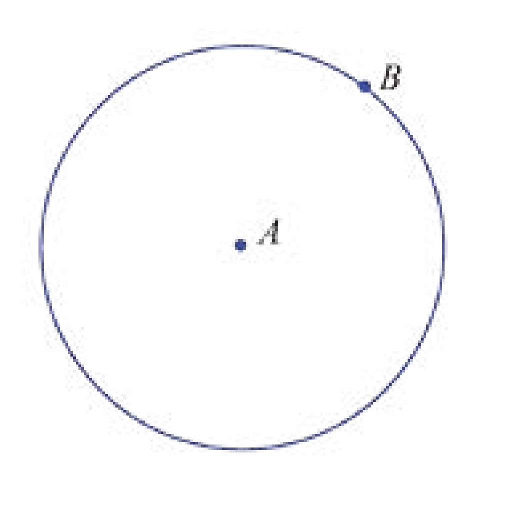
Tracen un triángulo, el que más les guste a cada uno, en una hoja reusable	
Recorten la figura con forma de triángulo	
Una vez que todas y todos hayan recortado la figura, vamos a colorearle una parte de los ángulos internos, como muestra el dibujo	
Recorten ahora los tres ángulos internos del triángulo, como muestra el dibujo	
Coloquen los tres pedazos del triángulo que fueron coloreados sobre una línea recta	

Recuerden que los ángulos llanos miden $180°$ y el que has construido, agregando los ángulos internos de un triángulo, es un ángulo llano. Entonces: ¿cuánto sumará la medida de los ángulos internos de un triángulo? Esta afirmación es un teorema que podrán demostrar, formalmente, más adelante. El teorema nos dice que:

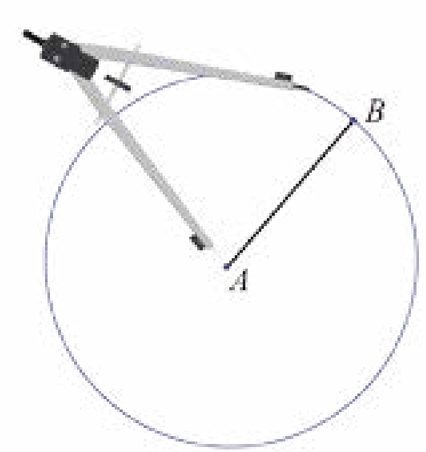
La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Construyamos un hexágono regular

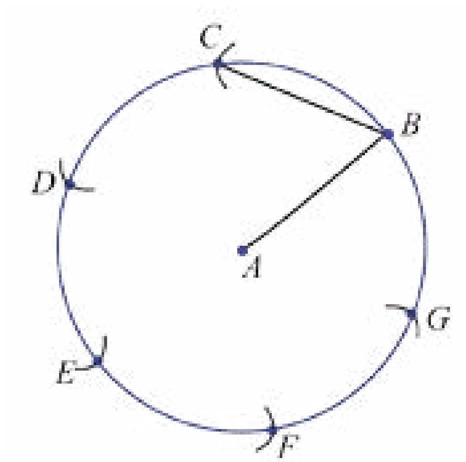
Un hexágono regular es un polígono que tiene seis lados y seis ángulos de igual medida. Construyamos un hexágono regular apoyándonos en algunas propiedades de la circunferencia.



Tracemos inicialmente una circunferencia de centro A y marquemos uno de sus puntos, B.

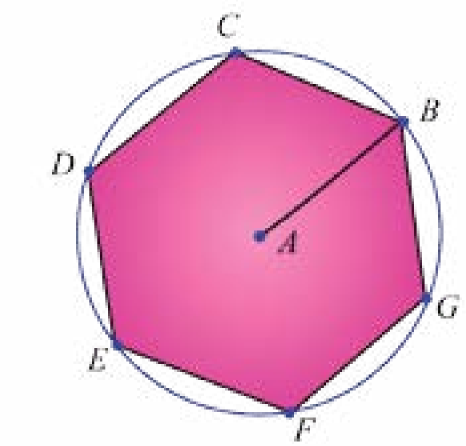


Consideremos el radio $\overline{AB}$, y copiemos su medida a partir de B utilizando el compás sobre la circunferencia obteniendo el punto C.



Repitamos esta acción y marquemos los puntos D, E, F y G.

Unamos los segmentos que determinan estos puntos de manera consecutiva: $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$,$\overline{FG}$ y $\overline{GB}$.



Hexágono regular

La figura que obtuvimos es un hexágono regular. Los invitamos a demostrar que tiene todos sus lados de igual medida.

- ¿Cómo podemos realizar esta actividad?
- ¿Será un hexágono regular?
- ¿Cómo se podrá demostrar que lo es?

Elaboren un plan para hacer la demostración	
Primero	
Segundo	
Tercero	

Realicen la demostración con la ayuda de sus compañeras y compañeros y comenten con su profesora o profesor cómo lo comprobaron. Sugerencia: revisen la demostración que hicimos con el triángulo equilátero. Recuerden que el triángulo equilátero es un polígono regular.

Actividad 1

¿Por qué las abejas construyen las celdas en forma hexagonal?

Ésta ha sido una curiosidad matemática por mucho tiempo, pero sólo hasta muy poco tiempo se ha logrado comprender por qué las abejas construyen cada celda del panal en forma de prisma hexagonal.

Todo prisma tiene una base poligonal. Vamos a estudiar aquellos polígonos que tienen sus bases en forma de polígonos regulares para comprender por qué las abejas adoptaron esta forma de construcción de las celdas de su panal.

Para la producción de 1 litro de miel las abejas deben efectuar entre 80.000 y 160.000 viajes hasta las flores y regreso al panal, lo que equivaldría, a escala humana, a unos 4 viajes alrededor del mundo, por lo que se hace necesario tener el recipiente que tenga la mayor capacidad de almacenaje y que utilice la menor cantidad de cera para su construcción.

Si se mantiene el perímetro, ¿en cuál de los polígonos regulares, podrán las abejas almacenar mayor cantidad de miel?

En la tabla que presentamos a continuación hemos colocado algunos polígonos regulares y la longitud de uno de sus lados. Recordemos ahora, cómo se calcula el perímetro de un polígono.

El perímetro es la suma de los lados de un polígono. Es decir, que para calcular el perímetro de un polígono, bastará con sumar las medidas de sus lados.

Como tenemos polígonos regulares bastará multiplicar uno de sus lados por el número de lados del polígono. Eso les toca a ustedes.

Copien en sus cuadernos la siguiente tabla, calculen el perímetro de los polígonos regulares y registren en ella el resultado. Recuerden, como vimos en 6[to] grado, que el área del triángulo se calcula asi: $A_{\triangle}=\frac{b \cdot h}{2}$, el área del cuadrado es, $A_{\square}= l^2$ y el área del hexágono se calcula así:

$$A_{hexágono} = \left(\frac{1}{2} \cdot h \right) \cdot perímetro$$

Superficies de los polígonos con igual perímetro			
Polígonos regulares	Longitud del lado	Perímetro	Área
Cuadrado	3		
Hexágono regular	2		
¿Qué observamos con respecto al perímetro de cada uno de los polígonos regulares indicados en la tabla?			

Ahora calculen las áreas de cada polígono y registren sus resultados en la tabla.

Para saber en cuál de los polígonos regulares de igual perímetro cabe mayor cantidad de alimento, es necesario comparar las áreas de los mismos.

De lo que hemos estudiado, ¿cuál es el polígono regular que ocupa mayor superficie?	
¿Cuál figura geométrica será la que permite almacenar mayor cantidad de alimento?	

Las abejas fabrican cada celda en forma cilíndrica, como un tubo. Pero por la compresión de cada una contra las otras toman la forma hexagonal, siendo ésta la forma más efectiva de agrupar a las larvas y la miel en un espacio limitado. Además, de esa forma, ahorran cera, es decir, gastan menos material, puesto que con igual perímetro la mayor superficie la recubren con un hexágono.

Entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados.

La figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el círculo, que posee un número infinito de lados. Pero un círculo deja espacios cuando se rodea de otros círculos.

Así, de todas las figuras geométricas que cumplen la condición "mayor número de lados y adyacencia sin huecos", es el hexágono. Aunque para las abejas esto es verdad desde su nacimiento.

Teselados, mosaicos, cubrimientos

Embaldosar un panal de abejas es como embaldosar un piso. ¿Embaldosar?

Cuando hablamos de embaldosar nos referimos a realizar un cubrimiento total de una superficie con baldosas. También se le denomina mosaico. Como cuando se colocan las baldosas de cerámica en una cocina o en un baño.

Por lo general, cuando se cubre el piso de un baño o su pared con cerámicas, todas las baldosas que se utilizan tienen la misma forma. Es como armar un rompecabezas con piezas iguales. A cada una de estas piezas en Matemática se les llama **pieza teselante**, y si es posible colocarlas de manera tal que no queden entre ellas huecos o algún tipo de espacio, cubriendo todo el plano, decimos que se ha hecho una teselación. ¿Será que las abejas "sabían" de estos cubrimientos y utilizaron los hexágonos para cubrir todo el piso de su panal?

¿Qué otro cubrimiento pudieron utilizar las abejas?

Pensemos que nos han encargado la tarea de embaldosar el piso del baño de la escuela. Tenemos que cubrirlo utilizando baldosas de manera que no queden espacios vacíos entre ellas y debemos diseñar varias combinaciones para presentarlas a la comunidad educativa.

Todas las baldosas que se solicitaron de muestra tienen las caras de la base en forma de polígono regular y la misma longitud de arista. ¿Cómo es eso?

Una baldosa es un cuerpo. Por lo tanto tiene tres dimensiones. Cada borde del cuerpo recibe el nombre de arista. Cuando nos referimos a una de sus caras, este borde recibe el nombre de lado, puesto que, de esa forma, estamos hablando de un polígono.

Interesa saber cuáles son las formas de las baldosas que al combinarse permiten realizar un cubrimiento del piso de los baños u otra superficie plana, sin que se superpongan y que no dejen espacios entre ellas. Es decir, cuáles combinaciones nos permiten realizar un teselado o mosaico.

¿Cuáles serán las condiciones que deben poseer estas baldosas para recubrir el piso del baño?

Realicemos este estudio.

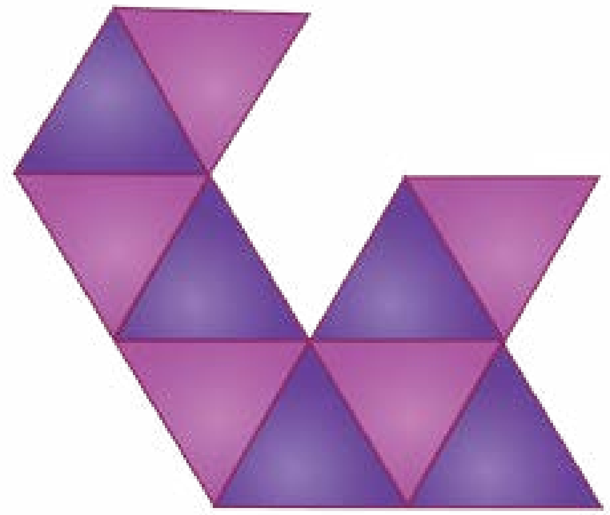
Actividad 2

- Utilicen pedazos de papel reusable. Sobre él dibujen triángulos equiláteros de $5\ \mathrm{cm}$ de lado. Necesitaremos dibujar más de seis. Discutan con sus compañeras y compañeros cómo podemos realizar esta actividad.
- Recorten las piezas en forma de triángulos y utilícenlas ahora como “baldosas”.
- Tomen una hoja de papel y traten de cubrir toda su superficie con las piezas que recortaron.
- Socialicen con sus compañeras y compañeros esta actividad.

Copien en su cuaderno la siguiente tabla y complétenla:

Recubrimiento regular uniforme con triángulos equiláteros	
¿Cómo colocamos las piezas para cubrir la hoja?	
¿Quedan espacios vacíos entre dos piezas cualesquiera?	
¿Alguna de las piezas quedó superpuesta?	
Si tuvieras piezas suficientes, ¿podríamos cubrir toda la hoja con estas " baldosas "? ¿Cómo lo haríamos?	

Si pudieron hacer esto, y esperamos que sí, entonces, han hecho un recubrimiento regular uniforme. Esta combinación es muy buena para cubrir el piso del baño. En el caso de las abejas pudieron haber utilizado esta combinación para elaborar sus celdas y almacenar el alimento para la población de su colmena.

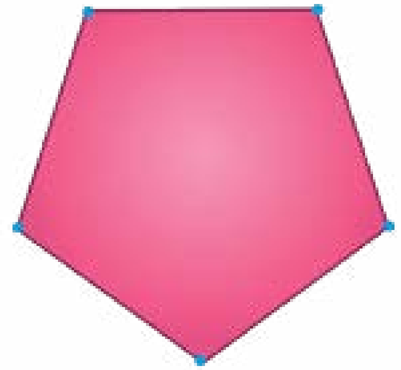


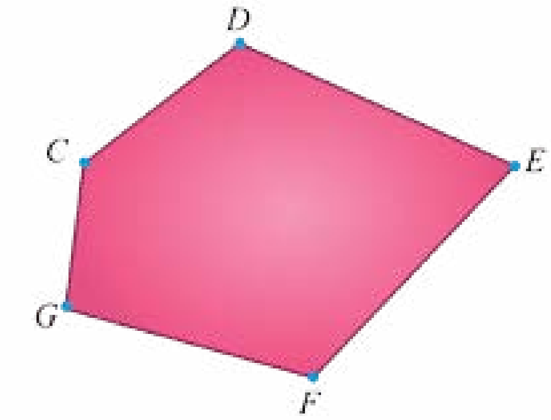
Intentemos recubrir una hoja de papel con un prisma cuyas bases sean un cuadrado. Tomemos una hoja de papel, dibujemos cuadrados sobre ellas de $5\ \text{cm}$ de lado y luego recortemos como hicimos con la actividad de los triángulos.

¿Cómo colocamos las piezas para recubrir la hoja? ¿Quedaron espacios entre ellas? ¿Quedaron piezas superpuestas al recubrir la hoja?

¿Cuál otra será una buena combinación para realizar un mosaico? Probemos con el pentágono regular.

Un **pentágono regular** es aquel que tiene cinco lados congruentes y cinco ángulos de igual medida. ¿Cuánto medirá cada ángulo de un pentágono regular?





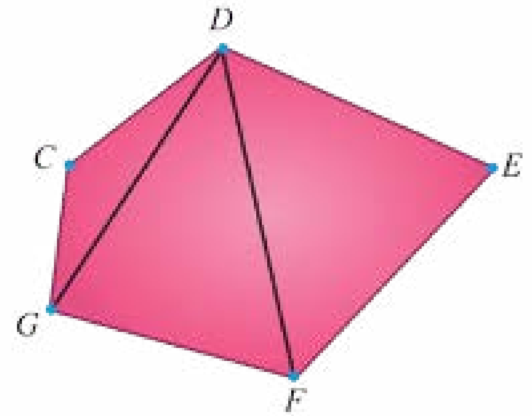
Respondamos a esta pregunta. Hagamos un plan para hacerlo.

Primero, dibujemos un pentágono cualquiera como el de la figura.

Luego, tracemos sus diagonales desde un punto y estudiemos los polígonos que se forman al hacer este trazado.

Vamos a considerar las diagonales desde vértice D.

Completemos el estudio en la siguiente tabla.



Medidas de los ángulos internos de un pentágono	
¿Cuántos triángulos se formaron al trazar las diagonales desde el vértice D?	
¿Cuál es la suma de los ángulos internos de un triángulo?	
¿Cómo haríamos para saber, en base a estos datos, cuál es la medida de los ángulos de un pentágono?	
Con base en estos datos ¿cómo haríamos para saber cuál es la medida de cada ángulo de un pentágono?	

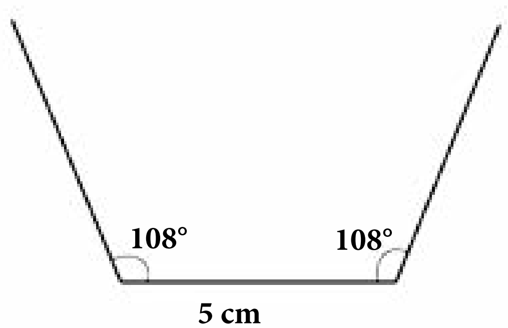
La respuesta a la tercera pregunta nos dio, $180° \cdot 3 = 540°$.

Y ahora con este dato, podemos saber cuánto vale cada ángulo de un pentágono regular. Si un pentágono regular tiene sus ángulos congruentes y la suma de sus ángulos internos es 540º, bastará dividir entre 5 este valor para saber cuánto mide cada ángulo de dicho polígono.

$$540º \div 5 = 108º$$

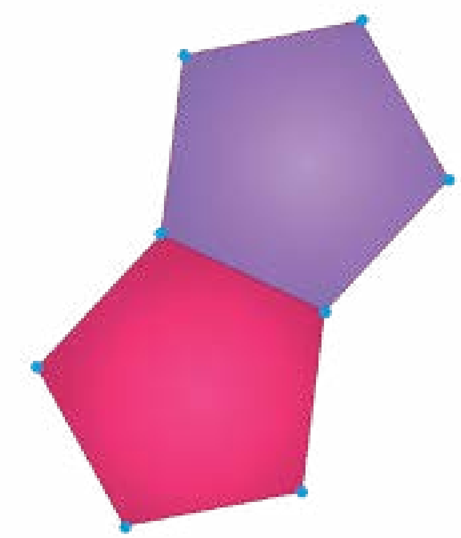
Ésa es la medida de cada ángulo en un pentágono regular.

Con la ayuda del transportador, dibujen ahora sobre una hoja reusable al menos tres pentágonos regulares de 5 cm de lado. Recuerden que deben trazar ángulos de 108° entre cada dos lados adyacentes, como se muestra en la figura hasta completar el pentágono.



Recórtenlos y vean si es posible cubrir una superficie plana utilizando como piezas las figuras que asemejan "baldosas" en forma de pentágonos regulares. Tomen una hoja de papel y traten de cubrirla sin dejar espacios entre las piezas y sin superponer una con otra. Conversen, con sus compañeras y compañeros, esta actividad y completen el siguiente cuadro:

Recubrimiento regular uniforme con pentágonos regulares	
¿Cómo colocamos las piezas para cubrir las hojas?	
Entre dos piezas cualesquiera, ¿quedan espacios vacíos al tratar de hacer el cubrimiento?	
¿Alguna de las piezas quedó superpuesta al realizar el cubrimiento?	
¿Podemos realizar el cubrimiento de un piso que tenga las bases en forma de pentágonos regulares? ¿Por qué?	



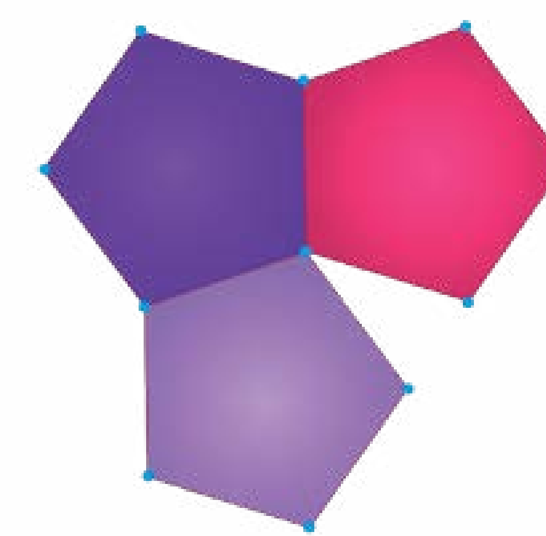
Observemos: si dibujamos dos pentágonos de igual medida en sus aristas sobre un plano, tendríamos una figura como la que se muestra.

Sigamos tratando de hacer este cubrimiento. Dibujemos otro pentágono, de manera tal que no queden espacios entre sus aristas y que no se superpongan.

¿Podremos dibujar otro pentágono regular de igual arista en el espacio que queda, de manera que cubra esa parte del plano y no se superponga?

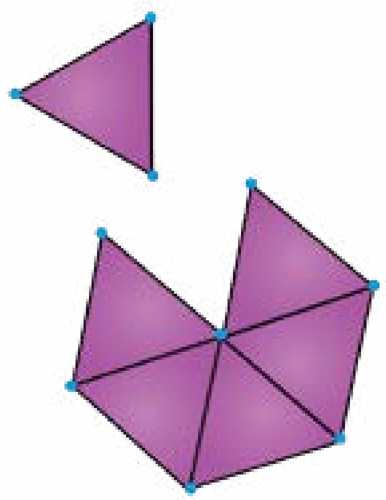
Observemos la figura. Van tres pentágonos regulares dibujados sobre un plano sin dejar espacios entre ellos.

¿Se podrá dibujar otro pentágono regular igual a los anteriores para cubrir el plano sin que quede espacio entre ellos y no se superpongan? Hemos llegado a la misma conclusión que ustedes. No podemos cubrir un plano utilizando pentágonos regulares sin que queden espacios entre las piezas o que se superpongan entre sí.



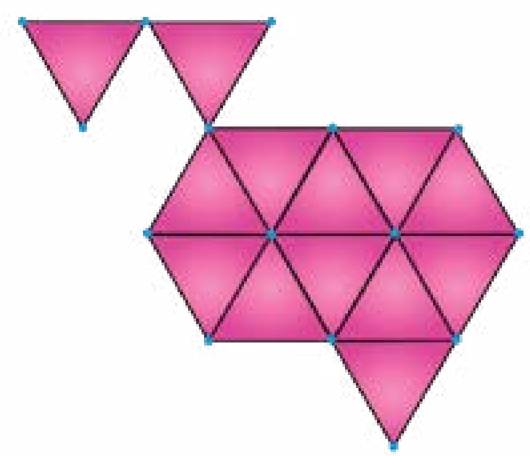
¿Cualquier baldosa puede servir para un cubrimiento regular uniforme?

Bueno, al parecer hay unos polígonos regulares que nos permiten lograr un cubrimiento regular del plano y otros no, por lo tanto, hay baldosas que se pueden colocar y cubrir todo el piso, teniendo la misma arista, pero hay otras que no. Estudiemos cuáles sí y cuáles no.

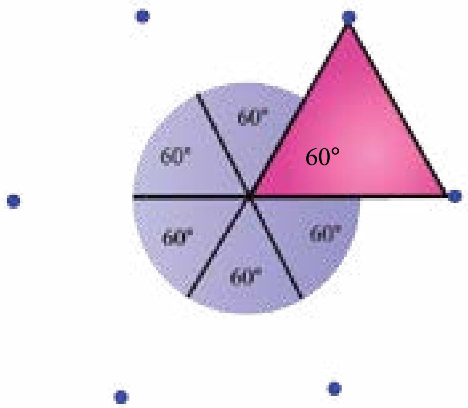


Observemos la figura. ¿Podremos construirla con las piezas triangulares que recortamos?

Y esto puede repetirse utilizando cada una de las piezas que recortamos en forma triangular.

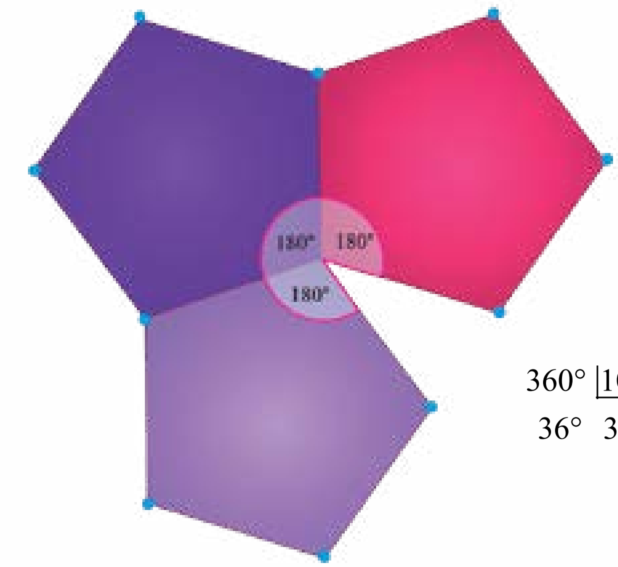


Conversemos



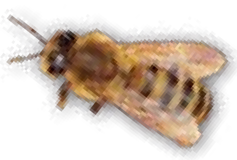
Cada ángulo interno de un triángulo equilátero mide 60º. ¿Cuánto nos daría la suma de los ángulos de seis triángulos equiláteros alrededor de un mismo vértice en un plano? Socialicen esto con sus compañeras y compañeros.

Observemos que 360º es múltiplo del ángulo interno del triángulo equilátero. O sea $360° = 6 \cdot 60°$.



$$\begin{array}{r|l} 360° & 108° \\ \hline 36° & 3° \end{array}$$

Ahora, revisemos los ángulos del pentágono regular y su relación con el giro de 360º. Coloquemos tres pentágonos regulares alrededor de un vértice. Observemos que no representan un giro completo (tal como se muestra en la figura).



¿Qué debe ocurrir para realizar un cubrimiento del piso, es decir, un cubrimiento regular de un plano, utilizando las baldosas con una cara regular?

Completemos el siguiente cuadro:

Polígonos regulares	Medida de un ángulo interno	N° de polígonos alrededor de un vértice
Triángulo equilátero		
Cuadrado		
Pentágono regular	108	
Hexágono regular		
Heptágono regular	175	

Socialicen con sus compañeras y compañeros. ¿Cuáles son los polígonos que al realizar la división de 360° entre la medida de cualquiera de sus ángulos internos dan una división exacta? Con esos polígonos podemos realizar un recubrimiento regular del plano. Con esas baldosas podemos realizar un mosaico.

Las abejas utilizan estas ideas para hacer las celdas de sus colmenas.

Lo cierto es que la forma en que las abejas hacen cada celda es la cilíndrica, pero al comprimirse con sus vecinas éstas toman la forma hexagonal. Es la forma más económica para almacenar más alimento y en donde utilizan menos material para hacer las paredes de las mismas. Por otra parte este conocimiento se transmite de abeja en abeja y al compartirlo todas trabajan para mantener el equilibrio de la colmena.

Nos toca a todos compartir nuestros saberes y trabajar por mantener el equilibrio de nuestra sociedad.

Inventando mosaicos

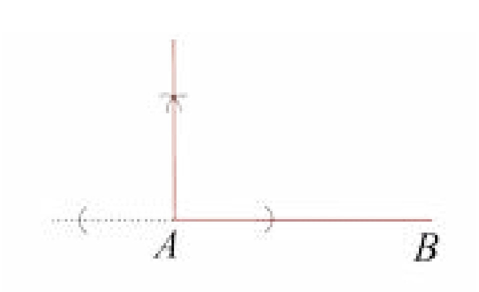
Una tarea pendiente es la de embaldosar el baño de tu liceo.

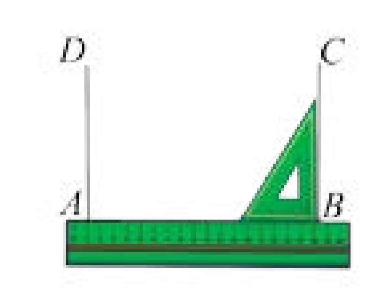
Nos toca calcular su área y luego diseñar el cubrimiento del mismo para presentarlo a la comunidad educativa. Podemos diseñar un recubrimiento regular uniforme o una combinación utilizando las piezas que hemos recortado. Presentemos, a todo el salón, el diseño que hemos elaborado y conversemos con la profesora o profesor.

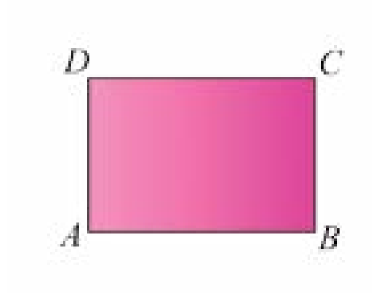
A continuación, les presentamos algunas formas de construir cuadriláteros que les ayudarían en la invensión de sus mosaicos.

Construir un rectángulo, dados dos de sus lados

Partimos del segmento $\overline{AB}$. Desde A, trazamos la perpendicular $\overline{AD}$, de longitud menor a la de $\overline{AB}$. Desde B trazamos una paralela al lado $\overline{AD}$ y por D una paralela al lado $\overline{AB}$. Una vez encontrado el punto C, queda formada la figura.

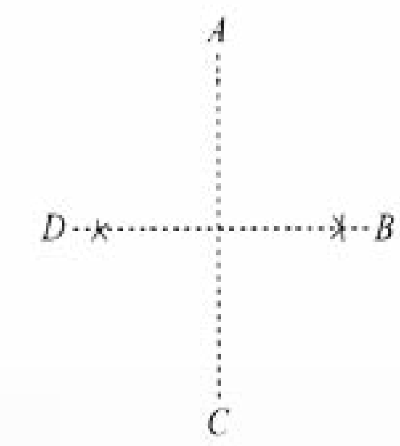


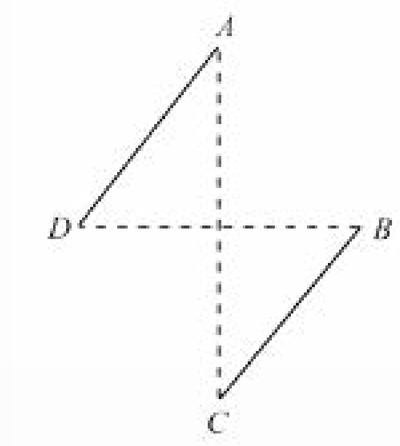


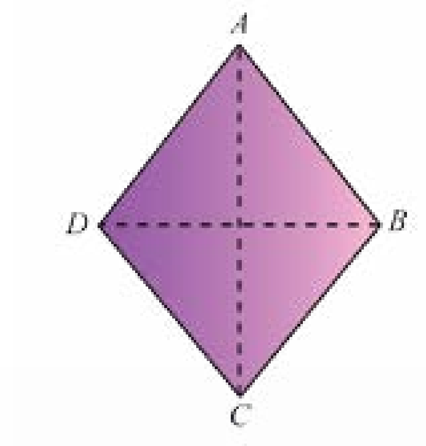


Construir un rombo dadas sus diagonales

Trazamos la diagonal mayor $\overline{AC}$ de longitud 6 cm, y en su punto medio la diagonal menor $\overline{DB}$ de longitud 5 cm, perpendicular a la primera. Uniendo los extremos de ambas diagonales (los puntos A, B, C, y D), obtenemos el rombo.







10 ¡ALLÁ VIENE EL TREN!

Líneas y puntos notables de un triángulo

Ferrocarril Caracas-Cúa

El Sistema Ferroviario Nacional

En la página web del Instituto de Ferrocarriles del Estado (IFE) de la República Bolivariana de Venezuela (*www.ife.gob.ve*), podemos encontrar que la historia del ferrocarril en Venezuela tiene un largo trayecto que se remonta al año 1834, cuando un ciudadano inglés estudió las posibilidades para la apertura de una vía ferroviaria que uniera Caracas con el litoral. Casi 50 años después, en el año 1883, con motivo de la celebración del Centenario del Nacimiento del Libertador Simón Bolívar, es cuando se inaugura el Ferrocarril de Caracas hacia la Guaira. El primer Plan Ferroviario Nacional del año 1950 expresa la intención del Estado venezolano de crear una red ferroviaria adecuada a los nuevos tiempos. La única realización concreta de este primer plan vino dada por la puesta en marcha del tramo Puerto Cabello – Barquisimeto, el día jueves 15 de enero del año 1959, con una longitud de 173 km. Sin embargo, en los siguientes cuarenta años, las posibilidades de consolidar un sistema ferroviario nacional quedaron truncadas.

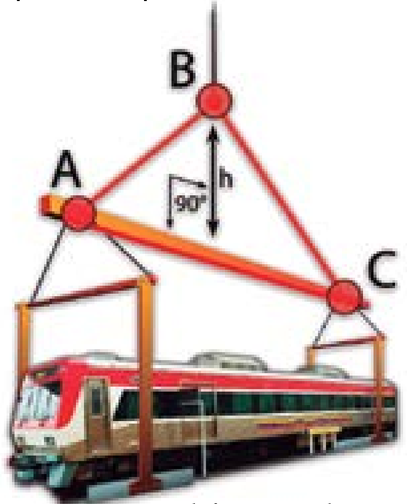
A partir del año 1999 se ha venido desarrollando un nuevo Plan del Sistema Ferroviario Nacional. Parte de ese plan ha sido la construcción del Sistema Ferroviario Ezequiel Zamora, que une localidades de los Valles del Tuy con Caracas.

Una de las tareas importantes, entre otras muchas, ha sido la planificación de cómo desembarcar, de manera segura, los vagones que forman parte del Sistema de Transporte Ferroviario Nacional.

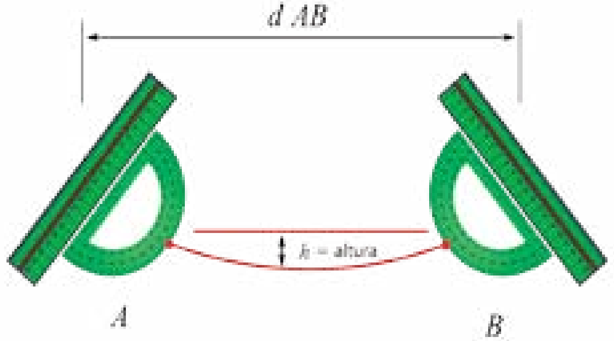
Para ello, estudiar la altura de los triángulos es muy importante, pues está relacionada con las estructuras sometidas a tensión y compresión, como las grúas que se utilizan para desembarcar dichos vagones.

Sin la altura de la estructura triangular, el cable de acero flexible, que la compone, no podría sostener la carga, pues las fuerzas de tensión serían horizontales, y ninguna fuerza horizontal puede equilibrar cargas verticales.

A continuación, intentemos comprender el mecanismo por medio del cual el cable sostiene cargas verticales como la observada en la figura anterior.



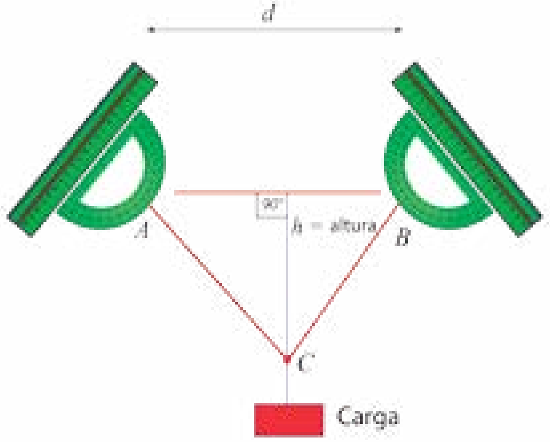
Estructura de forma triangular determinada por un cable de acero flexible



Cable entre dos puntos fijos

Consideren un cable estirado entre dos puntos fijos A y B.

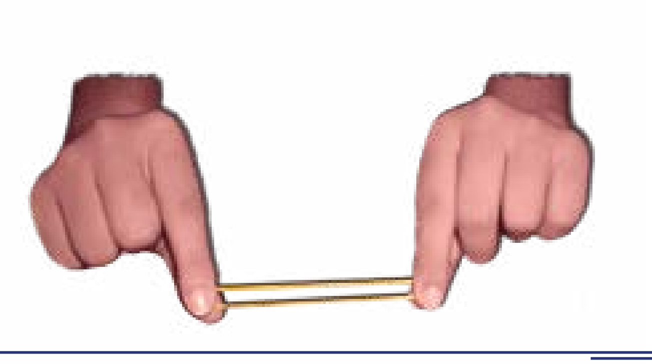
Apliquen, en su punto medio, una carga. Observen que, bajo la acción de la carga, el cable adopta una forma triangular A, B y C. La forma triangular adoptada por el cable se caracteriza por la altura del triángulo, distancia perpendicular entre el vértice C y el segmento opuesto a dicho vértice.



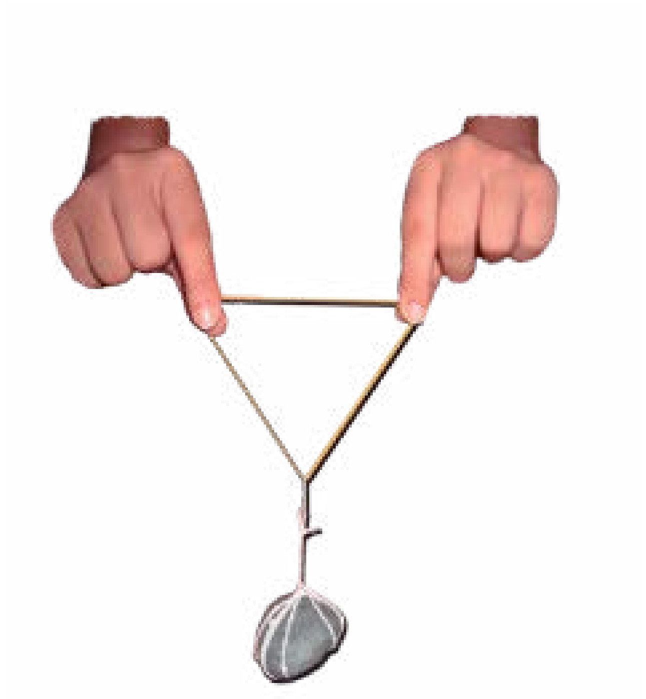
Forma triangular adoptada por el cable

Actividad 1

Les invitamos a construir junto con sus compañeras y compañeros, y con la orientación de su profesora o profesor, un modelo que permita entender cómo equilibrar cargas verticales mediante estructuras triangulares.



Tomen en sus manos una cuerda o liga flexible.

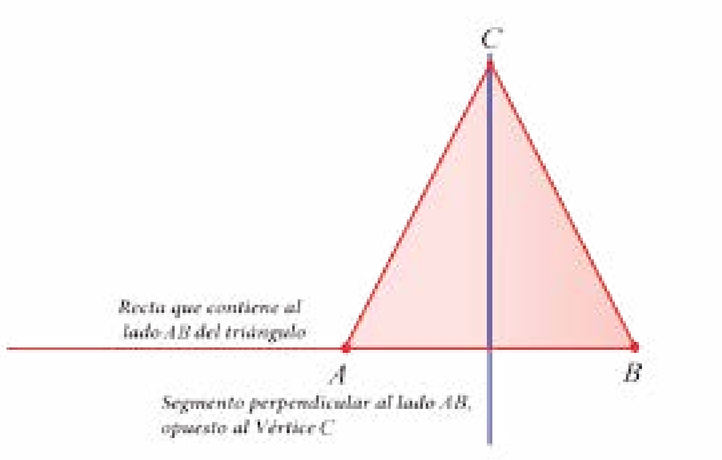


Coloquen en su punto medio un peso fijo y sientan físicamente la tensión de la cuerda o liga al levantar lentamente la carga (una piedra, por ejemplo). Observemos cómo ésta va tomando la forma triangular hasta alcanzar la altura ideal para sostener y equilibrar la carga sin romperse.

Repitan la actividad 1, considerando que la cuerda o liga va tomando la forma triangular, observen con cuidado y anoten la distancia existente entre la cuerda o liga flexible y la carga (piedra) antes y después de levantarla hasta que esté equilibrada (es recomendable trazar un segmento imaginario perpendicular desde el punto donde se encuentra la carga al lado opuesto a éste, de la estructura triangular). ¿Cuál distancia es mayor, la anotada antes o después de levantar la carga? ¿Qué parte de la estructura triangular se consideró para anotar las distancias anteriores? Discutan y reflexionen con sus compañeras y compañeros. ¿Qué pueden concluir respecto a la distancia anotada y la estructura triangular?

La respuesta a la última interrogante planteada está relacionada con la siguiente definición:

Alturas de un triángulo



Una **altura** de un triángulo es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto.

Es importante saber que al número resultante de medir la longitud de la altura de un triángulo también se le llama altura. Por ejemplo si la menor distancia desde el vértice de un triángulo a la recta que contiene el lado opuesto es $8\ \mathrm{cm}$, podemos decir que la altura es $8\ \mathrm{cm}$.

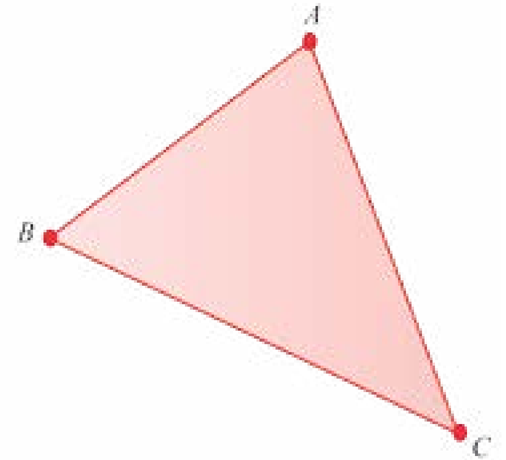
Conociendo que un triángulo tiene tres vértices y considerando la definición anterior, ¿cuántas alturas tiene esta figura plana?

Trazando alturas en triángulos diferentes

Existen varios tipos de triángulos de los que se pueden conocer y estudiar la relación que existe entre ellos y su altura. Para ello es necesario contar con herramientas geométricas como: compás, transportador, regla y escuadras. Veamos:

Triángulo acutángulo

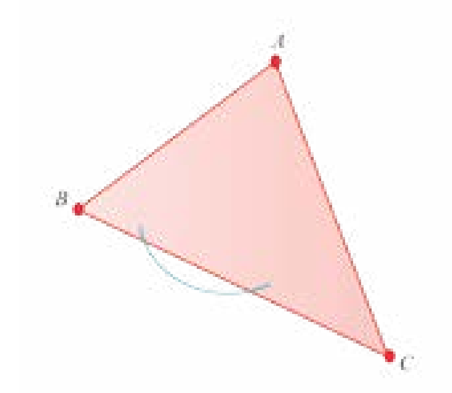
Observen el triángulo acutángulo ABC, la medida de cada uno de sus ángulos es menor a 90º y tracemos en él una altura desde el vértice A hasta la recta que contiene el segmento $\overline{BC}$.

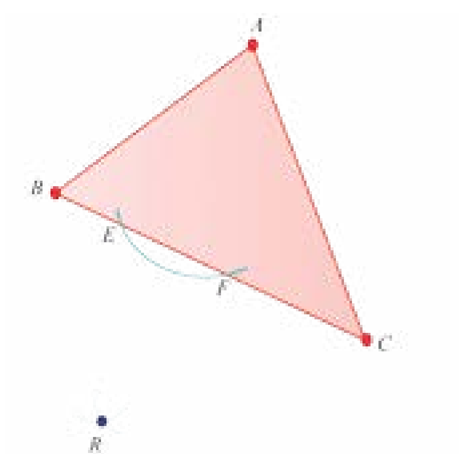


Triángulo acutángulo ABC

Trazado de una perpendicular, utilizando el compás, desde el vértice A del triángulo acutángulo ABC a la recta, que contiene al segmento $\overline{BC}$

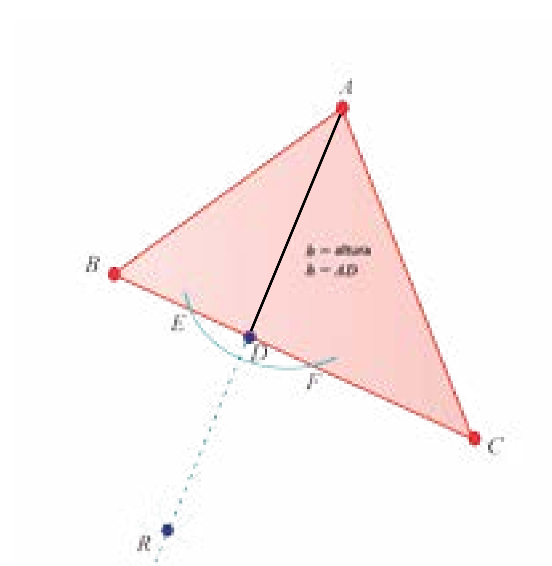
Con el compás, tracen un arco con centro en A, que corte la recta que contiene al segmento $\overline{BC}$.





Con la misma abertura del compás, tracen dos arcos que se corten: uno con centro en E y el otro con centro en F. Los arcos al cortarse determinan el punto R.

Tracen la recta perpendicular que pasa por A y R. La perpendicular AR corta al segmento $\overline{BC}$ en D. El segmento $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$ es una altura del triángulo ABC.



Observen que al trazar la altura en un triángulo acutángulo, ésta queda dentro del triángulo.

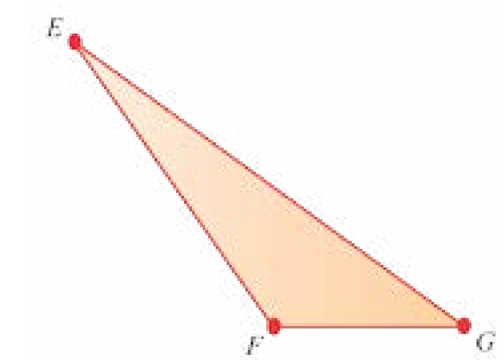
Actividad 2

Dibujen un triángulo acutángulo CDE. Tracen las perpendiculares de este triángulo considerando cada uno de sus vértices e indiquemos las alturas obtenidas ¿Qué podemos observar respecto a las alturas trazadas? ¿Dónde se intersecan las alturas trazadas en el triángulo CDE: en su interior, exterior o en uno de sus lados? Socialicemos y reflexionemos las cuestiones anteriores con nuestras compañeras y nuestros compañeros.

Determinen el perímetro del triángulo trazado, es decir, la suma de la medida de sus lados. Sumen aparte las medidas de las tres alturas, comparen esta suma con la anterior, ¿qué observan? Se darán cuenta de que el perímetro es mayor que la suma de las medidas de las tres alturas.

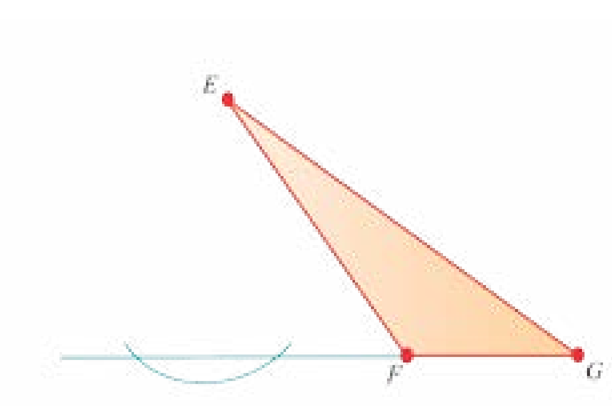
Triángulo obtusángulo

Observen el triángulo obtusángulo EFG, la medida de uno de sus ángulos internos es mayor a 90º y tracen en él una altura desde el vértice E hasta la recta, que contiene el segmento $\overline{FG}$.



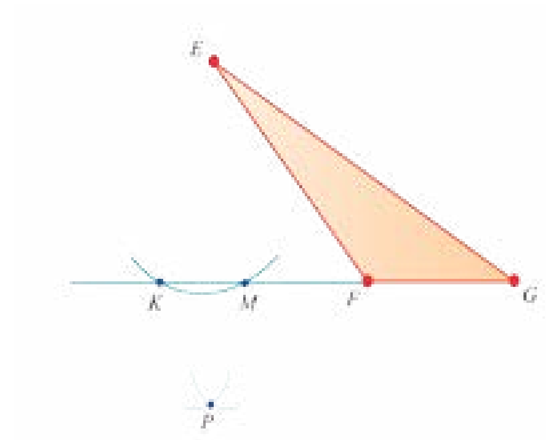
Triángulo obtusángulo EFG

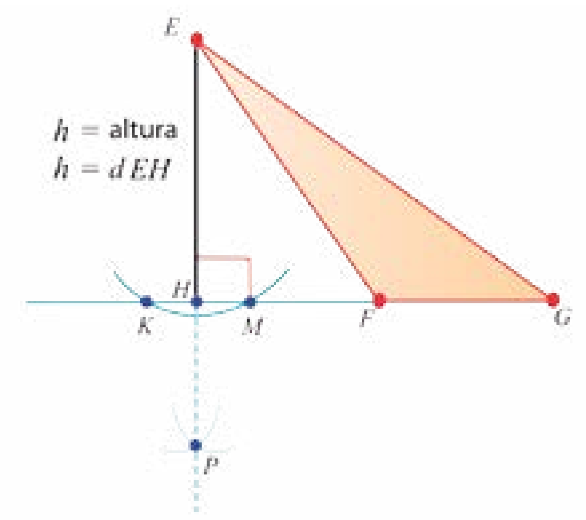
Trazado de una perpendicular, utilizando el compás, desde el vértice E del triángulo obtusángulo EFG a la recta que contiene al segmento $\overline{FG}$



Con el compás, tracen un arco con centro en E, que corte a la recta que contiene al segmento $\overline{FG}$.

Con la misma abertura del compás, tracen dos arcos que se corten, uno con centro en K y el otro con centro en M. Los arcos al cortarse determinan el punto P.



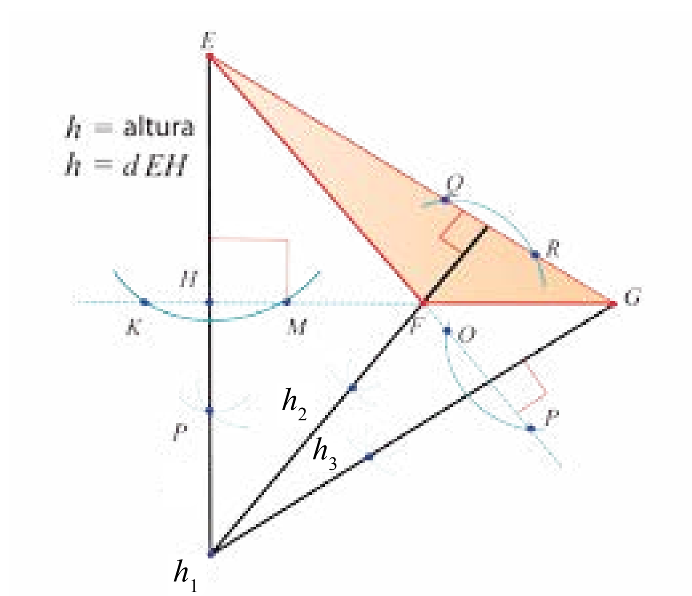


Tracen la perpendicular que pasa por E y P. $\overline{EP}$ corta la prolongación del segmento $\overline{FG}$ en H.

El segmento $\overline{EH}$ perpendicular a la prolongación del segmento $\overline{FG}$ es una altura del triángulo EFG.

Observen que la altura trazada en el anterior triángulo obtusángulo quedó fuera del mismo.

Tracen, ahora, de manera similar, las otras dos alturas del triángulo obtusángulo EFG. Las rectas que contienen a las tres alturas obtenidas, h_1, h_2 y h_3 se cortan en un punto (S).



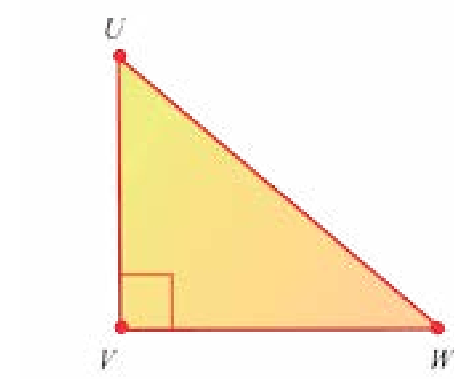
Actividad 3

Dibujen un triángulo obtusángulo LMN. Tracen las perpendiculares de este triángulo considerando sus vértices e indiquen las alturas obtenidas ¿Qué pueden observar respecto a las alturas trazadas? ¿Dónde se cortan las alturas trazadas en el triángulo LMN: en su interior, exterior o en uno de sus lados? Discutan y reflexionen con sus compañeras y compañeros.

Midan el perímetro del triángulo trazado y compárenlo en la suma de las longitudes de las tres alturas trazadas. ¿Qué pueden concluir?

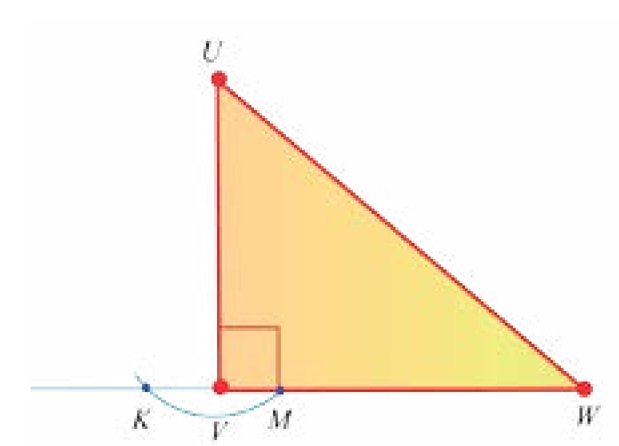
Triángulo rectángulo

Observen el triángulo rectángulo UVW y tracen en él una altura desde el vértice U hasta la recta que contiene el segmento $\overline{VW}$.



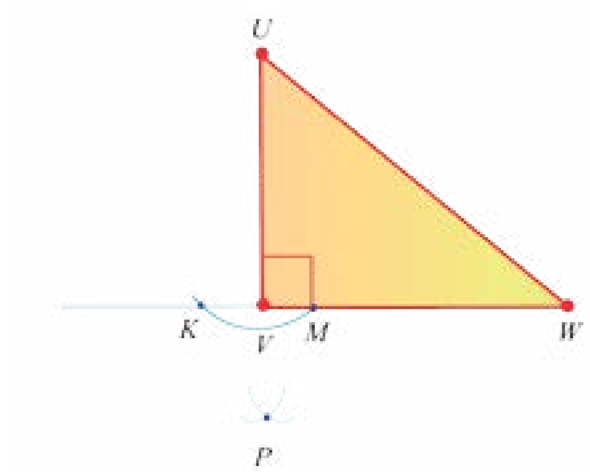
Triángulo rectángulo UVW

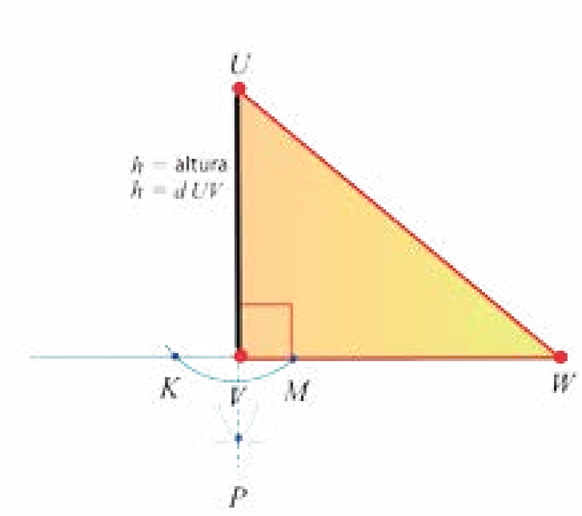
Construcción de una perpendicular, utilizando el compás, desde el vértice U del triángulo obtusángulo UVW a la recta que contiene al segmento $\overline{VW}$



Con el compás, tracen un arco con centro en U que corte a la recta que contiene al segmento $\overline{VW}$, en los puntos K y M.

Con la misma abertura del compás, tracen dos arcos que se corten, uno con centro en K y el otro con centro en M. Los arcos se cortan en P.





Tracen la perpendicular que pasa por U y P. $\overline{UP}$ corta al segmento $\overline{VW}$ en V. El segmento $\overline{UV}$, perpendicular al segmento $\overline{VW}$, es una altura del triángulo UVW.

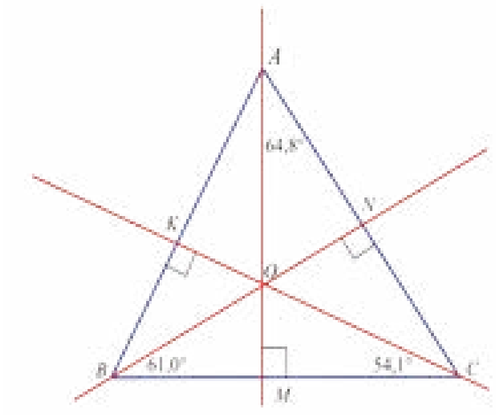
La altura $\overline{UV}$, perpendicular al lado $\overline{VW}$, coincide con el lado $\overline{UV}$ del triángulo rectángulo.

Actividad 4

Dibujen un triángulo rectángulo XYZ. Tracen tres perpendiculares de este triángulo considerando cada uno de sus vértices e indiquen las alturas obtenidas. ¿Qué pueden observar respecto a las alturas trazadas? ¿Dónde se cortan las alturas trazadas en el triángulo rectángulo XYZ? Debatan y reflexionen con sus compañeras y compañeros.

Encuentren la suma de las longitudes de las tres alturas trazadas al triángulo rectángulo y compárenla con la longitud del perímetro de dicho triángulo.

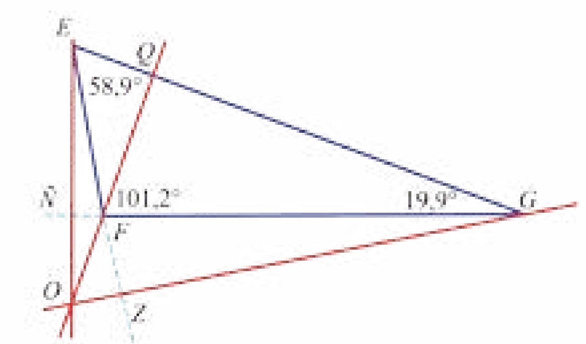
Punto de corte entre las alturas de un triángulo



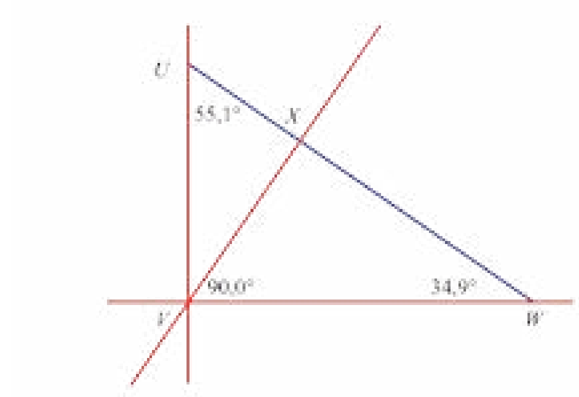
Triángulo acutángulo
Rectas concurrentes

En el triángulo acutángulo ABC, sus alturas son $\overline{BN}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CK}$. Las rectas que contienen las alturas del triángulo, se cortan en un punto O.

En el triángulo obtusángulo EFG, sus alturas son $\overline{EF}$, $\overline{GZ}$ y $\overline{FQ}$. Observen que las rectas, que contienen las alturas del triángulo EFG, se cortan en un punto O.



Triángulo obtusángulo
Rectas concurrentes



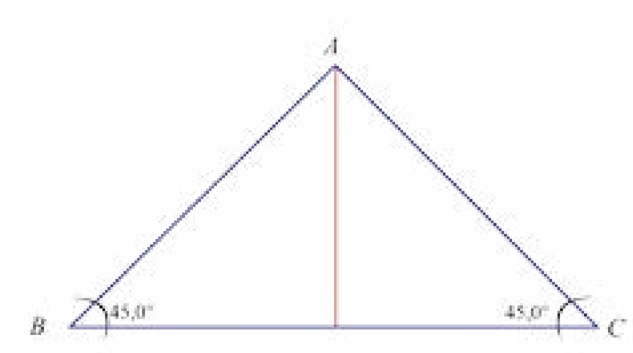
Triángulo rectángulo
Rectas concurrentes

En el triángulo rectángulo UVW, sus alturas son $\overline{VX}$, $\overline{VU}$ y $\overline{VW}$. Las rectas, que contienen, las alturas del triángulo UVW, se cortan en un punto V.

Dos o más rectas que se cortan en un punto se llaman **rectas concurrentes.** El punto donde concurren las alturas de un triángulo o sus prolongaciones, se llama **ortocentro**.

Ya nos hemos familiarizado con el concepto de **alturas de un triángulo.**

Ahora debemos tener en cuenta la altura triangular óptima que permita equilibrar cargas verticales, desde una perspectiva del ahorro de algunos metros de cable de acero flexible. La altura viene dada por obtención del **triángulo isósceles**, tal y como se muestra a continuación:



Altura de un triángulo isósceles

De acuerdo con las construcciones realizadas y la información obtenida, investiguemos, conversemos y reflexionemos con nuestras compañeras y nuestros compañeros acerca de las siguientes interrogantes:

¿Cómo son las medidas de las alturas correspondientes a los lados de igual medida de un triángulo isósceles? Según la respuesta que demos a esta primera interrogante ¿cómo son las longitudes de las tres alturas en un triángulo equilátero? ¿Y en uno escaleno? Si un triángulo tiene por lo menos dos alturas de igual longitud, ¿qué tipo de triángulo será?

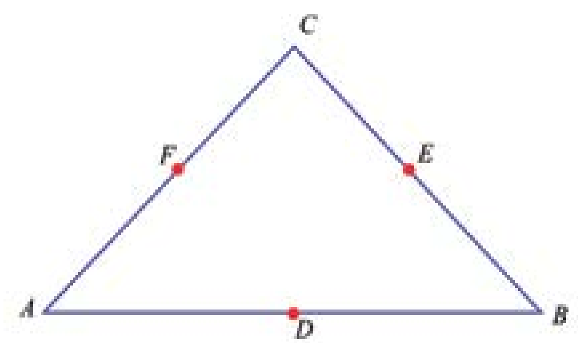
Recordemos que estudiar y trazar las alturas de un triángulo nos ha permitido conocer cómo podemos equilibrar cargas verticales para, por ejemplo, desembarcar vagones del Sistema de Transporte Ferroviario Nacional. Formando parte de él está el Sistema Ferroviario Ezequiel Zamora, el cual ha tenido su primera fase de ejecución en los Valles del Tuy. La construcción de este Sistema ha seguido avanzando. Al respecto, el 17 de enero del 2012, el Ministerio del Poder Popular para la Comunicación y la Información de la República Bolivariana de Venezuela colgaba en su portal una nota que nos decía que: "el ferrocarril es un elemento estructurante de cambio que traerá progreso a las comunidades y en función de estos informes se están planificando los desarrollos que estarán en la vía férrea".

Observemos que en la información dada se ha hablado de una cantidad muy grande de hectáreas de terreno. Para poder conocer ese número es necesario hacer un proceso llamado "levantamiento planimétrico". Éste se realiza mediante el método de triangulación, donde las líneas del levantamiento forman figuras triangulares, de las cuales se miden solamente los ángulos, y los lados se calculan a partir de uno conocido llamado base. Esto lo podremos conocer, a mayor profundidad, en otros años de nivel de Educación Media, cuando estudiemos una parte de la Matemática llamada **trigonometría**. Una red de triangulación se forma cuando tenemos una serie de triángulos conectados entre sí. También podríamos tener cuadriláteros, o cualquier otro polígono, siempre con la condición de que se deben descomponer en triángulos para hacer los cálculos correspondientes.

Veamos, entonces, que nuestros conocidos triángulos son elementos fundamentales para los procesos de levantamiento de información sobre la extensión de la superficie de terrenos. Por ello, necesitamos conocer algunas líneas notables que están presentes en los triángulos. Ya nosotros hemos trabajado en esta lección con una de esas líneas notables como es la altura de un triángulo. Te invitamos a conocer otras líneas notables de los triángulos.

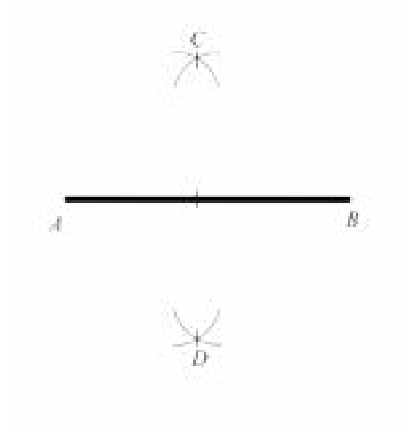
Buscando las medianas

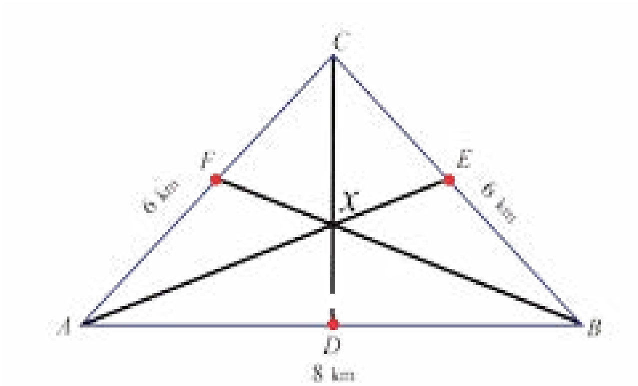
En un pueblo ubicado entre Yaritagua y Chivacoa, poblaciones del estado Yaracuy, se distribuyeron tierras a tres africultoras llamadas Daniela, Hilmar y Ximena. Cada una de ellas tiene sus respectivos sembradíos donde se están desarrollando proyectos agrícolas. Las tres decidieron unir sus esfuerzos y perforar un pozo que sirviera para regar sus siembras. Daniela vive a 6 km de Hilmar, ésta vive a la misma distancia de Ximena y a esta última la separar 8 km de la casa de Daniela, sin que las tres casas estén en la misma dirección. ¿Cómo harían las tres comuneras para que el nuevo pozo esté a dos tercios de la distancia que hay de cada una de las casas hasta la mitad del camino entre las otras dos casas?



Supongamos que Daniela vive en la casa A, Ximena en la casa B e Hilmar vive en la casa C. Esas tres casas representadas por los puntos A, B y C, conforman un triángulo. Vamos a dibujar ese triángulo y procedamos a marcar los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo.

El punto medio de un segmento, como de cualquier lado del triángulo, se traza haciendo un arco con el compás y centro en cada extremo del segmento. Donde se cortan los arcos a ambos lados del segmento se determina el punto medio de ese segmento.





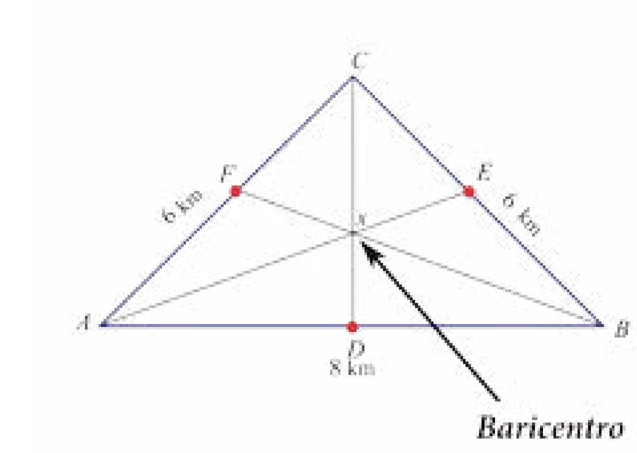
Vamos ahora a trazar un segmento que vaya desde cada vértice del triángulo al punto medio de su lado opuesto. Tendríamos, entonces, tres segmentos, tal como se muestra en la figura.

Cada uno de esos segmentos, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$, recibe el nombre de **mediana**. Tenemos, entonces, que cada triángulo tiene tres medianas.

Una **mediana** de un triángulo es un segmento que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Les proponemos ahora que, junto a otras compañeras y compañeros, midamos la distancia que hay del punto de intersección x de las tres medianas a cada uno de los vértices. Es decir, la mediana AX, la mediana BX y la mediana CX.

¿Cumplen esas distancias con lo solicitado en el problema?



El punto donde concurren las tres **medianas** de un triángulo se llama **baricentro** y determina el **centro de gravedad** del triángulo, es decir que es el punto de equilibrio del mismo.

Así como los triángulos tienen un centro de gravedad, en las personas ese centro de gravedad está en su ombligo y éste determina, por ejemplo, la altura de la baranda de los balcones, la cual debe estar por encima del centro de gravedad de una persona adulta, para evitar que ésta se caiga al asomarse.

Les proponemos ahora medir las distancias de cada una de las medianas y respondan la siguiente pregunta:

¿Qué relación existe entre la distancia desde el punto de intersección de las medianas a cada uno de los vértices y la longitud de la respectiva mediana?

Efectivamente, deben haber comprobado que **el baricentro dista de cada vértice del triángulo los dos tercios de la mediana correspondiente.**

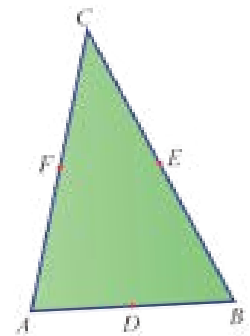
Actividad 5

¿Dónde deberían perforar un nuevo pozo de agua las familias Pinto, Cordero y Flores, si las casas de las dos últimas familias están a 3 km de distancia, la distancia que separa las casas de los Pinto y los Flores es de 4 km y la distancia entre las casas de los Pinto y los Cordero es de 5 km? ¿Qué puedes observar respecto a las medianas trazadas? ¿Dónde se cortan las medianas trazadas? Discutan y reflexionen con sus compañeras y compañeros.

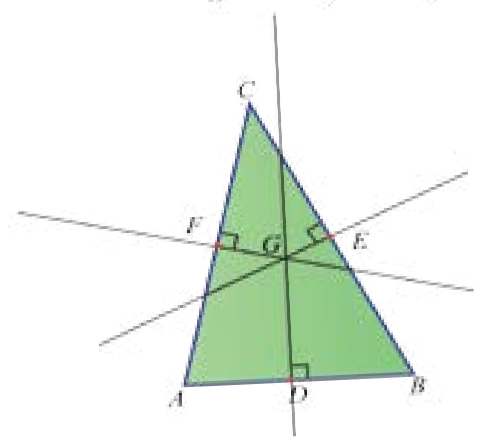
Buscando las mediatrices

Priscila, Romina y Carmen Alicia pertenecen a una comunidad de Valles de Yagua, del estado Carabobo, en el tramo La Encrucijada–Puerto Cabello. Ellas quieren colocar una antena de radio para mejorar las comunicaciones de la comunidad con el área urbana tanto de Valencia como de Maracay. Priscila y Romina viven a una distancia de 3 km y esta última vive al doble de distancia de su amiga Carmen Alicia, la cual vive a 5 km de Priscila, sin que las tres casas estén en la misma dirección. La antena cubre una zona circular y las casas de las amigas para poder tener un radio en funcionamiento deben estar en el perímetro de la circunferencia que cubre la acción de la antena. ¿Dónde debe colocarse la antena?

Supongamos que Priscila vive en la casa A, Romina en la casa B y Carmen Alicia vive en la casa C. Esas tres casas, representadas por los puntos A, B y C, conforman un triángulo. Vamos a dibujar ese triángulo y procedamos a marcar los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo.



Vamos ahora a trazar las rectas perpendiculares que pasen por los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo. Recuerden que cada recta perpendicular debe formar un ángulo de $90°$ en el punto medio del lado respectivo. Tal como se muestra en la figura:

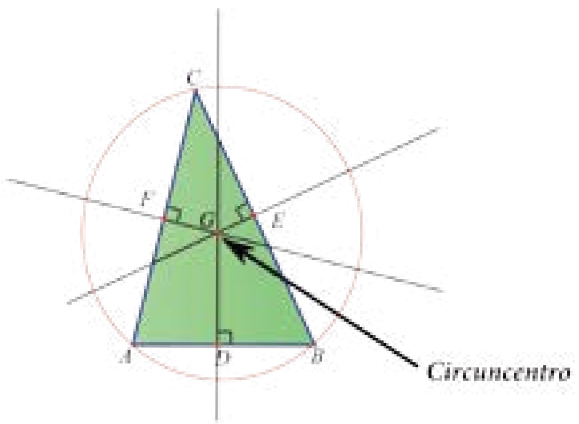


Cada una de esas rectas recibe el nombre de **mediatriz.** Tenemos, entonces, que cada triángulo tiene tres mediatrices.

Una **mediatriz** de un lado de un triángulo es la recta perpendicular a ese lado, que pasa por el punto medio de dicho lado.

El punto donde concurren las tres mediatrices de un triángulo se llama **circuncentro**. Si trazamos la circunferencia, que tiene como centro a ese punto y como radio a la distancia del centro a uno de los vértices del triángulo, veremos que dicha circunferencia toca los tres vértices del triángulo. Es decir, el triángulo queda **inscrito** en esa circunferencia.

Por tanto, en el punto donde se cortan las tres mediatrices, es decir, el circuncentro del triángulo, es donde debe colocarse la antena para que las casas de las comuneras Romina, Priscila y Carmen Alicia cuenten con una cobertura adecuada de sus radios con la zona urbana de Valencia y Maracay.



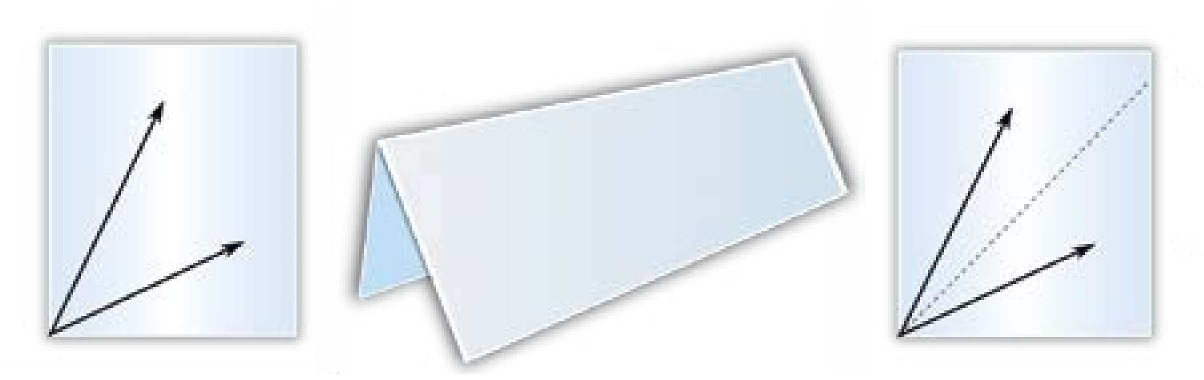
Actividad 6

Carmen Alicia quiere conectar su radio con el de otras dos conuqueras más, Mariana y Daniela. Sabiendo que las casas de las tres están a la misma distancia una de la otra, 4 km ¿Dónde deberían colocar la antena de radio para que las casas de las tres queden sobre el perímetro de la circunferencia que cubre la acción de la antena? ¿Qué pueden observar respecto a las mediatrices trazadas? ¿Dónde se cortan las mediatrices trazadas? Discutan y reflexionen con sus compañeras y compañeros.

Ahora queremos continuar con otra de las líneas notables del triángulo que se conoce como bisectriz. Para ello recordemos que habíamos afirmado que para poder conocer el número de hectáreas de un terreno era necesario utilizar el método de triangulación, donde las líneas del levantamiento forman figuras triangulares, de las cuales se miden solamente los ángulos, y los lados se calculan a partir de uno conocido llamado base. Por tanto, es importante conocer algo más sobre los ángulos, en particular cómo es el proceso para dividir un ángulo. Vamos a ello.

Dividiendo un ángulo

Vamos a conocer cómo podemos dividir un ángulo en dos ángulos que sean congruentes, es decir, que sean de igual medida. Vamos a ayudarnos dibujando un ángulo en una hoja de papel blanca (usa para ello material aprovechable). Remarcamos sus lados y procedemos a doblar la hoja de papel de tal manera que se hagan coincidir los lados del triángulo.

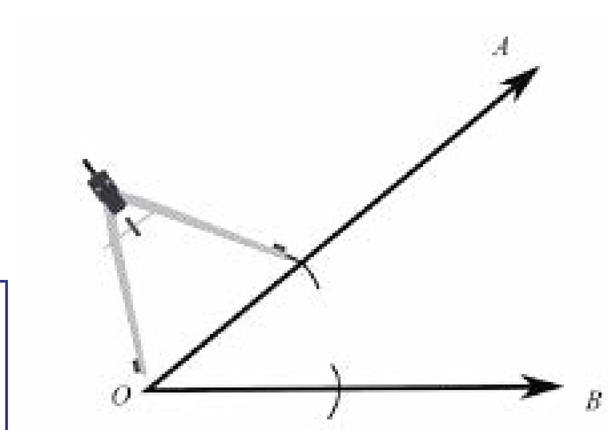


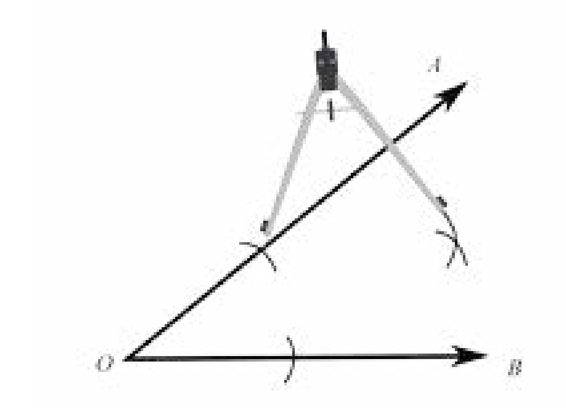
Ese doblez que han realizado ha permitido dividir el ángulo en dos ángulos de igual medida. Hemos obtenido así la bisectriz del ángulo. Tenemos entonces que:

Bisectriz de un ángulo es el rayo que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes.

Ahora presentaremos, paso a paso, la manera de trazar la bisectriz de un ángulo con regla y compás:

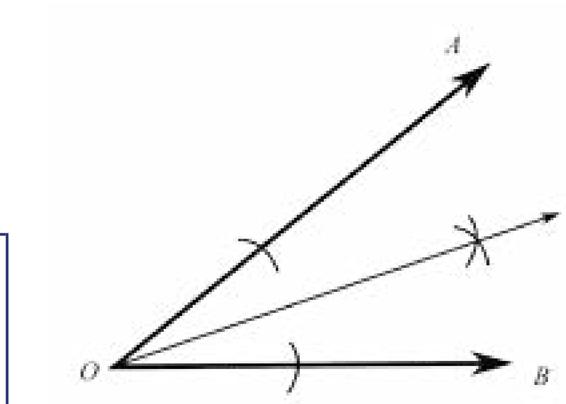
La bisectriz del ángulo AOB se traza haciendo centro con el compás en el vértice del ángulo (O) y marcando ambos lados del mismo como muestra el dibujo.



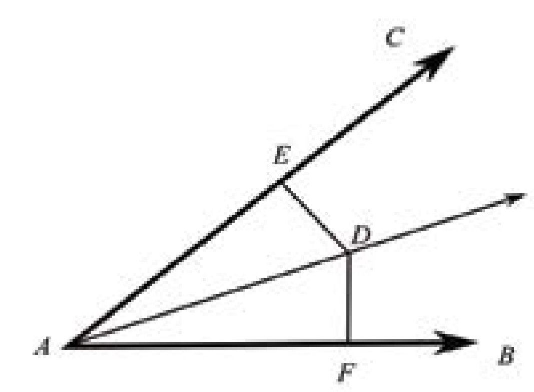


Luego, con el compás hacemos centro en las dos marcas realizadas y trazamos dos arcos que se corten en el interior del ángulo.

El rayo que se traza desde el vértice del ángulo hasta ese punto de corte es la **bisectriz** de ese ángulo AOB.



De acuerdo con sus observaciones, podemos plantear una afirmación que llamaremos conjetura hasta que podamos más adelante demostrarla de manera formal: si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo, entonces, está a igual distancia (equidista) de los lados del ángulo.

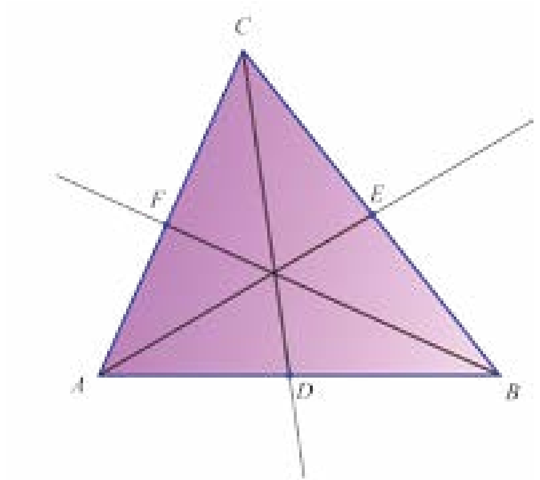


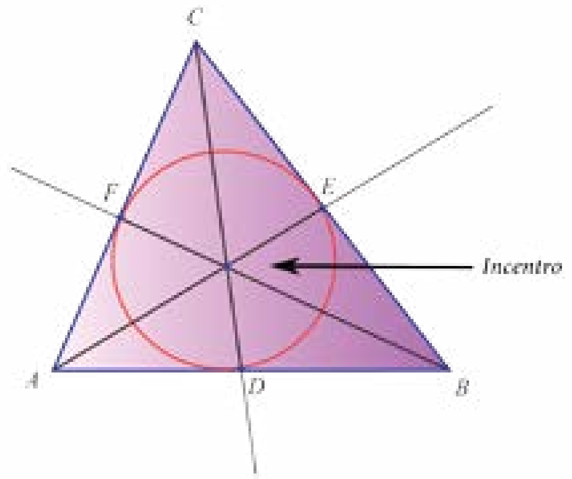
Vamos ahora a seleccionar un punto en la bisectriz del ángulo $\measuredangle CAB$. Llamémoslo D. Ahora tracemos, con una escuadra, el segmento $\overline{DE}$ perpendicular desde D al rayo AC. De la misma manera, tracemos el segmento DF perpendicular desde D al rayo AB. Midamos con un compás, las distancias $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. ¿Cómo son esas distancias? Socialicen con sus compañeras y compañeros los resultados obtenidos.

Buscando las bisectrices

Rafael, Tomás y Leonardo son habitantes de Cocorote, en el estado Yaracuy, ellos quieren construir sus casas sobre cada uno de los lados de un terreno de forma triangular. Además quieren construir un centro de acopio, que esté a igual distancia de cada una de las casas que se van a levantar. ¿Dónde deberían construir sus casas y dónde estaría el centro de acopio?

Para resolver este problema, vamos a representar el terreno de forma triangular y procederemos a trazar las tres bisectrices del triángulo, que son las respectivas bisectrices de cada uno de los ángulos internos del triángulo. Apliquemos lo conocido y realizado en la actividad anterior: tracemos las bisectrices a cada uno de los ángulos.





El punto donde concurren las tres bisectrices de un triángulo se llama **incentro**. Si trazamos la circunferencia que tiene como centro a ese punto *O* veremos que dicha circunferencia toca los tres lados del triángulo, es decir la circunferencia queda inscrita en el triángulo

Por tanto, el punto donde se cortan las tres bisectrices, es decir, el incentro del triángulo, es donde debe construirse el centro de acopio, que estaría a igual distancia de los puntos D, E y F, donde deben construir sus casas Ben-kee, Man-syn y Leonardo.

Actividad 3

1. Dibujen un triángulo equilátero. Tracen, sobre ese triángulo, sus medianas, mediatrices, alturas y bisectrices. ¿Qué pueden concluir con respecto al trazado de esas líneas notables para un triángulo equilátero?

2. Dibujen un triángulo obtusángulo. Tracen sus tres mediatrices. ¿Dónde queda ubicado el circuncentro? ¿En el interior o en el exterior del triángulo? Comparen con el trazado de sus compañeras y compañeros. ¿Qué conjetura pueden hacer?

3. Dibujen un triángulo rectángulo. Tracen sus tres mediatrices. ¿Dónde queda ubicado el circuncentro? ¿En el interior, en el exterior o sobre uno de los lados del triángulo? ¿Qué pueden conjeturar?

11

TIERRAS OCIOSAS Y BALDÍAS

Cálculo de áreas de superficies planas

Distribución de tierras ociosas y baldías

En las comunidades es importante detectar terrenos baldíos o subutilizados que puedan ser destinados a construir viviendas y otras estructuras útiles para los habitantes o para ser destinados a la agricultura.

Para ello contamos con comités de tierras integrales, que colaboran y hacen las funciones de contraloría social, en los procesos de verificación de presupuestos y concreción de planes que les atañen directamente. Cada vez que haya un proceso en el cual se vean involucrados nuestros intereses, debemos participar, para garantizar que esto se haga de acuerdo con los intereses y proyectos acordados por todas las y los miembros de la comunidad.

Trabajemos con las unidades de medida de superficie

El trabajo asignado a las comunidades organizadas es el de calcular el área de los terrenos. ¿Cómo podemos realizar esta tarea?

Primero nos hace falta una **unidad de medida**. ¿Qué es eso? Pues, es una unidad referencial o patrón que utilizamos para saber cuánto mide un terreno determinado. Para ello establecemos una unidad de medida y sus equivalencias, porque ¡imagínate si algunos hablan del terreno en metros cuadrados y otros en centímetros cuadrados o varas cuadradas! ¿Cómo nos entenderíamos?

La unidad de medida referencial para medir **superficies** es la de m^2. Una superficie es una extensión que consideramos en dos dimensiones, el largo y el ancho. Un metro cuadrado es la superficie de una extensión que tiene un metro de largo por un metro de ancho.

> Un **metro cuadrado** ($1\ m^2$) es la medida de la superficie de un cuadrado que tiene un metro de lado.

Como las unidades de medida de superficie son las que se usan para expresar la extensión de dos dimensiones, una hoja de nuestro cuaderno puede ser un ejemplo de una unidad de superficie. Podemos con ella calcular cuántas hojas de ese cuaderno necesitamos para cubrir el piso del aula de clases. Anímense a calcularlo. ¿Podríamos estimar cuántas hojas del cuaderno hacen falta para cubrir el piso?

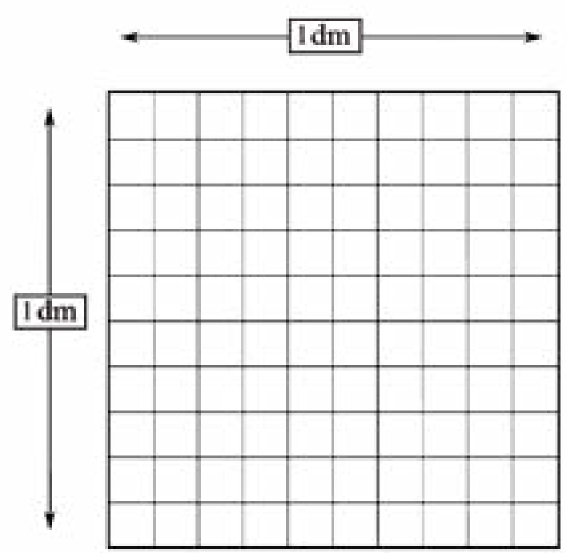
Vamos a construir un patrón para medir algunas superficies. El resultado de la medición es el área de la superficie.

La cuadrícula que observamos tiene por medidas 1 dm por lado, es decir, 10 cm por cada lado.

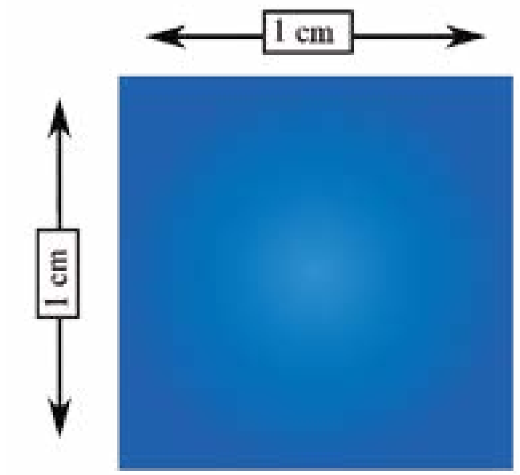
$$1\ dm = 10\ cm.$$

Las dimensiones de esta cuadrícula son 1 dm de largo por 1 dm de ancho. Entonces podemos decir que es una cuadrícula que tiene $1\,dm \cdot 1\,dm = 1\,dm^2$ que se lee, 1 decímetro cuadrado.

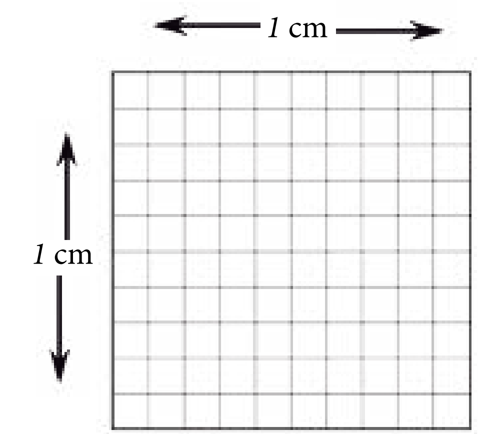
Dibujen esta cuadrícula en una hoja, recórtenla y utilícenla para medir algunas superficies.



Éste puede ser un patrón para medir algunas superficie cuya área es pequeña, como la que puede ocupar la tabla de nuestro pupitre o mesa donde nos apoyamos para escribir. ¿Por cierto, cuántos decímetros cuadrados tendrá?



También podemos utilizar, por ejemplo, como unidad de medida un cuadrito pequeño de esta cuadrícula. ¿Cuál será la superficie que ocupa? Se corresponde con un cm^2. Claro, tiene un cm de largo por un *cm* de ancho. ¿Qué cosas tienen un cm^2?



Si al cuadrado, que tiene un cm de largo por un cm de ancho, le dibujamos una cuadricula de 10×10.

¿A cuánto corresponderá el área de cada uno de los cuadraditos que se han marcado en $1\ cm^2$ que tenemos a continuación?

Tiene 1 mm de largo y 1 mm de ancho. Se corresponde a $1\ mm^2$.

En sus cuadernos, completen el siguiente cuadro. Indiquen, en cada columna, las medidas de cada superficie seleccionada en la unidad correspondiente.

Superficie a medir	Menos de $1\,dm^2$	$1\,dm^2$	Más de $1\,dm^2$
La portada de este libro			$5,68\,dm^2$
Mi cuaderno			
	Menos de $1\,cm^2$	$1\,cm^2$	Más de $1\,cm^2$
	Más de $1\,mm^2$ pero Menos de $1\,dm^2$	Más de $1\,dm^2$ pero Menos de $1\,m^2$	Más de $1\,m^2$ pero Menos de $10\,m^2$

Investiguemos

¿Cuántos decímetros cuadrados se necesitan para tener un metro cuadrado? Si cada uno de sus compañeras o compañeros del curso representa cuatro decímetros cuadrados en papel y los coloca junto a los de sus compañeros formando entre todos un cuadrado, podemos cubrir una superficie de un metro cuadrado y elaborar este patrón. Inviten al profesor o profesora a realizar esta actividad.

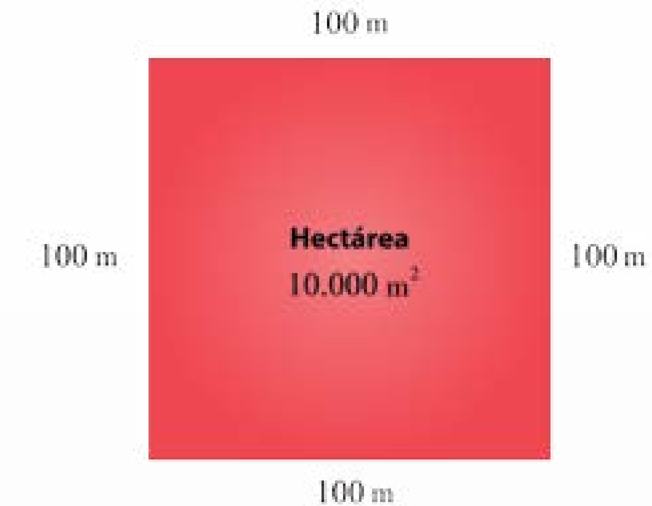
Conversemos sobre la Ley de Tierras

El 13 de noviembre del 2001, el Presidente de la República decretó la Ley de Tierras y Desarrollo Agrario, cuyo objeto principal es el establecer las bases del desarrollo rural integral y sustentable para el desarrollo humano y crecimiento económico del sector agrario, la justa distribución de la riqueza y una planificación estratégica, democrática y participativa. Se elimina el latifundio y la tercerización como sistemas contrarios a la justicia, la igualdad, al interés general y a la paz social en el campo. Se asegura la biodiversidad, la seguridad agroalimentaria y la vigencia efectiva de los derechos de protección ambiental y agroalimentario de la presente y las futuras generaciones.

Pero, ¿a qué se refiere el latifundio? Es toda aquella tenencia de tierras ociosas o incultas, en ciertos espacios geográficos, que pueden ser utilizados dentro del marco jurídico a favor del beneficio solidario y colectivo. El latifundio es contrario al interés de la República, porque afecta aspectos concernientes a la soberanía nacional, entre ellos están: alimentación, comercio, salud, entre otros.

Conozcamos sobre medidas agrarias

Reciben el nombre de medidas agrarias aquellas que se emplean para medir terrenos y parcelas agrícolas. La unidad de medida es el área. Un área es equivalente a un terreno en forma cuadrangular que tenga 100 m de largo por 100 m de ancho, es decir, un área tiene $100\ m^2$, y utilizamos, como símbolo para referirnos a esta unidad, la letra a.



Entre los múltiplos del área se encuentra la hectárea (ha) que es equivalente a 100 áreas o $10.000\ m^2$. Un submúltiplo del área es el que estudiamos anteriormente, el metro cuadrado, que equivale a la centésima parte del área y también lo llamamos centiárea (ca).

¿Cuántas hectáreas se necesitan para tener un kilómetro cuadrado?

¿A cuántas hectáreas equivale un terreno de forma cuadrada el cual mide 250 m de lado?

Calculemos áreas

Los Comités de Tierra Urbana Integral (CTUI) son los llamados a colaborar con la Gran Misión Vivienda y la Gran Misión Agrovenezuela, para ayudar en la detección y estudio de las tierras baldías u ociosas para su aprovechamiento en beneficio de las y los ciudadanos de la nación. En una revisión de un sector en el centro del país, se detectaron algunos terrenos que han sido propuestos para ser utilizados por estas misiones. A continuación, se muestran algunos de los croquis que fueron presentados a los que hay que calcularles el área y trazarles las poligonales que los delimitan. Así que habrá que estudiar algunas de las formas que tienen estos croquis para calcular su área. El trazado de los croquis y el cálculo de áreas requieren conocer las fórmulas correspondientes para algunos polígonos. Pero antes estudiaremos algunos cuadriláteros y sus características, como las tierras que estamos revisando, y posteriormente calcularemos sus áreas.

Hacia la búsqueda del cuadrilátero más famoso y del cuadrilátero más querido

Existen diversos criterios para clasificar o agrupar los polígonos con el objeto de estudiar sus características. Un criterio puede ser considerar el número de lados que tiene, o la medida de sus ángulos. En otro caso, se pueden agrupar, según tengan lados paralelos o que la medida de sus lados y ángulos sean iguales. En todo caso, estos criterios son a su vez características o propiedades de los polígonos que nos permiten conocerlos y utilizarlos. Veamos un ejemplo de cómo se utilizan estos criterios cuando estudiamos los cuadriláteros. Primero, recordemos que un **cuadrilátero** es un polígono que tiene cuatro lados. Podemos clasificarlo utilizando como criterio el del paralelismo entre sus lados. Este criterio se enfoca en comparar los lados y ver si son o no paralelos.

Fíjense, como un cuadrilátero tiene cuatro lados, comparemos los lados **no consecutivos**. Puede ocurrir que el cuadrilátero **no tenga lados paralelos**, que tenga **sólo un par** de lados paralelos o que tenga **dos pares de lados paralelos**. Según el caso, recibirán un nombre como iremos debatiendo y registrando en los cuadernos.

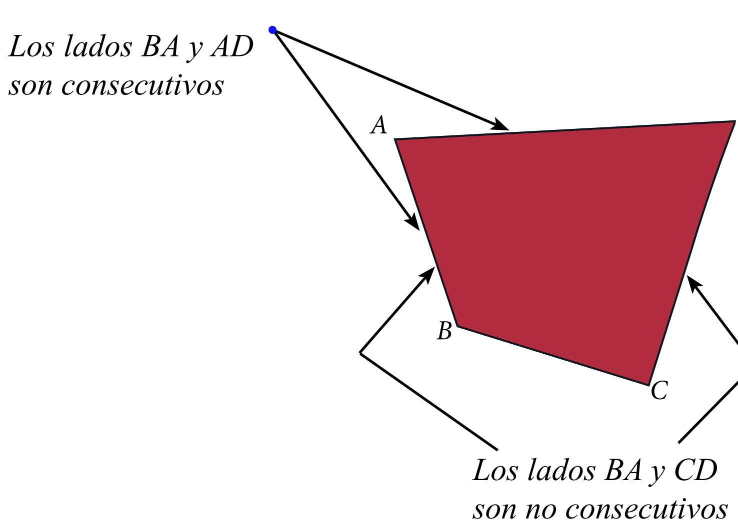


Figura 1

Observen que, el cuadrilátero de la *figura 1*, **no tiene lados paralelos**. Si comparamos sus lados **no** consecutivos dos a dos, tenemos: $\overline{BA} \nparallel \overline{CD}$ (que leemos, los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos). El otro par de lados no consecutivos son los lados $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ y, para los cuales también se verifica que $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$. Este cuadrilátero recibe el nombre de trapezoide. Todo cuadrilátero sin lados paralelos lo denominaremos **trapezoide**.

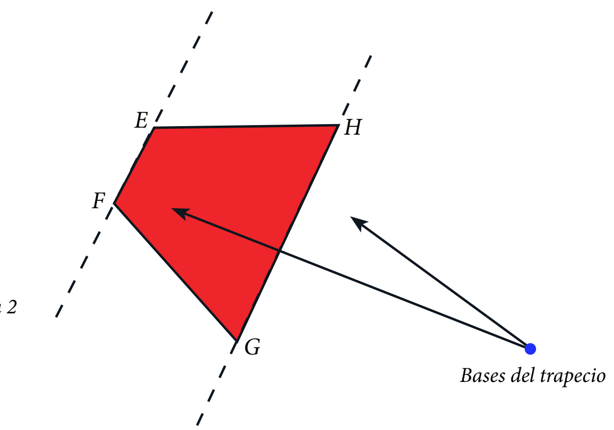
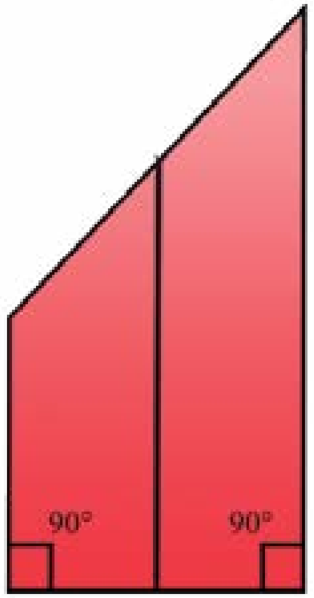


figura 2

Ahora, si un cuadrilátero tiene **un par de lados paralelos**, lo denominaremos trapecio. En la *figura 2* hemos representado un **trapecio**. Los lados que son paralelos se llaman **bases del trapecio**.

Un trapecio puede tener dos lados de igual medida. Si es así, lo denominaremos **trapecio isósceles**. Si todos sus lados son de diferente medida, diremos que es un **trapecio escaleno.**

Ahora, si atendemos al criterio de ángulos, podemos tener un **trapecio** que sea **rectángulo**, si tiene dos ángulos rectos.



Traten, junto con sus compañeras y compañeros y con la ayuda del profesor o profesora, de dibujar algunos trapecios isósceles e indiquen cuáles son sus bases y sus ángulos congruentes. Otro elemento importante en todo cuadrilátero es la altura.

En un trapecio su **altura** viene dada por la distancia entre los lados paralelos. Hay un segmento que denominamos **mediana del trapecio** y es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos. Si se recuerdan del trapecio y sus propiedades, pueden incluirlos entre los cuadriláteros famosos, pero hay unos más famosos que otros.

Cuadriláteros con dos pares de lados paralelos

Un cuadrilátero que tenga dos pares de lados paralelos se denomina **paralelogramo**. Dibujemos algunos.

Tracemos un segmento y vamos a denotar sus extremos por las letras A y B (*figura 3*).

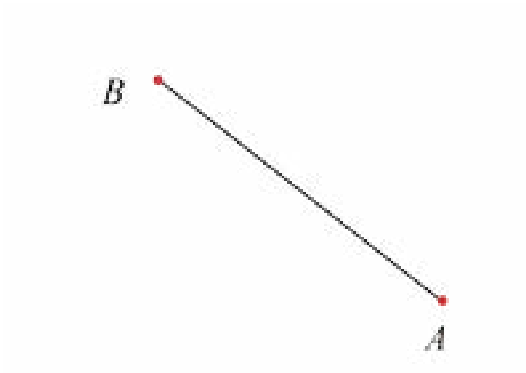


Figura 3

Como queremos construir un paralelogramo, necesitamos otro segmento que esté sobre una recta paralela al segmento $\overline{AB}$. Tracémoslo con ayuda de la regla y escuadra y denotemos sobre él un punto. Sea éste el punto C (*figura 4*).

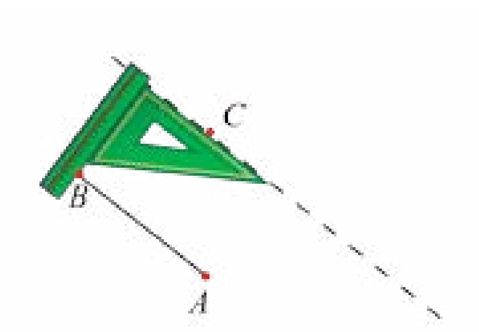


Figura 4

Y ahora tracemos el segmento que une los puntos B y C. Tracemos ahora la recta que pasa A y es paralela al segmento $\overline{BC}$ (*figura 5*).

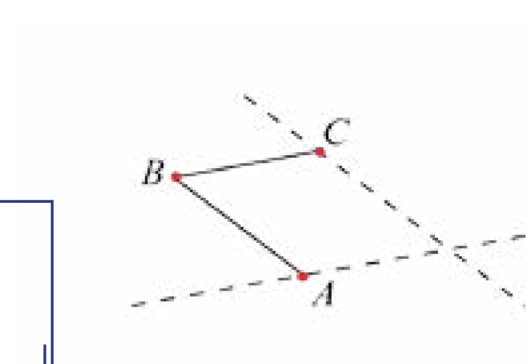


Figura 5

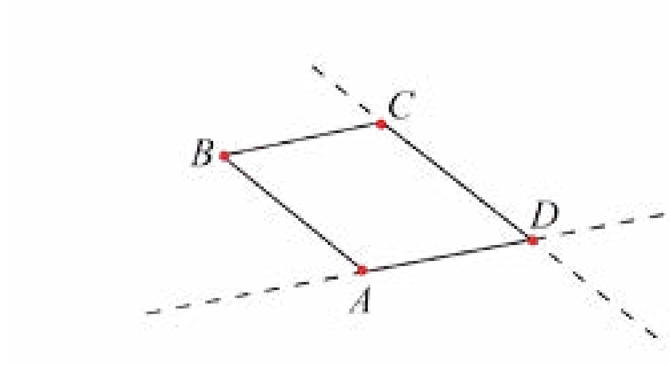
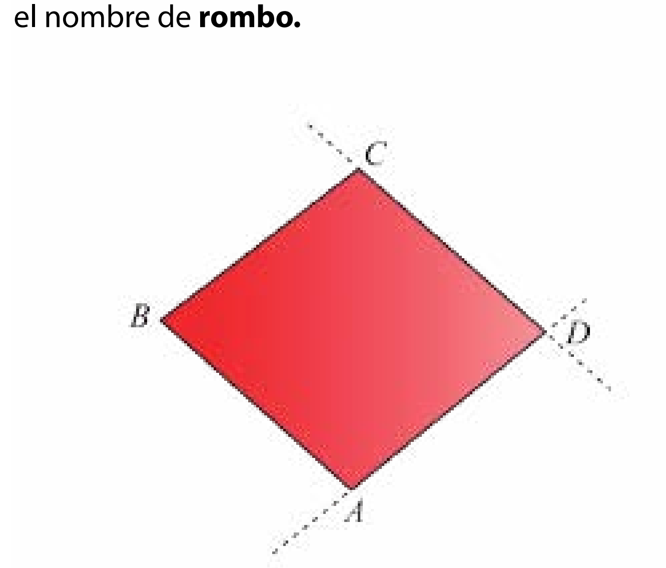


Figura 6

Denotemos el punto de corte con la letra D. Hemos construido un paralelogramo de vértices $ABCD$ (*figura 6*).

Hay otros casos de paralelogramos que es interesante conocer. Veamos la *figura 6* que hemos trazado. Si medimos sus lados y éstos son de igual longitud, este paralelogramo recibe el nombre de **rombo.**



Un **rombo** es un paralelogramo que tiene todos sus lados congruentes, es decir, que son de medidas iguales.

Por otra parte, si una figura tiene los lados paralelos como se observa en la *figura 5* y el segmento $\overline{BC}$ fuera perpendicular a la recta en el punto C, se formaría un ángulo recto en dicho punto, al igual que en el punto A, por ser rectas paralelas. Al dibujar el otro lado paralelo al lado $\overline{BC}$, obtendríamos un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos. A este tipo de paralelogramo lo denominamos **rectángulo** (*figura 7*).

Un **rectángulo** es un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos.

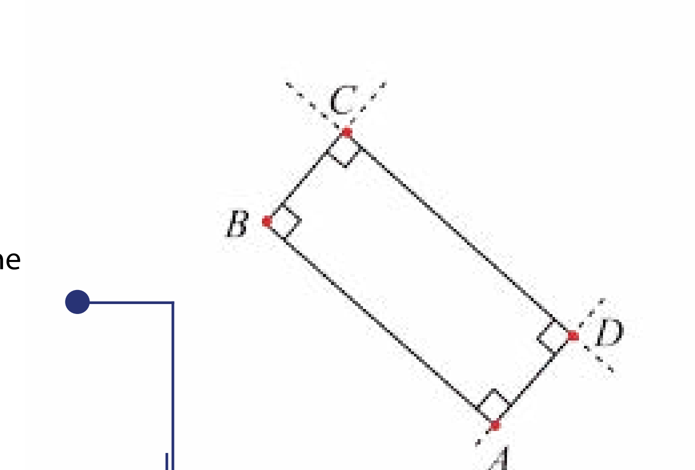


Figura 7

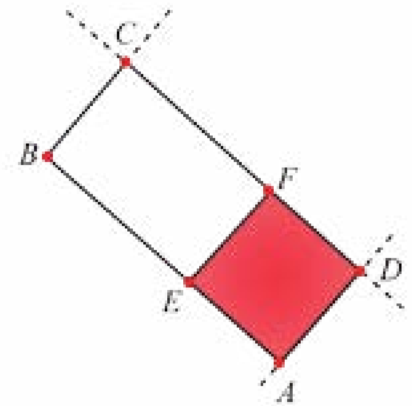
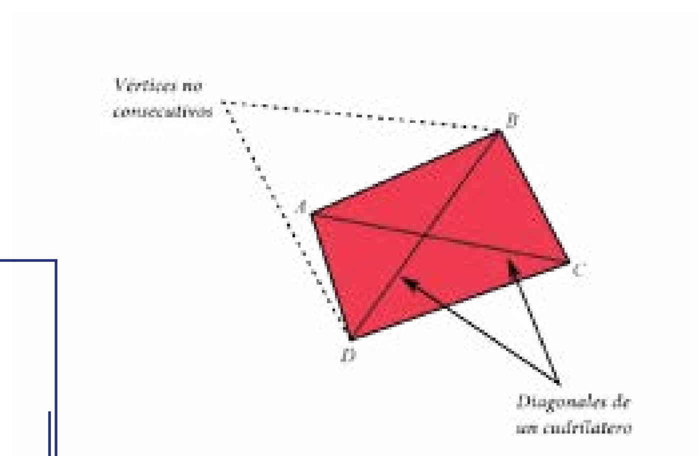


Figura 8

Pero si además siendo rectángulo tiene cuatro lados de igual medida, entonces, a ese paralelogramo $FDAE$ lo denominamos **cuadrado** (*figura 8*). Por tanto, el **cuadrado** es un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos y sus lados de igual medida.

Hay elementos que podemos destacar en todos los paralelogramos. Por ejemplo, todo paralelogramo tiene dos **diagonales**. Éstas son los segmentos que unen dos **vértices** no consecutivos del mismo. En particular en los paralelogramos, las diagonales se cortan en su punto medio. ¿Qué pasa con las diagonales de los otros cuadriláteros?



El cuadrilátero más querido

Los cuadriláteros más famosos son el cuadrado y el rectángulo. Pero, ¿cuál es el cuadrilátero más querido? Vamos a construirlo y les tocará, hacer sus propios diseños.

Necesitaremos al menos dos segmentos secantes de distintas medidas, éstos serán las diagonales del cuadrilátero. Pero para ser el más querido de los cuadriláteros, queremos un diseño que pueda volar.

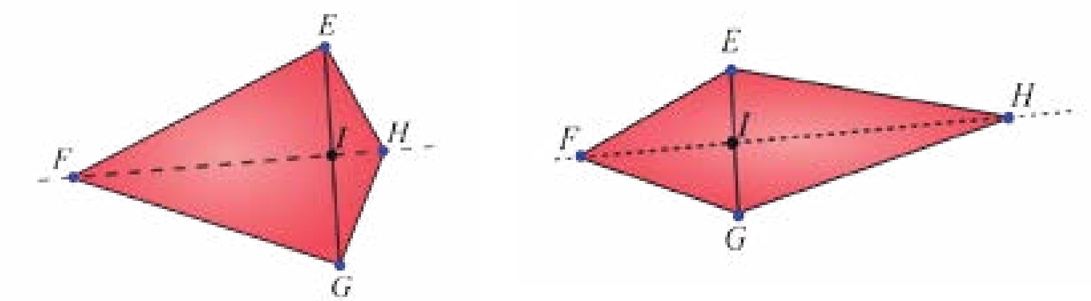
Para que esto ocurra, necesitaremos determinar el punto medio del segmento $\overline{EG}$ y allí intersecar las dos diagonales de manera que hagan un ángulo recto en dicho punto, es decir que sean perpendiculares.

Una **cometa** es un cuadrilátero cuyos lados consecutivos son congruentes dos a dos.

Entre los cometas más queridos tenemos al rombo y también está el más famoso: el cuadrado. El cuadrado también es un rombo, no importa cómo lo pongan. ¿Puedes explicar por qué?

Si estamos diseñando una cometa para hacerla volar, nos bastará buscar el punto medio de una de las dos veradas que serán las diagonales y superponerlas (formando una cruz). Luego amarrarlas con pabilo para fijarlas.

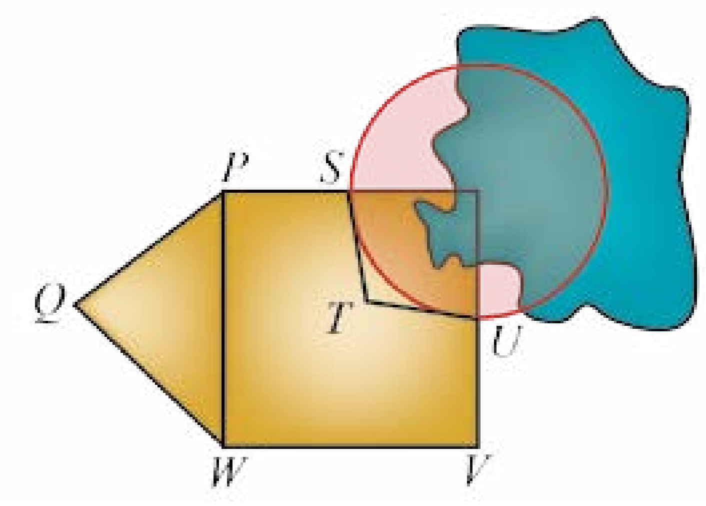
Investiguen con sus compañeras y compañeros las propiedades de estos cuadrilateros llamados cometas.



Conversemos sobre el cálculo de áreas

Volviendo a la situación planteada para calcular el área de los terrenos y ya teniendo en cuenta las unidades de medida y las formas, tenemos que pensar en cómo calcular su área. Comencemos por el croquis presentado por una de las comunidades de este comité.

¿Cuál camino debemos seguir para calcular el área de un terreno?



El terreno tiene forma de heptágono. Es decir, siete lados y siete ángulos. Sus vértices son los puntos $SPQWVUT$. La idea que se le ha ocurrido a los miembros de este comité para calcular el área de este terreno es dividirlo en partes o subáreas, y luego sumar los resultados parciales para tener el área total.

Aquí les presentamos varias ideas de la discusión del equipo. La primera fue la de dividirlo en tres regiones. La región R_1 que tiene forma de trapecio, la región R_2 que tiene forma de triángulo y la región R_3 que corresponde a un cuarto del área de un círculo. La solución sería la de calcular la suma de la región R_1 *y* R_2 y luego restarle el área de la región R_3. Esto daría el área del terreno buscado, como se muestra en la *figura 9* .

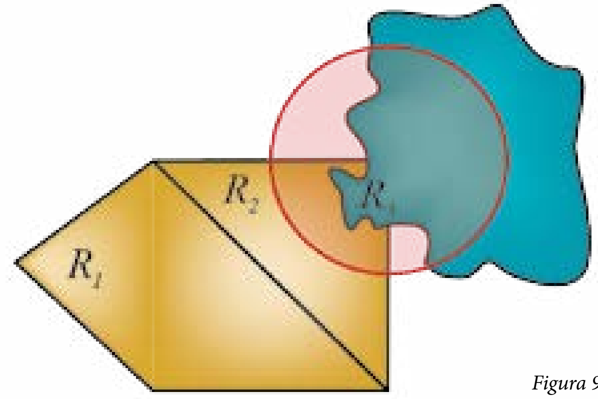


Figura 9

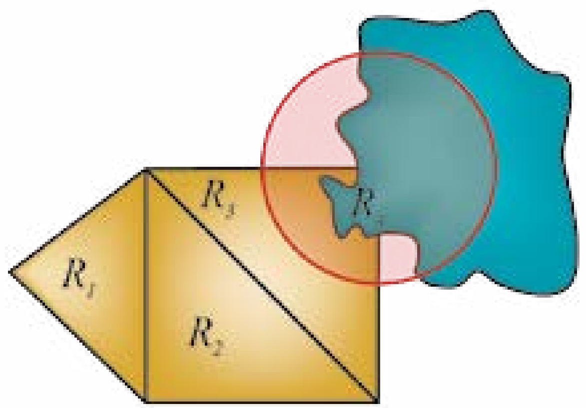


Figura 10

Otra idea , mostrada en la *figura 10*, que surgió de la discusión fue la de dividir el plano en cuatro regiones: las regiones R_1, R_2 *y* R_3 que tienen forma de triángulo y la región R_4 que sería la que se corresponde con un cuarto del círculo. La idea aquí propuesta era la de calcular el área de los triángulos y restarle el área correspondiente al cuarto del círculo.

¿Qué otras soluciones creen ustedes que pueden ser respuesta al cálculo del área del terreno?

Hubo muchas propuestas y finalmente se acordó dividirlo como se muestra en la *figura 11*.

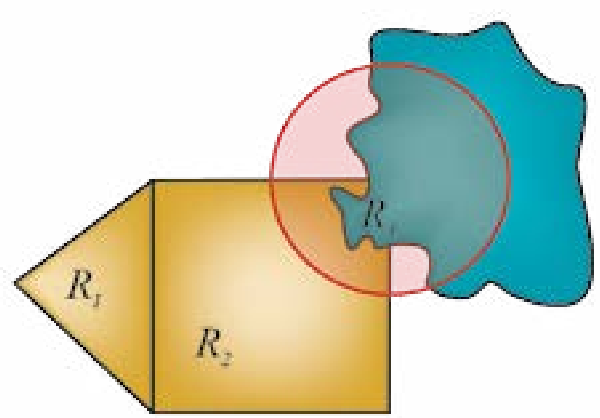
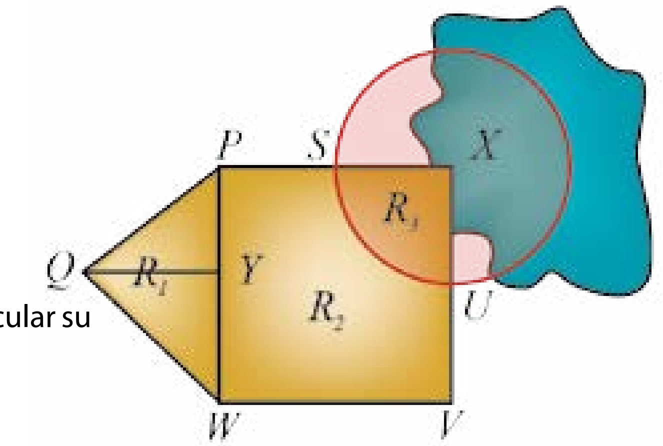


Figura 11

Un triángulo R_1, un cuadrado R_2, sumar $R_1 + R_2$, y luego restarle un cuarto del círculo, es decir R_3. El área estaría determinada por la solución de esta operación:

$$A = (R_1 + R_2) - R_3$$

Cálculo del área del terreno



R_1 es un triángulo, por lo tanto, para calcular su área utilizamos la fórmula siguiente:

$A = \frac{b \cdot h}{2}$, donde ***b*** es la base y ***h*** es la altura.

La longitud de uno de los linderos del terreno, señalado como PW, es 4 km. En el gráfico lo tenemos como $WP = 4$ cm, debido a la equivalencia de 1cm en el plano a 1 *km* en la realidad.

Como $\overline{WP}$ es la base del triángulo PQW , y su altura QY= 2 cm. Entonces, la medida de la superficie triangular será la siguiente: $A = \frac{WP \cdot QY}{2} = \frac{4\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}}{2} = 4\,\text{cm}^2$

Por tanto, el área de R_1 es: $R_1 = 4$ km^2

Corresponde ahora calcular el área de la región R_2. Esta región tiene forma de rectángulo. En particular es un cuadrado. Por lo tanto, la fórmula que responde al cálculo del área de un rectángulo: es: base por altura. Por ser este rectángulo un cuadrado, sus lados son de igual medida. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula de cálculo del área de un cuadrado:

$$A = L \cdot L = L^2$$

Al realizar este cálculo, se obtiene: $A = 4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = (4)^2\ \text{cm}^2 = 16\ \text{cm}^2$.

Lo que es equivalente a 16 km^2. Por tanto, $R_2 = 16$ km^2

Ahora toca calcular el área de un cuarto de círculo, cuyo radio es igual a 2 cm representado en el segmento SX, es decir, SX= 2 cm. Recordemos que, en la lección n° 9 de 6$^{\text{to}}$ grado, aprendimos a calcular el área de un círculo. Por lo tanto: $A = \pi \cdot r^2$

Su resultado habrá que dividirlo entre *4*, puesto que hay un cuarto de terreno que se debe restar, que es la zona de protección del lago. Queda entonces que la R_3 responde a la siguiente fórmula:

$R_3 = \frac{\pi r^2}{4}$, considerando que $\pi \approx 3{,}1416$. Se tiene entonces el siguiente cálculo:

$R_3 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3{,}1416(2\,\text{cm})^2}{4} = \frac{3{,}1416(4\,\text{cm}^2)}{4} = 3{,}1416\ \text{cm}^2$. Luego, $R_3 = 3{,}1416$ km^2

Ahora corresponde calcular el área del terreno, según se había dicho anteriormente, con la fórmula $A = (R_1 + R_2) - R_3$.

Sustituimos, en esta ecuación, los resultados que hemos encontrado de cada región y resolvemos la operación: $A = (R_1 + R_2) - R_3$

$$A = (4 \text{ km}^2 + 16 \text{ km}^2) - 3{,}1416 \text{ km}^2$$

$$A = 20 \text{ km}^2 - 3{,}1416 \text{ km}^2$$

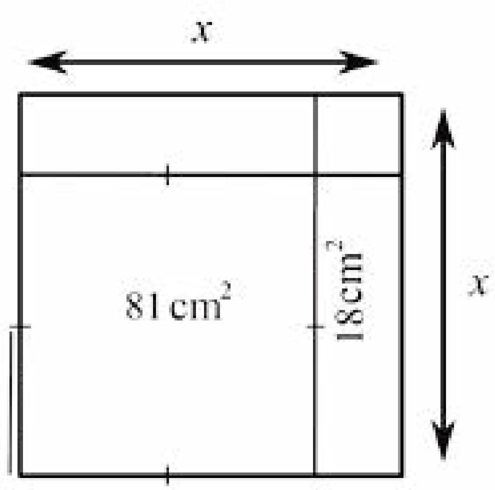
$$A = 16{,}86 \text{ km}^2$$

En conclusión se obtiene que el área del terreno que corresponde a esta comunidad es de $16{,}86 \text{ km}^2$. ¿A cuántas hectáreas corresponderá esta superficie?

Calculemos las áreas de terrenos propuestos por las comunidades

Ahora les corresponde calcular el área de los otros terrenos propuestos por las diferentes comunidades. A continuación, les presentamos el mapa de uno de los terrenos. Discutan con sus compañeras y compañeros las posibles soluciones que pueden dar, luego seleccionen alguna de las propuestas y determinen su área.

En el mapa del siguiente terreno la zona deportiva está ubicada en la parte superior, del cuadrado de 81 cm² que se muestra en la figura dada. Se desea saber cuál es el área de dicha zona.



¿Cuánto papel se necesita para forrar una cometa?

En la semana aniversario de la institución se ha pensado en realizar un festival de papagayos. Se ha planificado que los estudiantes con la ayuda de las profesoras y profesores de Matemática ayuden a diseñar los mismos. La tarea que toca a las y los estudiantes del curso es determinar la cantidad de papel que ha de comprarse para la elaboración de 15 cometas, donde el punto de intersección de una de las diagonales es un cuarto de la misma, y el punto de intersección de la otra es su mitad.

Las veradas se han cortado con las siguientes medidas: una mide 45 cm y la otra verada mide 30 cm. Presenten el informe que explique la cantidad aproximada de papel que ha de comprarse para forrar las cometas del festival.

Actividad

1) Completen en sus cuadernos la siguiente tabla:

Área					
Paralelogramo	**Triángulo**	**Círculo**	**Cuadrado**	**Rombo**	**Trapecio**
Producto de su base por su altura	Mitad del producto de su base por su altura	Producto de π por el cuadrado de su radio			
$A = b \cdot h$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$A = \pi \cdot r^2$			
h es la base b es la altura	h es la base b es la altura	r es el radio			
h, b	h, b				
		Arepa		Papagayo	

12 PROGRAMA DE ALIMENTACIÓN ESCOLAR
Datos estadísticos y medidas de tendencia central

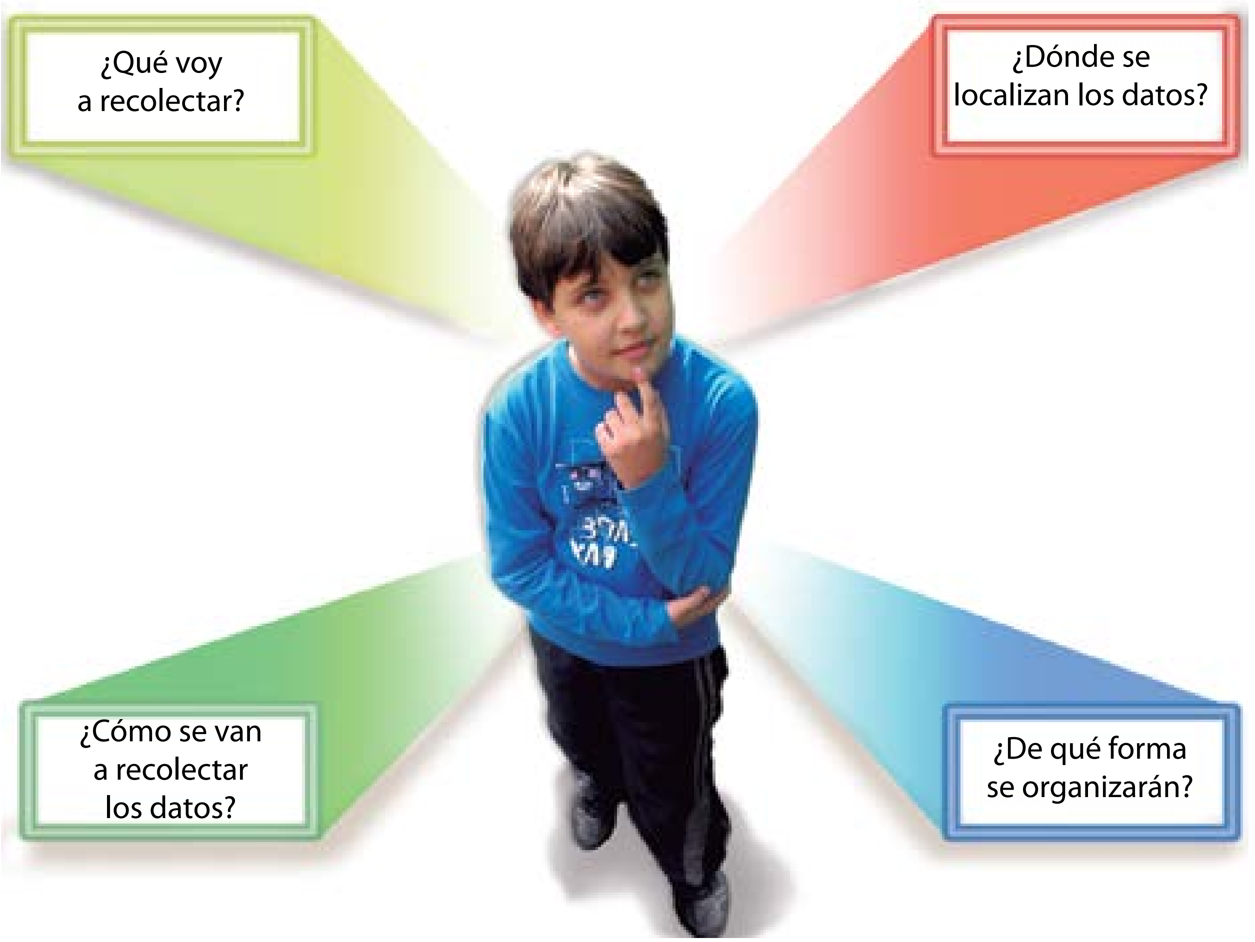
Los alimentos son sustancias que sirven para nutrir el cuerpo y producir en nuestro organismo la energía que necesita para realizar sus actividades diarias, como por ejemplo, caminar, trotar, correr, jugar, estudiar y pensar. Por tal motivo, existen programas de alimentación escolar que se encargan de la organización de una guía de menú para las escuelas, de acuerdo con una alimentación sana, variada y muy bien balanceada para todos los niños, las niñas y adolescentes sin discriminación ni exclusión alguna. Estos programas están supervisados por el Instituto Nacional de Nutrición (I.N.N.).

Si quisiéramos hacer un estudio estadístico en un liceo que posee un comedor escolar podríamos preguntarnos: ¿qué comen más frecuentemente las y los estudiantes en un comedor escolar? O, ¿qué comida es la preferida por ellas y ellos en el comedor escolar? ¿Cuál es la opinión que tienen acerca de la calidad de los alimentos que sirven en el comedor? Para poder responder preguntas como éstas podemos usar la estadística. Primero es necesario recordar los contenidos de recolección, organización, análisis e interpretación de datos que ya hemos visto.

¿A qué llamamos recolección de datos?

Los datos en el ejemplo que venimos trabajando vienen a ser las respuestas que nos den los y las estudiantes cuando les preguntamos, o lo que observemos acerca de los alimentos que se consumen en el comedor. Estos datos pueden ser cualitativos (tipo de alimentos) o cuantitativos (cantidad en gramos de cada alimento servido), mediante los cuales se miden las características de los objetos, sucesos o fenómenos a estudiar.

Ahora bien, para recolectar datos debemos saber:



Para ayudarte a resolver estas incógnitas vamos a plantear un ejemplo de la manera más sencilla posible. Luego de examinar lo que te planteamos, discutan con sus compañeras y compañeros y con su profesora o profesor qué otras respuestas daríamos a lo que debemos saber para recolectar los datos.

De todos los estudiantes de un liceo, se seleccionó una muestra o subconjunto de 248 estudiantes y se les realizó una encuesta sobre la opinión que tienen acerca de la comida que sirven en el comedor escolar. Esto nos permitió recolectar los datos que luego se organizaron y se clasificaron en grupos de calidad: regular, aceptable, buena, muy buena y excelente. Se contaron las veces que hubo respuestas en cada grupo, y nos preparamos para la presentación de los datos que, en este ejemplo, se hizo de forma tabular.

En 6to grado vimos que la encuesta y la observación son técnicas de recolección de datos. Se les llaman técnicas porque responden a la pregunta: ¿Cómo recolectamos los datos estadísticos?

Tabla 1. Opinión sobre la calidad de la comida del comedor escolar del liceo.

Opinión	Estudiantes	*fr*	*fr%*
Regular	16	0,06	6
Aceptable	27	0,11	11
Buena	96	0,39	
Muy buena	79		32
Excelente	30		
Total	248	1,00	100

Categorías

Variable cualitativa

Tamaño de la muestra

Frecuencias

Observemos la *tabla 1*. ¿Por qué se dirá que lo que aparece en la 1^{era} columna llamada "opinión" es una variable? Para nuestro problema esta variable es cualitativa porque está midiendo una cualidad y como la cualidad presenta un orden natural entre mayor y menor calidad de la comida del comedor, según la opinión de los encuestados, se dice que es ordinal. En la 1^{era} fila (horizontal) se colocan los encabezados, éstos identifican qué aparece en cada columna.

Repasen los contenidos vistos en 6to grado y verán que lo que aparece en la segunda columna vienen a ser las frecuencias simples. Con la ayuda de otra u otro estudiante redacten qué sería una **frecuencia simple** y a qué número debe ser igual la suma de esas frecuencias. Compartan con sus otras compañeras y compañeros, así como con su profesora o profesor sus ideas y en particular sus argumentos.

En la tercera columna aparece la frecuencia relativa de cada nivel de "opinión", y en la última columna, la frecuencia relativa porcentual para cada nivel de opinión. En estadística a las proporciones también las llamamos **frecuencias relativas simples**. Cuando las frecuencias relativas se multiplican por 100, las llamamos porcentajes.

Para calcular la frecuencia relativa consideramos el tamaño de la muestra, que en nuestro caso son los 248 estudiantes (total simple), y comparamos con cada grupo de estudiantes que seleccionaron un nivel de opinión (frecuencia simple) utilizando este cociente:

$$fr = \frac{cada\ frecuencia\ simple}{total\ de\ datos}$$

Entonces, la frecuencia relativa de los estudiantes que opinan que la comida del comedor escolar en regular se calcula así:

$$fr = \frac{frecuencia\ simple\ de\ opinión\ regular}{total\ de\ estudiantes} = \frac{16}{248} = 0,06$$

En proporción, el resultado anterior nos indica que aproximadamente por cada estudiante que dijo que la comida del comedor escolar era regular, 16 estudiantes de ese liceo opinaron que los alimentos eran: aceptables, buenos, muy buenos o excelentes. Calculen la menor fracción equivalente a ésta y analicen si lo que se indicó en este párrafo es correcto.

Cuando queremos expresar nuestros resultados en términos de porcentajes es como si estuviésemos hablando de proporciones entre una parte y la totalidad, si consideramos nuestro total de datos de 248 estudiantes, esto equivale a decir 100 por ciento, quedando la fórmula en la cual se comparan cada una de las frecuencias simples con su total multiplicadas por cien, de donde obtenemos la expresión que nos permite calcular la frecuencia relativa:

$$fr\% = \frac{cada\ frecuencia\ simple}{total\ de\ datos} \cdot 100$$

Si queremos ver qué porcentaje de estudiantes opinan que la comida del comedor es regular, aplicamos:

$$fr\% = \frac{16}{248} \cdot 100 = 0,06 \cdot 100 = 6$$

Eso nos indica que por cada 100 estudiantes encuestados de ese liceo, 6 opinaron que la comida era regular.

Completen los cálculos que hacen falta en la *tabla 1*, analicen sus resultados de acuerdo con la situación que se está estudiando y escriban en sus cuadernos: ¿qué opinan los estudiantes de la comida del comedor escolar?, ¿cuántos opinan que la comida es buena?, y ¿qué porcentaje de estudiantes opina que la comida es aceptable?

La Estadística es muy útil para analizar lo que ocurre en nuestra realidad, en nuestra comunidad, en nuestro liceo. A partir del análisis de los datos se pueden tomar decisiones y emprender acciones colectivas e individuales para mejorar la situación.

Les proponemos trabajar en esta situación: ¿En su liceo hay comedor escolar? En el caso de que sí lo haya, ¿consideran que los resultados de la opinión sobre la calidad de los alimentos que se sirven sea la misma de las de esta lección? ¿Por qué? Tomen una muestra de estudiantes de su liceo y pregúntenles su opinión sobre la calidad de los alimentos del comedor. Comparen las frecuencias relativas simples o porcentuales de su encuesta con las que aparecen en esta lección. Conversen en clases con su profesora o profesor y el resto del curso los resultados obtenidos en la encuesta. Si cada estudiante o equipos de estudiantes de su curso tomaran una muestra distinta de estudiantes del liceo, ¿qué debería ocurrir con los resultados? Publiquen en una cartelera los resultados de su estudio estadístico y las recomendaciones para optimizar el servicio que presta el comedor.

Si en su liceo no hay o no funciona el comedor escolar, indaguen las razones por las cuales ustedes no cuentan con este servicio que es un derecho para los estudiantes de este país y, en especial, para los de las escuelas y liceos públicos. Mencionen posibles soluciones a esta situación e intenten emprender alguna de ellas.

Las variables cualitativas pueden tener una escala de medición **nominal**, eso quiere decir que los resultados son categorías o atributos que sólo clasifican. Ejemplos: región en que vives, sexo, estado civil, asignatura que más te gusta. A estas variables se les llama variables cualitativas nominales.

Las variables cualitativas **ordinales** pueden tener categorías o rasgos con cierto orden de posición o clasificación ordenada como el nivel de satisfacción (muy satisfecho, satisfecho, poco satisfecho), orden de llegada en una carrera, el rango en una empresa o la variable que hemos estudiado en esta lección.

Al conjunto total de elementos (objetos, personas) a los que se les quieren estudiar sus características se les conoce como **universo estadístico**. Al conjunto de las características analizadas del total de elementos se les conoce como **población estadística**. Cuando una población estadística es muy numerosa, se hace difícil analizar a todos los elementos con sus características. En ese caso se seleccionan algunos elementos representativos de la población para hacer el estudio estadístico y se les miden sus características. El grupo de características de los objetos o individuos seleccionados se denomina **muestra estadística**.

Comedor popular San Félix San Félix, edo. Bolívar

¿Sabían que existen comedores de alimentación para personas que no tienen acceso a la alimentación de forma completa y balanceada? En el país tenemos casas de alimentación, para fomentar la calidad de vida de los venezolanos, esto llevado a cabo por el Ministerio del Poder Popular para la Alimentación (Minal).

Este beneficio llega a los barrios que circundan las capitales del país y a las comunidades indígenas y campesinas donde se concentra la pobreza. Las Casas de Alimentación garantizan, por lo menos, dos comidas diarias a más de 900 mil venezolanos, lo que mejora notablemente su calidad de vida.

También pueden considerar recolectar datos, como los que nos llevaron a construir la tabla de esta lección, si consideran una casa de Alimentación cercana al lugar donde viven y realizan una encuesta a los vecinos sobre qué opinión tienen sobre la casa de alimentación. Así observan algunas características de los usuarios de esa casa. Busquen estudiar características que sean variables.

Casa de Alimentación "Orinoko Arao" Pueblos indígenas

Después de haber recolectado los datos, preséntenlos y organícenlos en una tabla para publicar en la cartelera de su año, divulgarla en el periódico escolar o reflexionar en su curso.

En Estadística también nos interesa resumir el comportamiento de los datos en pocas palabras o cifras, que nos indiquen y describan qué ocurre en esa población o muestra. Para hacer esto nos basamos en un conjunto de medidas que, sin darnos cuenta, las podemos utilizar. Son medidas estadísticas en las que la Matemática se usa cotidianamente.

¿Quién no ha oído alguna vez: "Está de moda ir a...", "Está de moda apoyar a los equipos de fútbol", o "Está de moda usar..."?. Estas frases nos indican que hay una buena cantidad de personas que tienen la misma preferencia. También se dice que la moda es lo más observado, lo más frecuente.

Así pues, el rasgo o valor que más frecuencia tenga será estadísticamente la **moda** o **modo**, aunque puede ocurrir que haya más de un modo en una variable.

Para nuestro ejemplo "opinión de la comida del comedor escolar del Liceo Bolivariano La Esperanza" se tiene que 96 de los encuestados opina que la comida es buena. Ésta es la categoría con mayor frecuencia, la más observada es el modo. Por lo tanto podemos resumir que la opinión sobre la calidad de la comida es que es buena. Como nada más posee un modo, diremos que la variable es **unimodal**.

Opinión	Estudiantes
Regular	16
Aceptable	27
Buena	96
Muy buena	79
Excelente	30
Total	248

Debatan en clases de Matemática si en este caso podemos afirmar que la mayoría de los encuestados opinó que la comida es buena. Indaguen a qué se llama mayoría, mayoría absoluta, mayoría cualificada y mayoría relativa. Estos términos son muy utilizados en las elecciones de candidatos o candidatas o en las votaciones de los parlamentarios en la Asamblea Nacional. Es muy útil a la hora de resumir lo que ocurre con una variable o en una toma de decisión.

El **modo** o **moda**: es la categoría o valor de la variable que más se repite o es más frecuente. Es una medida que resume el comportamiento de los datos. Se le considera una medida de tendencia central porque tiende a ubicarse en muchos casos al centro de la distribución de los datos. Si la variable es cualitativa nominal, sólo se puede calcular el modo.

¿Y qué ocurre cuando la variable es cuantitativa, es decir, cuando expresa una característica en magnitud o intensidad numérica?

Si interesara averiguar cuál es la resistencia y la condición física de los estudiantes que comen en el comedor del liceo y tomamos una muestra de 34 estudiantes, ¿creen que la resistencia y condición física sea una variable o una constante en los y las estudiantes de un liceo? ¿Qué deberíamos hacer para obtener esos datos?

Pregúntenle a una profesora o profesor de Educación Física cómo se podría medir esta variable. En una sección de 1er año, llegaron a la conclusión de que medirían la resistencia física, aplicando a los estudiantes una prueba del tiempo en, minutos (min), que resisten haciendo una carrera. Observaron a los 34 estudiantes y registraron los minutos en una hoja. Éstos fueron los datos registrados 12, 22, 6, 9, 18, 6, 12, 21, 17, 5, 14, 16, 14, 17, 4, 5, 2, 9, 23, 21, 24, 19, 19, 18, 15, 3, 24, 11, 5, 10, 11, 3, 19, 20.

Un primer paso para la organización de estos datos es ordenarlos de menor a mayor (forma creciente) y, si es necesario, agruparlos en intervalos o clases para luego presentarlos en una tabla de frecuencias. En esta se apreciará el número de estudiantes que obtuvo cada tiempo, desde 2 min hasta 24 min.

2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 24, 24.

Tabla 2. Tiempo de resistencia y condición física de 34 estudiantes que se alimentan en el comedor del liceo.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
(1,5)	4
(5,10)	6
(10,15)	7
(15,20)	10
(20,25)	7
Total	34

Intervalos o clases

Frecuencia simple

En esta tabla, la 1^{era} columna sigue siendo para la variable, sólo que ahora están agrupados los valores para poder visualizar mejor el comportamiento de los datos, es decir, intervalos de números que agrupan los tiempos que fueron obtenidos por los estudiantes en la prueba física. Observen bien cómo se presentan los intervalos, anoten en su cuaderno aspectos como cuántos valores están incluidos en cada clase, qué implican los paréntesis y los corchetes. Revisen si las frecuencias que están en la *tabla 2* concuerdan con la cantidad de datos que indica el intervalo de tiempo.

Los intervalos son determinados por el criterio de quien hace el estudio estadístico. Se podrían escoger de distintos tamaños.

A partir de la *tabla 2* podemos obtener información sobre varios aspectos de la prueba de resistencia y la condición física de los estudiantes encuestados. Por ejemplo, el número de estudiantes que realizan la prueba en un tiempo inferior a 5 min es 4. De estos 4 estudiantes se puede decir que no tuvieron un buen rendimiento en la prueba de resistencia y condición física. Se puede considerar a los estudiantes con tiempos entre 15 y 20 como el grupo que logró un tiempo bueno en la prueba de resistencia y condición física, pero debe ejercitar más. Completen en sus cuadernos la información que suministran estos datos.

Si tuviésemos que resumir el comportamiento de la variable tiempo de resistencia, ¿cuál sería el **modo** o **moda** en los datos ordenados? y, ¿cómo lo hallarían en la tabla de frecuencias? Fíjense que en la tabla nos vamos a orientar por la frecuencia, ya que, en este caso, el modo vendrá a ser la clase que tenga la mayor frecuencia.

Tabla 2. Tiempo de resistencia y condición física de 34 estudiantes que comen en el comedor del liceo.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
[1,5)	4
[5,10)	6
[10,15)	7
[15,20)	10
[20,25)	7
Total	34

Intervalo o clase modal

Observemos la *tabla 2*. Los datos están agrupados en intervalos de números que, para nuestro ejemplo, corresponden al tiempo que duró un estudiante en la prueba de resistencia y condición física. En el intervalo o clase correspondiente a 15 y 20 min, se encuentra la mayor cantidad de estudiantes. A este intervalo o clase se le denomina **clase modal**. ¿A qué conclusión pueden llegar en cuanto a la forma de obtener el modo en una variable cuantitativa? ¿Consideran que el modo es una buena medida para resumir el comportamiento de la variable que estamos analizando? Imaginen otras variables cuantitativas que puedan caracterizar a sus profesoras y profesores, a los y las estudiantes de su liceo y a los miembros de su comunidad. Debatan sus ideas en su clase y redacten las respuestas con argumentos en los cuadernos.

¿Otra manera de resumir el comportamiento de los datos cuantitativos aprovecha que los datos estén ordenados? Como estamos buscando las medidas de tendencia central, ¿qué valor creen se encuentre justo en el centro de los datos?

2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 14, 14, 15, 16,
17, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 23,24, 24.

Intenten con otros dos estudiantes del curso encontrar una forma de obtener el valor central en estos datos, que pueda ser utilizada en cualquier variable cuantitativa ordenada. Si es posible, construyan alguna fórmula para obtener este valor central. Algunas de estas interrogantes les podrían ayudar a sistematizar las ideas que han generado en su grupo.

¿Un dato central puede encontrarse correctamente en una serie desordenada? ¿Es lo mismo decir dato central que dato medio? ¿Será igual la cantidad de datos inferiores y superiores a ese valor central? Cuéntenlos y comparen. De ser así, ¿a qué proporción y/o porcentaje de datos se estarían refiriendo a cada lado del valor central?

Si el total de datos es par como en este caso, ¿hay un solo valor central? ¿Será el mismo, si examinamos los datos de menor a mayor que de mayor a menor?

¿Qué pasará si el número total de datos es impar? ¿Será el mismo procedimiento que cuando el total de datos es un número par?

Para efectos de la fórmula que van a crear, el total de datos lo vamos a llamar "n". Generalmente, si trabajamos con una muestra, se usa una ene minúscula (n), pero si trabajamos con una población, será una ene mayúscula (N).

En Estadística, el valor de la variable de interés que ocupa la posición central en un conjunto ordenado de datos se conoce como la **mediana**. Cuando los datos están agrupados en intervalos, la **clase mediana** es el intervalo o clase que contiene el valor de la mediana. Sin embargo, con la ayuda de las computadoras existen programas de cálculo de estas medidas, que no requieren agrupar los datos para que, en breve tiempo, se ubiquen la **mediana** y también el **modo**.

¿Siendo que el modo y la mediana son dos medidas de tendencia central, deberían tener el mismo valor ambas medidas? ¿Miden lo mismo el modo y la mediana?

¿Y cuando nos referimos al promedio, por ejemplo el promedio de notas, o la edad promedio, nos estamos refiriendo al modo o a la mediana?

Es posible que para este año escolar hayan tenido que calcular el promedio de notas obtenidas en el primer lapso, o hayan escuchado que alguien lo calculó. Averigüen o recuerden cómo se calculó este promedio. Probablemente tuvieron que sumar todas las notas definitivas obtenidas en el primer lapso y dividirlas entre algún valor. ¿Recuerdan?, ¿averiguaron?

Con lo que ya conocen, ¿consideran que el promedio de notas es el valor más frecuente o el que está en el centro de los valores ordenados? Compartan su parecer con los compañeras y compañeros del curso.

A diferencia de las otras dos medidas (modo y mediana), el promedio utiliza, para su cálculo, todos los datos, es decir, todos los valores y todos los casos. Cuando se suman todos los valores de la variable y se divide esta suma entre el número de casos o tamaño de la muestra o población, estamos calculando un punto de equilibrio de los datos o un eje alrededor del cual giran todos los valores. Verán cuando calculen el promedio de varias variables, que no siempre se ubica en el centro de los datos ordenados, como la mediana, porque al tratar de buscar el punto de equilibrio, deberá representar tanto los valores altos como los bajos y las veces que éstos se repitan. Utilizaremos el término **media aritmética** para referirnos a este promedio o medida de tendencia central. Utilizaremos el símbolo $\overline{x}$ para enunciar a la media aritmética.

Para nuestro ejemplo, “resistencia y condición física”, se tiene que la media aritmética será la suma de todos los tiempos obtenidos por los estudiantes en la prueba, dividido entre el número total de tiempos o personas que fueron observadas en su resistencia. Así obtenemos el tiempo promedio logrado por los estudiantes en la prueba de resistencia y condición física:

$$\overline{x} = \frac{\textit{suma de los tiempos de la prueba de resistencia y condición física}}{\textit{total de tiempos}}$$

$$\frac{2+3+3+4+5+5+6+6+9+9+10+11+11+12+12+14+14+15+16+17+17+18+18+19+19+19+19+20+21+21+22+23+24+24}{34}$$

$$\overline{x} = \frac{468}{34} = 13,76 \text{ min}$$

Otra forma de realizar la suma del numerador es observar cuántas veces se repite un valor y lo multiplicamos por el valor absoluto de dicho número. Luego lo dividimos, de igual manera, por el número total de datos. Esto se escribiría en nuestro ejemplo:

$$\overline{x} = \frac{\textit{suma de los factores en que se repite el "tiempo" (frecuencia) por el "tiempo" (dato)}}{\textit{total de tiempos}}$$

$$\overline{x} = \frac{2+2(3)+4+2(5)+2(6)+2(9)+10+2(11)+2(12)+2(14)+15+16+2(17)+2(18)+4(19)+20+2(21)+22+23+2(24)}{34}$$

$$\overline{x} = \frac{468}{34} = 13,76 \text{ min}$$

Aquí la media aritmética es $13,76$ min. De acuerdo con lo que se mencionó sobre la media aritmética, ¿qué significa su resultado? ¿Por qué da un valor que no se encuentra en los datos suministrados? ¿En qué influye que se obtenga con un cociente? ¿Su valor coincide con el de la mediana o el del modo? ¿Por qué será que se ubicó más hacia los valores menores que hacia los valores mayores de esta variable? ¿Qué podremos decir si la media aritmética coincide con la mediana? ¿Qué podemos decir si no coinciden?

¿Cuáles serían las fórmulas genéricas que nos permitirían calcular la media aritmética en cualquier variable cuantitativa, tanto para datos no agrupados como para los que tengan su frecuencia? Después que las planteen, revísenlas con sus compañeras, compañeros y profesora o profesor y mejórenlas de ser necesario.

Estudios en jóvenes indican que la práctica de una actividad física regular, ayuda a mejorar tanto la salud física como la psicológica. Incrementa así la calidad de vida, reduce y elimina los factores de riesgo a enfermarse y evita que aparezcan más temprano los signos de envejecimiento. ¿Qué piensan al respecto? ¿Podrán reflejarse en las medidas de tendencia central que aprendieron, la mejoría de la salud que aquí se afirma? Indaguen en libros e internet si existen datos que permitan fundamentar esta afirmación. Si los consiguen reflexionen si es posible calcular las medidas de tendencia central y escriban un ensayo sobre esta temática, pídanle a su profesora o profesor que les permitan presentar o publicar los resultados de ese estudio.

Hagan una lista de las actividades que realizan diariamente los miembros de su casa: mamá, papá, hermanos, abuelos, entre otros, e indiquen el tiempo en minutos, que utilizan en cada una de ellas. Organícenlos y preséntenlos en una tabla de frecuencias, y calculen el modo, la mediana y la media. ¿Qué pueden decir del valor obtenido de la media aritmética, de la mediana y del modo?

13 LAS HALLACAS Y EL SABOR

Experimentos aleatorios, eventos, probabilidad clásica

Según cuenta una leyenda, en Venezuela, durante los siglos XV y XVI, mientras los colonizadores comían y bebían en cantidad, los sirvientes indígenas recogían a escondidas los restos de comida y los guardaban envueltos en hojas de plátano para tener una ración extra de comida.

Otra leyenda cuenta que mientras se construía el "Camino de los españoles", que comunicaba el puerto de La Guaira con Caracas, los indígenas se alimentaban únicamente con una especie de bollo de maíz que les causaban vómitos y otros malestares. En vista de esto, los españoles les pidieron a las familias caraqueñas que donaran las sobras de sus comidas para que los indígenas acompañaran sus bollos. Durante las fiestas navideñas, al ver que las familias poderosas de Caracas celebraban haciendo grandes comilonas, el Obispo de Caracas ofendido por tales actos, les ordenó que comieran lo mismo que regalaban a los indígenas que trabajaban en la construcción del "Camino de los españoles". La gente de la época que era muy temerosa de Dios así lo hizo. Acomodaron las comidas con excelentes guisos y colocaron sólo los ingredientes de su gusto a los bollos. A este plato lo llamaron hallaca.

Sea cual sea su origen, es indudable que la hallaca es uno de los platos más exquisitos de la cocina venezolana con una tradición que ya ha rebasado las fronteras de nuestro país.

En la casa de Ángela, al igual que en la mayoría de los hogares venezolanos, tienen la maravillosa costumbre de reunirse en familia para preparar las hallacas que comerán en las fiestas navideñas. Todos los años preparan 60 hallacas de las cuales seis contienen mucho picante, ya que Jesús, su hermano mayor las come así. Este año al amarrar las hallacas olvidaron marcar las hallacas picantes. Gran problema, porque en su familia la tradición es que al estar listas todas las hallacas, su papá toma una de ellas, la prueba y la comparte con el resto de la familia; pero el señor Jorge es alérgico al picante. Jesús, el hermano mayor, dijo: "Tranquilo papá, que la probabilidad de que tomes una de las hallacas picantes es muy pequeña".

Esta frase dejó a Ángela muy inquieta. No entendía lo que su hermano acababa de decir, por lo que decidió plantear esta situación en el liceo, para investigar todo lo vinculado sobre aquella palabra "**probabilidad**" y fue así como se enteró de todo lo que les mostraremos a continuación.

En clase, luego de la discusión y varias reflexiones del grupo de estudiantes y profesoras y profesores, concluyeron que seleccionar al azar una de las hallacas, ese simple acto, esconde tras de sí un mundo de cosas maravillosas. Las experiencias, en las que el resultado obtenido depende exclusivamente del azar, tienen un nombre especial: **experimentos aleatorios**.

Un **fenómeno aleatorio** es aquel cuyas manifestaciones no podemos atribuirlas con certeza a alguna causa en particular, conocida o no. Un **experimento aleatorio**, alude a aquellas acciones lo más controladas posibles, que pueden producir más de un resultado y en las que de antemano no se puede predecir con toda certeza cuál va a ocurrir. El resultado depende del azar o de causas fortuitas.

Por ejemplo, cuando el papá de Ángela seleccionó la hallaca, no podía asegurar antes de abrirla y probarla si la que tomó tenía picante. Tampoco podía asegurar que no tuviera. La única forma de saber el resultado era probándola. Por eso, antes de que esto ocurra es probable que la hallaca sea picante o no. Dicho de otro modo, si no la prueba es imposible asegurar si la hallaca escogida tiene picante o no.

Los experimentos aleatorios son muy comunes, vivimos rodeados de experiencias en las que no somos capaces de predecir con certeza lo que va a ocurrir.

También existen experiencias en las que se puede predecir con certeza lo que va a ocurrir. A éstas se les llaman experimentos determinísticos o deterministas. Socialicen con sus compañeras y compañeros cuáles pueden ser estas experiencias y enumérenlas.

Escribir 3 experiencias que describan experimentos aleatorios y que hayan ocurrido en su familia o en su comunidad. Socialícenlas con sus compañeras, compañeros y profesoras o profesores. Por último, para cada experiencia, escriban los posibles resultados cuando ocurran estos experimentos.

Regresando al problema de las hallacas, recordemos que se hicieron 60, de las cuales 6 contenían picante. Si se tienen las 60 hallacas y se escoge una cualquiera de ellas: a) ¿Qué tiene más posibilidad de ocurrir, que se seleccione una con picante o una sin picante? Conversen esto en su ambiente de aprendizaje.

- Escriban qué les hace creer que una hallaca sin picante tenga igual o más posibilidad de ser seleccionada que la otra que tiene picante.
- ¿Conocen alguna forma de expresar numéricamente la posibilidad de que la hallaca seleccionada tenga o no picante? ¿Cuál?
- ¿Qué nombre recibe la expresión numérica descrita en la pregunta anterior?
- Escriban una expresión matemática que describa la forma de calcular la posibilidad de que ocurra un resultado particular cuando se realiza un experimento aleatorio.
- ¿Qué nombre recibe el conjunto que contiene los posibles resultados de algún experimento aleatorio?
- ¿Qué será la incertidumbre?

La **probabilidad** es la cuantificación de la incertidumbre que provoca la posibilidad de que un hecho o condición se produzca al realizar un experimento aleatorio. Una de las maneras de calcular la probabilidad de que un hecho ocurra es la forma "clásica", que plantea:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables a la condición "A"}}{\text{número total de posibles resultados del experimento aleatorio}}$$

Otra manera de calcular la probabilidad de que un suceso aleatorio ocurra es la llamada forma "frecuencial" o "a la larga".

En el ejemplo de la hallaca picante, se sabe que en total hay 60 hallacas y de éstas sólo 6 contienen picante. Si el experimento aleatorio consiste en escoger una cualquiera de estas sesenta hallacas, la probabilidad de seleccionar una picante será:

Cantidad de casos favorables: 6, ya que esta cantidad de hallacas son las picantes y cumplen con la condición establecida.

Cantidad total de posibles resultados: son 60, ya que es el total de hallacas elaboradas y cualquiera de ellas puede ser seleccionada. Recuerda que es un experimento aleatorio. De esta manera, si sustituimos los valores en la expresión matemática tendremos.

$$P(\text{sea picante})=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

- ¿Les parece que el resultado de esta fracción es grande o pequeño?
- ¿Qué indicará en términos de probabilidad, será muy probable o poco probable que al escoger una hallaca de las 60 salga una picante?
- ¿Tenía razón Jesús, el hermano de Ángela en lo que le dijo a su papá, que la probabilidad de que saliese picante era muy pequeña? Si todas las hallacas se hubiesen hecho sin picante, ¿por qué no haría falta estudiar la probabilidad en este caso?

Debatan en su clase las respuestas a estas interrogantes y cualquier otra que surja al respecto.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de **espacio muestral**, el cual estará formado por los llamados puntos muestrales. Cada posible resultado se llama **suceso simple si no puede descomponerse en otros; o suceso compuesto, si está formado por más de un suceso simple**. Los sucesos aleatorios también se conocen como eventos aleatorios.

Así, en el problema de las hallacas existen dos sucesos simples:

Suceso "A": que la hallaca seleccionada tenga picante.

Suceso "B": que la hallaca seleccionada no tenga picante.

Veamos otro ejemplo, si en su clase de matemática, la profesora o el profesor decide seleccionar al azar a una persona dentro del grupo de estudiantes para pasar a la pizarra.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada sea de género femenino?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada sea de género masculino?
- Sumen las probabilidades obtenidas en las preguntas anteriores y socialicen con sus compañeras y compañeros y profesora o profesor el significado de este resultado.
- Escriban el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Para resolver estas interrogantes cuenten la cantidad de estudiantes que hay en su sección y cuántos hay en las condiciones que se solicitan (femenino y masculino), imaginen cuál pudiese ser el resultado, es decir, qué caso será más probable y compruébenlo aplicando las fórmulas que les hemos suministrado. No olviden compartir con quienes conforman su clase, las respuestas e inquietudes. Eso les ayudará en su aprendizaje.

Ahora vamos a profundizar en otros conceptos.

Existen otras situaciones aleatorias donde la selección no es tan simple, es decir, en las que se pretende predecir más de una cosa, por ejemplo:

- Se lanzan al aire dos monedas de un bolívar y cuando caigan en la mano se observa el lado que queda hacia arriba, ¿cuál es la probabilidad de que en ambas monedas se observe el lado donde está la cara de Bolívar?

- Se lanza sobre una superficie un dado dos veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de que primero "salga" un tres y en la segunda lanzada del dado se observe en la cara superior un número par?

Observen cuántos eventos o sucesos estamos pidiendo que ocurran en cada pregunta, ¿uno o más de uno? En casos como éstos existe un método llamado **árbol de probabilidades** o simplemente **diagrama de árbol**, que permite comprender, de manera más simple, el planteamiento de la situación y su posible solución.

Vamos a analizar la siguiente situación: se desea seleccionar dos estudiantes para que sean los voceros de la sección en una reunión que se llevará a cabo con el consejo comunal, cuya finalidad es hacer mejoras a la institución. Como hay 10 estudiantes, que quieren asistir a dicha reunión, el profesor decide dejar a la suerte la selección de los dos participantes. Escriban los nombres de los 10 estudiantes en papelitos del mismo material y tamaño y los coloca en una bolsa que luego mueve para mezclarlos. Escogen un papelito por vez y observan el nombre escrito.

Si de los 10 estudiantes 6 son niñas y 4 son niños, ¿cuál es la probabilidad de que en el sorteo, la pareja seleccionada sea de distinto género?

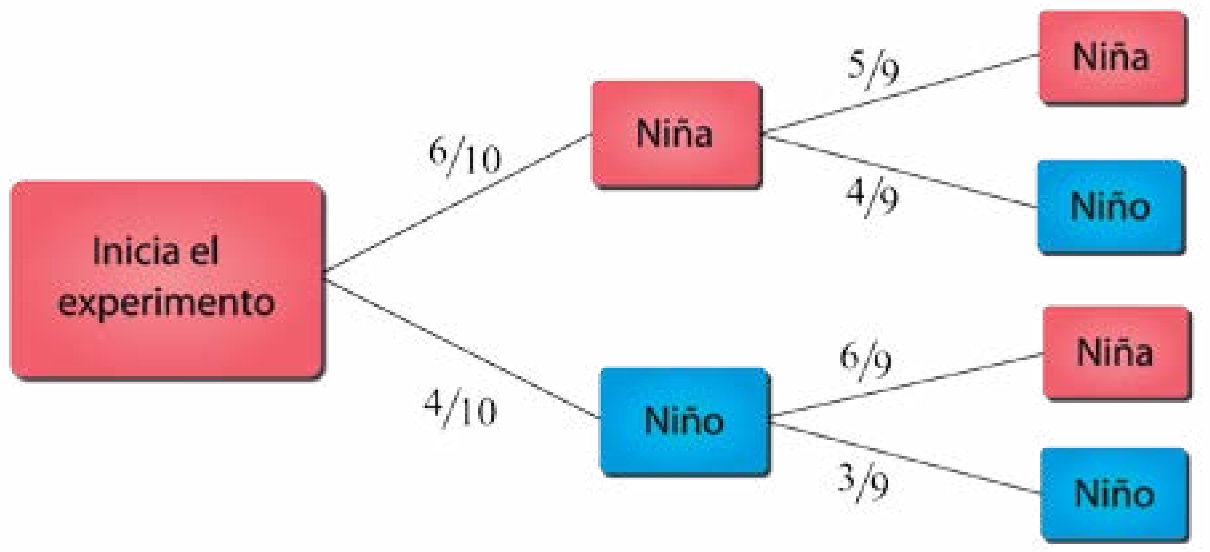
Para resolver esta situación vamos a plantear el siguiente razonamiento:

Para seleccionar al primer integrante del grupo
Situación: hay un total de 10 estudiantes de los cuales 6 son niñas y 4 son niños
La probabilidad de seleccionar una niña será: $P(f) = \frac{6}{10}$
La probabilidad de seleccionar un niño será: $P(m) = \frac{4}{10}$

Para seleccionar el segundo integrante del grupo	
Situación: hay un total de 9 estudiantes porque no interesa volver a escoger el o la que ya salió	
Si en la primera selección fue escogida una niña	Si en la primera selección fue escogido un niño
La probabilidad de seleccionar una niña será: $P(f) = \frac{5}{9}$	La probabilidad de seleccionar una niña será: $P(f) = \frac{6}{9}$
La probabilidad de seleccionar un niño será: $P(m) = \frac{4}{9}$	La probabilidad de seleccionar un niño será: $P(m) = \frac{3}{9}$

¿Consideran que "seleccionar una pareja de estudiantes de distinto género" sean eventos simples o compuestos? Tomen nota de sus respuestas.

El análisis que se ha hecho explica perfectamente la selección de los dos participantes, sin embargo, como ya se ha expresado, existe un método alternativo denominado diagrama de árbol, en el cual se puede resumir todo lo ocurrido, veamos:



En un diagrama de árbol, las líneas que representan las probabilidades de cada evento se denominan "ramas", y los puntos de los que salen dos o más ramas se llaman "nodos".

En el diagrama se han resaltado las líneas que indican las rutas que cumplen con la condición del problema "que la pareja seleccionada sea de distinto género". ¿Qué observaron en el tamaño del espacio muestral (denominador) cuando pasamos a la segunda selección? ¿Y por qué cambian algunos numeradores?

Una vez determinada(s) la(s) ruta(s) que cumple(n) la condición, se procede así, si dos o más ramas son continuas, sus probabilidades se multiplican. Si dos o más ramas salen del mismo nodo, sus probabilidades se suman.

Entonces:

$$P(\textit{primera ruta}) = \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{24}{90} \ \ y \ \ P(\textit{segunda ruta}) = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right) = \frac{24}{90}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una pareja de niños de distinto sexo será:

$$P(\textit{distinto sexo}) = \left(\frac{24}{90}\right) + \left(\frac{24}{90}\right) = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

Ahora bien, retomando el caso de las hallacas, si se hubiesen extraído al azar, una para cada persona de esa familia (Ángela, Jesús, Manuel y su papá), ¿cuál sería la probabilidad de que las cuatro hallacas no fuesen picantes y cuál sería la probabilidad de que las cuatro sí lo fuesen?

Planteen un diagrama de árbol para ayudar a resolver esta incógnita, y compárenlo con otros realizados por compañeras y compañeros del curso. ¿Será seguro que las cuatro hallacas extraídas al azar no tengan picante?

Y pensar que ya desde 1560, en la época del Renacimiento, un médico, matemático y filósofo conocido como Gerolamo Cardano escribió un libro sobre la probabilidad, considerado por muchos como el primer tratado matemático sobre este tema. Han pasado más de cuatro siglos y medio y aún se siguen estudiando y aplicando conceptos probabilísticos.

En el diagrama de árbol que está presente en esta lección, existe una condición subyacente: que el punto muestral que apareció o fue seleccionado en la primera oportunidad no puede volver a colocarse en el espacio muestral y por lo tanto no puede volver a ser seleccionado. Esto se conoce como un **muestreo o selección sin reposición o sin reemplazo**.

1. En este caso, ¿consideran que la probabilidad de la segunda selección está influida por la probabilidad de la primera selección?, ¿y cuando se lanzan dos monedas de un bolívar al aire a la vez y se observa el lado que queda hacia arriba al caer éstas sean sello y cara?

2. Expliquen su respuesta, primero, en forma verbal ante su clase, y luego del debate de ideas, pasen a escribir en el cuaderno una posible conclusión de lo discutido.

3. ¿En qué casos se puede hablar de un suceso compuesto con eventos independientes? ¿El término independencia tendrá, en este caso, la misma connotación o significado que cuando decimos que Simón Bolívar luchó por la independencia de Venezuela?

4. Cuando tenemos eventos compuestos en el que la probabilidad de que ocurra un evento afecta la probabilidad de que ocurra el otro evento o los otros eventos, ¿cómo llamarían a ese evento compuesto? ¿Será también un evento independiente?

5. Sería muy bueno que reflexionaran con sus compañeras y compañeros, si puede existir una selección con reemplazamiento o con reposición. En ese caso, ¿cambiarán los denominadores en la fórmula de probabilidad? ¿Por qué? Traten de dar algunos ejemplos de selección con reemplazo.

14 HACIA UNA CULTURA DE RECICLAJE

Fracción generatriz

La basura: un problema a solventar

Algunas de las ciudades de nuestro país se encuentran entre las que generan mayor cantidad de basura, encabezadas por Caracas. De hecho, se estima que cada persona, en varias de las ciudades de la Región Capital, e incluso en algunas otras ciudades cercanas a la costa marítima, produce cerca de $1{,}3$ kg **de basura al día**. En cambio, en el interior del país tal promedio se encuentra entre los 300 g y los 500 g.

Esta situación genera problemas de carácter ambiental, en especial los que tienen que ver con el manejo de los desechos sólidos, con el tema de la clasificación y reciclaje de estos (hierro, aluminio, vidrio, materia orgánica, papel-cartón, plásticos y otros), con recolección, transporte y ubicación. Se relaciona, además, con el trabajo socioproductivo, con la salubridad, con la preservación de las especies animales y vegetales y con el desarrollo de políticas públicas de orden local, regional y nacional.

En varios de los países que tienen un alto desarrollo tecnológico e industrial, mal llamados "desarrollados", el promedio de basura por persona al día está cercano a los 2 kg.

Por otra parte, resulta interesante estudiar la evolución de este promedio durante cada uno de los meses del año. Con ello podemos observar que durante el mes de diciembre se da el más alto valor de este promedio. Situación que podría vincularse con ciertos patrones de consumo que han causado problemas adicionales, en muchos de los países de la Unión Europea; por ejemplo, al sustituir innecesariamente equipos de telefonía celular y de computación al ritmo de los mercados (comprando el teléfono "de moda"), o al desechar materiales que bien pudieran aprovecharse en el reciclaje. Además, hasta hace unos cinco años, se estimó que cada ciudadano europeo botaba al año un promedio de $177{,}5$ kg de verduras, frutas, carnes y otros productos alimenticios.

Esta situación puede revertirse con un buen programa de reciclaje que pueden ayudar a diseñar y ejecutar en el liceo y en su comunidad

Ciudad CCS — www/ciudadccs.info — CARACAS, domingo 31 de julio, 2011

UBV propone plan de reciclaje

Disminuir la generación de desechos sólidos en las torres A y B de Hornos de Cal en San Agustín del Sur, es la propuesta que presentó un grupo de estudiantes de Trabajo Social de la Aldea Gran Colombia de la Universidad Bolivariana de Venezuela (UBV) a los vecinos del sector.

El plan, realizado como parte de su tesis de grado, busca impulsar la educación ambiental en la zona, donde la basura tiene espacios públicos invadidos.

Durante una asamblea realizada con la comunidad, explicaron que los vecinos deben tomar un papel activo en el proceso de reciclaje para minimizar los desechos.

Informaron que para dar inicio al programa se debe conformar una brigada ambiental comunitaria que estará integrada por vecinos de la comunidad, voceros de los consejos comunales, así como también participarán las instituciones educativas del sector.

Se estima que de cada kilogramo de vidrio desechado en nuestro país se recicla $0{,}25$ kg. Y que de cada kilogramo de papel-cartón desechado se reciclan $0{,}2$ kg. Y algo más crítico sucede con los plásticos, pues se calcula que se reciclan $0{,}02$ kg.

La expresión decimal de un número

Todos los números que siguen, los cuales hemos mencionado al comienzo de esta lección, están en su expresión decimal:

1,3 177,5 0,25 0,2 0,02

Como sabemos, por ejemplo, la **parte entera** de 1,3 es 1 y su **parte decimal** es 3.

parte entera → 1,3 ← *parte decimal*

Como recordaremos, las partes entera y decimal de un número se encuentran separadas por la "coma". Aunque en el caso de un número entero, se supone que su parte decimal es 0, tal como se muestra de seguidas:

parte entera → $5 = 5,0$ ← *parte decimal*

Antes se seguir, identifiquen las partes entera y decimal de los siguientes números, los cuales corresponden al rango en el que se encuentra la cantidad de basura (en kilogramos) por persona al día en las ciudades del interior del país, entre otros:

0,3 2,3 1,3 0,8
0,5 0,75 214,66 3,1416

Observemos que hemos realizado la conversión de 300 g y 500 g (los valores que mencionamos en la introducción de esta lección) a kilogramos. Fíjense que como 1 kg = 1.000 g, entonces $300 \text{ gr} = \frac{300}{1.000} \text{kg} = 0,3 \text{ kg}$. De forma similar hagamos la equivalencia de 500 g a kg :

$$500 \text{ g} = \frac{500}{1.000} \text{kg} = 0,5 \text{ kg}$$

¿Cuál es la parte entera y la parte decimal de 1,568?

Pero dada la expresión decimal de un número, ¿cuál es la fracción que lo genera? Ésta es una pregunta importante. La sección que sigue se ocupa de ella.

Centro Simón Bolívar, Caracas

La fracción generatriz

Tomemos por caso la fracción $\frac{1}{2}$, ésta no se puede simplificar más (o reducir) pues, no hay factores comunes a su numerador y denominador, excepto el 1. En cambio, la fracción $\frac{20}{35}$ sí se puede reducir, para ver esto podemos descomponer el numerador y el denominador en sus factores primos, como mostramos a continuación. Como $20 = 2\cdot2\cdot5$ y $35 = 5\cdot7$, entonces:

$\frac{20}{35} = \frac{2\cdot2\cdot5}{5\cdot7} = \frac{2\cdot2}{7} = \frac{4}{7}$ por lo tanto la fracción $\frac{4}{7}$ es irreducible

Una manera de comprobar que $\frac{20}{35}$ es equivalente a $\frac{4}{7}$ es verificar que los productos cruzados son iguales, en efecto, $20\cdot7 = 35\cdot4$. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $a\cdot d = b\cdot c$.

Pero en el caso en que $\frac{a}{b}$ no sea equivalente a $\frac{c}{d}$, es decir, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, entonces $a\cdot d \neq b\cdot c$.

Un ejemplo de dos fracciones no equivalentes es $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5}$ ya que $3 \cdot 5 \neq 4 \cdot 4$.

Dado un número en su expresión decimal, la fracción irreducible que lo genera se denomina fracción generatriz de este número.

Recordemos que una fracción irreducible es aquella que no puede reducirse o simplificarse.

- ¿Qué fracciones son equivalentes a $\frac{2}{5}$?
- Aporten otros ejemplos de fracciones equivalentes.
- ¿Cuántas fracciones son equivalentes a una fracción dada?
- Aporten ejemplos de fracciones irreducibles y de fracciones reducibles.

La fracción generatriz del promedio de basura por persona al día

Caso A (cuando hay una cantidad limitada de cifras decimales)

Recordemos que al inicio de la lección comentamos que el promedio de basura por persona al día (en algunas de las ciudades costeras de Venezuela) es $1{,}3$ kg. Pero, **¿cuál es la fracción generatriz de este número?** ¿Cómo podemos obtenerla?

En primer lugar, debemos ver cuántas cifras decimales tiene el número que estamos considerando. En nuestro caso,

$$1{,}3$$

tiene una cifra decimal (el 3). Éste será un número importante en lo que sigue.

Ahora multiplicamos $1{,}3$ por una fracción, cuyo numerador y denominador consten del 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga $1{,}3$. Veamos:

$1{,}3 = 1{,}3 \cdot 1$	Elemento neutro de la multiplicación
$= 1{,}3 \cdot \dfrac{10}{10}$	Multiplicación por la fracción unidad
$= \dfrac{1{,}3 \cdot 10}{10}$	Multiplicación de numeros racionales
$= \dfrac{13}{10}$	Fracción decimal

La fracción que obtenemos tiene como numerador un número entero. Además, tal fracción es irreducible, por tanto:

$\mathbf{\dfrac{13}{10}}$ **es la fracción generatriz de $1{,}3$.**

¿Y cómo comprobamos que es irreducible?

Para ello basta ver que el numerador y el denominador de $\dfrac{13}{10}$ no tienen factores en común (excepto al 1). Fíjense que $13 = 1 \cdot 13$ (pues es un número primo) y $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$.

En el Instituto Pedagógico de Caracas se ha desarrollado desde hace más de una década un programa de reciclaje de papel, diseñado y ejecutado por la Prof. Carmen Ponte de Chacín y con la participación de toda la comunidad ipecista. El programa parte del territorio e incide desde el territorio, constituyendo un modelo de gestión local.

Fuente: http://www2.scielo.org.ve

Caso B (cuando hay una cantidad ilimitada de cifras decimales)

Tomemos ahora una expresión decimal con una cantidad ilimitada de cifras decimales y busquemos su fracción generatriz:

$$1{,}3333... = 1{,}\overset{\frown}{3} \leftarrow \textit{período}$$

Cuando tenemos una cifra decimal que se repite indefinidamente, se dice que tenemos una **expresión decimal periódica,** en la que la o las cifras del **período** comienzan en el primer lugar decimal y se repiten indefinidamente, entonces, para encontrar su fracción generatriz procedemos de la siguiente manera:

En primer lugar, multiplicamos el número dado, llamémoslo x, por el uno seguido de tantos ceros como cifras tenga el período, en nuestro caso calcularemos $10x$.

Como $1{,}3333...$ tiene una sola cifra en el período (el 3), entonces multiplicamos a $1{,}3333...$ por 10. Veamos:

$$10x = 10 \cdot 1{,}3333... \\ = 13{,}333...$$

Ahora le restamos a este número el primero, esto es, $10x - x$.

$$\begin{array}{r} 13{,}333... \\ -\quad 1{,}333... \\ \hline 12 \end{array}$$

Por tanto, $10x - x = 9x = 12$, de donde $x = \dfrac{12}{9}$

Y ya con esta ecuación, encontramos la solución y buscamos simplificando, la fracción irreducible que le es equivalente:

$$x = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

Entonces, $\dfrac{4}{3}$ es la **fracción generatriz** de $1{,}3333...$

Y hay un caso más…

Caso C (cuando hay unas cifras decimales antes del período)

Consideremos, por ejemplo, al número $2{,}146666... = 2{,}14\overset{\frown}{6}$

En ella, hay dos cifras antes del período, denominadas **anteperíodo**, y una en el **período**, tal como se indica:

$$\overset{\substack{\textit{anteperíodo}\\ \downarrow}}{} \quad 2{,}1466666... \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{período}}}{}$$

Llamemos $x = 2{,}146666...$

Ahora multiplicamos a x por el uno seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo (en nuestro caso son 2).

También debemos multiplicar a x por el uno seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo, junto con las cifras que tenga el período (en nuestro caso son $2+1=3$).
Veamos:

$$100x = 214{,}6666...$$

y,

$$1.000\,x = 2.146{,}666...$$

Y restamos las dos ecuaciones obtenidas:

$$1.000\,x - 100\,x = 900\,x$$

donde:

$$\begin{array}{r} 2.146{,}6666... \\ -\quad 214{,}6666... \\ \hline 1.932 \end{array}$$

Así, $900x = 1.932$

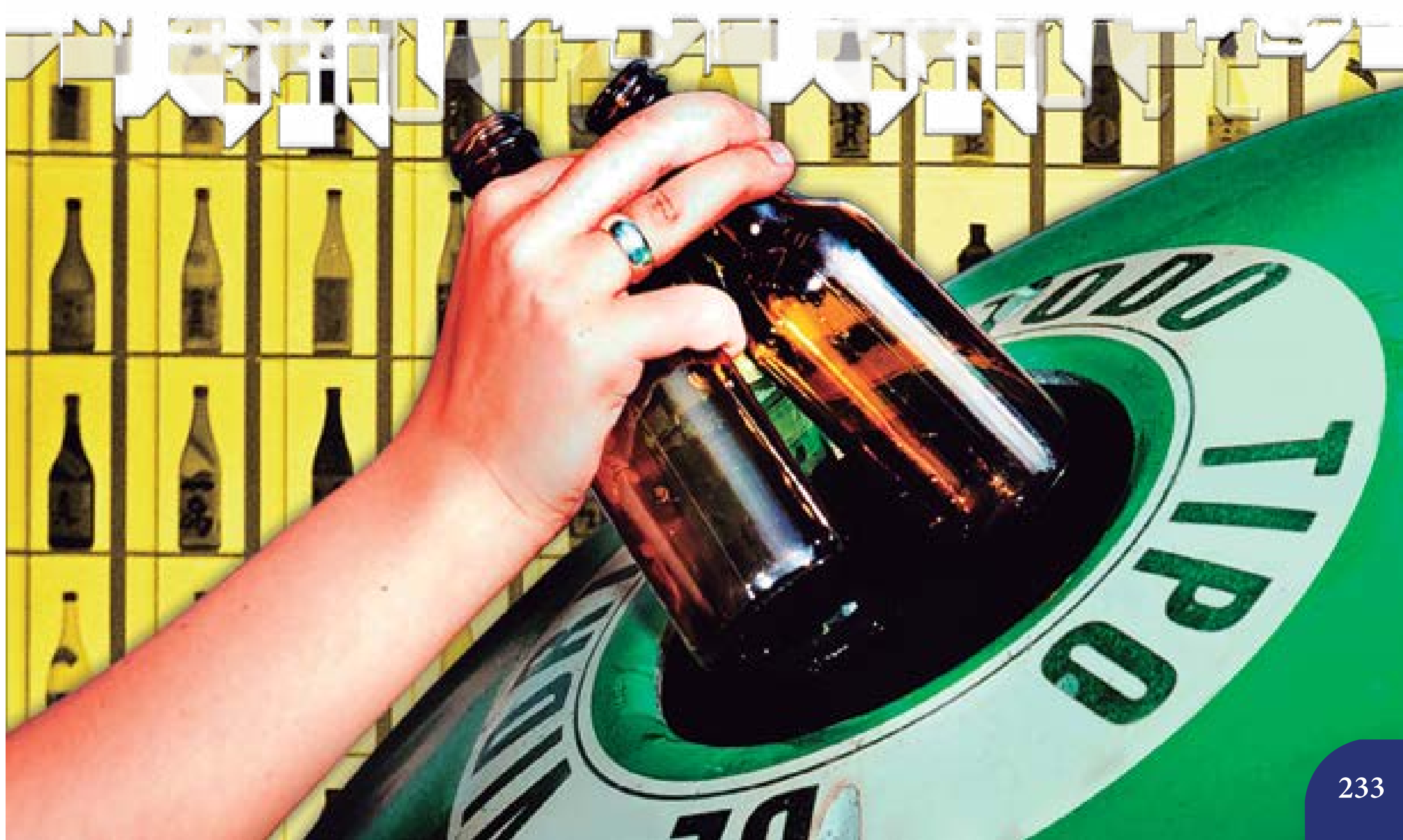
Artesanía realizada con materiales de uso y provecho (diskettes)

Sólo nos falta hallar la solución de esta ecuación simplicando:

$$x = \frac{1.932}{900} = \frac{966}{450} = \frac{483}{225} = \frac{161}{75}$$

La fracción generatriz de 2,14666… es $\frac{161}{75}$.

- Les proponemos debatir en el curso todos los casos para obtener la fracción generatriz de una expresión decimal dada.
- Aporten algunos ejemplos de expresiones decimales exactas (no periódicas) y periódicas (sin y con anteperíodo).
- ¿Cuál es el procedimiento para obtener la fracción generatriz para cada uno de los ejemplos?
- ¿Y en el caso de $1{,}999…$? Conversen sus resultados con su profesora o profesor.
- ¿Cuál es la fracción generatriz de $177{,}5$ kg?



nvestiguemos

Las tres erres R3: reducir, reutilizar, reciclar

En el año 2002 se introdujeron en Japón las políticas para establecer una sociedad orientada al reciclaje. La idea era crear en la ciudadanía el hábito de concienciación de las tres erres: reducir, reutilizar y reciclar.

La primera erre: al **reducir** el problema se disminuirá el impacto en el ambiente. Existen dos niveles en esta primera erre, reducir el consumo de bienes y de energía. ¿Podrían suministrar algunos ejemplos de estos dos niveles? Investiguen cómo desde sus hogares, liceo y comunidad podemos ayudar a reducir ambos niveles de consumo. Para iniciar la actividad te planteamos algunas situaciones. En sus casas, al utilizar la lavadora, ¿cargan éstas a su máxima capacidad? Cuando cargan los celulares ¿desenchufan los cargadores? Revisen en el libro de Matemática de 2do grado, la lección "Los vampiros eléctricos".

La segunda erre: **reutilizar** los objetos es darle una segunda vida útil. ¿Podrían dar ejemplos de reutilización de objetos? Conversen con sus docentes, familiares, vecinos u otras personas, acerca de este hábito de reutilización. ¿Podrían hacer una lista de objetos e identificar usos adicionales para los mismos?

La tercera erre: al clasificar la basura, es decir, al **reciclarla**, para obtener luego nuevos productos. Investiguen cuáles procesos de reciclaje se desarrollan en Venezuela y el mundo. En un proyecto de reciclaje en el liceo donde estudian, ¿cuáles procesos de reciclaje podrían implementarse?

1) Conjuntamente con sus compañeras, compañeros y profesoras y profesores, elaboren un proyecto de reciclaje para ser desarrollado en el liceo. Ese proyecto debe estar precedido de una investigación, necesitarán responder preguntas como: ¿cuál tipo de material es factible a ser reciclado en el liceo? Investiguen qué tipo de reciclaje es el más conveniente según el tipo de dependencia del liceo, las unidades administrativas, la cantina o el comedor, entre otros, ¿cuál sería la dependencia más apropiada para el reciclaje de botellas de vidrio o plástico? ¿Y para reciclar papel o cartón?

Amarillo	Plástico
Azul	Papel y cartón
Verde	Vidrio
Gris	Orgánico
Rojo	Desechos peligrosos

2) Igualmente deben planificar y organizar dónde y cómo se pueden recolectar los desechos sólidos o de otro tipo. Por ejemplo, si en tu liceo funciona el Programa de Alimentación Escolar, ¿en dónde deben arrojar los restos de comida?, ¿en qué lugar se colocarán las servilletas usadas? Inicien, junto a docentes, una campaña en el liceo donde se hagan actividades como éstas. ¿Por qué creen ustedes que es importante clasificar la basura y reciclarla? Promuevan en sus comunidades, incluidos sus liceos, la conciencia ecológica para aplicar las tres erres y así ayudar a darle solución al problema de la basura en nuestro país.

3) Conversen en clase, e incluso, en su grupo familiar cómo piensan que puede solucionarse el problema de la basura en un municipio. Les sugerimos divulgar sus resultados en los periódicos locales, o bien, en el de la Institución.

4) Investiguen cuál es el promedio de basura por persona al día en el municipio donde viven. ¿Cuál es su **fracción generatriz**?

El universo de la Educación Matemática
Semblanza de algunos de sus ilustres personajes
Alejandro Fuenmayor Morillo (1887-1947)

Este insigne educador venezolano nació en la ciudad de Maracaibo el 16 de diciembre de 1887, siendo sus padres Francisco Fuenmayor y Eloína Morillo.

Realizó estudios de pedagogía y dominaba varios idiomas.Su labor docente abarcó un período de más de 30 años que compartió entre el aula, los cargos administrativos y la redacción de numerosos textos escolares.

Esta última es una de sus facetas más resaltantes, por lo amplio de su producción, más de 20 libros que cubren gran parte del currículum primario, así como por su calidad didáctica, abarcando las áreas de Historia, Lectura y Escritura, Lenguaje, Moral y Cívica y Aritmética elemental. Puede ser, además, considerado como uno de los introductores de la Escuela Nueva en Venezuela. Desde el año 1912, se dedicó a promover el razonamiento y la actividad del estudiante, y a relacionar los contenidos con el entorno del educando, lo cual se refleja en sus escritos.

Particular referencia hemos de hacer a su escrito "Programas metodológicos de los tres primeros grados de la educación primaria", publicado en 1937, por la importancia de sus planteamientos pedagógicos. Sus diversos libros de matemática elemental y su concepción pedagógica son un aporte fundamental para la enseñanza de la Matemática en Venezuela.

Su trayectoria en el campo de la educación fue larga y sumamente fructífera. Fue Inspector Técnico en varios estados entre 1914 y 1919, lo cual alternó con la Dirección de Instrucción Primaria, Secundaria y Normal en el período 1916-1920. Durante los años 1921-1924 ejerció como Inspector Técnico de Instrucción Primaria en la República Dominicana. Ya en Venezuela es designado de nuevo Director de Instrucción Primaria, Secundaria y Normal. En 1936, se le designa como el primer director del recién creado IPN, cargo que ocupó por poco tiempo.

En mayo de 1941, es nombrado Ministro de Educación Nacional. A pesar del masivo apoyo recibido, su paso por esta cartera fue breve (hasta septiembre de ese año), debido a que aspiraba -como buen zuliano- que se reabriese La Universidad del Zulia, meta para la cual no consiguió suficiente acuerdo. Entre 1944 y 1945 estuvo a cargo de la Dirección de Escuelas Municipales del Distrito Federal.

Su tesonera labor en todas las esferas educacionales le hacen merecedor de ocupar un sitial de honor entre los educadores del país. Sin embargo, su participación en la esfera pública no termina aquí, ya que además fue Cónsul General de Venezuela entre 1924 y 1929, volviendo al país ese año para desempeñarse como bibliotecario del Ministerio de Relaciones Exteriores hasta 1935.

Adicionalmente incursionó en la poesía, escribiendo la obra *Jardín espiritual*. Su pluma aparece reflejada en revistas como *El Cojo Ilustrado*, *Nuevos Ideales y Proshelios*. Su nombre aparece incluido en el *Diccionario General de la Literatura Venezolana*.

Fuenmayor estuvo presente en todo el acontecer educativo de su época, por lo que también fue miembro de la Federación Venezolana de Maestros.

En vida recibió varias distinciones como la Medalla de la Instrucción Pública y el premio literario "Violeta de Oro".

En su ciudad natal fue creada en 1956 una escuela normal con su nombre.

Actualmente, una institución educativa ubicada en la ciudad de Maracaibo (estado Zulia) lleva el nombre de este venezolano de excepción.

Este ilustre venezolano falleció el 31 de diciembre de 1947, en la ciudad de Nueva York.

UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL ALEJANDRO FUENMAYOR
MARACAIBO

FUENTES CONSULTADAS
Biografías

Los primeros hijos del "Padre Pedagógico"

Albornoz, José Hernán. (1986). El Instituto Pedagógico: Una visión retrospectiva. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.
Parodi Alister, Humberto. (1986). El Instituto Pedagógico. Fundación y trayectoria. Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Torrealba Lossi, Mario. (1986). Entre los muros de la casa vieja. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.

Mireya Vanegas Wesoloski

Angulo Caleca, Ángela L. (2007). El Instituto Pedagógico Nacional: Autoconstrucción y aportes. Caracas: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
Orellana Hidalgo, Inocencia Auxiliadora. (1966). Trayectoria del liceo Luis Razetti. Trabajo ganador del concurso sobre la historia del liceo Luis Razetti con motivo de celebrarse los 20 años del liceo.
Parodi Alister, Humberto. (1986). El Instituto Pedagógico. Fundación y trayectoria. Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Prieto Figueroa, Luis Beltrán. (1986). Maestros de América. Caracas: Ediciones de la Presidencia de la República.
Sánchez, Jesús María. Tragedia en Araira. http://www.guatire.org/biblioteca/1/2/art11.php.
Torrealba Lossi, Mario. (1986). Entre los muros de la casa vieja. Caracas: Ediciones del Congreso de la República.
U. E. Instituto Escuela. Página Web. http://www.instituto-escuela.com/list_det.php?id_d=35.

Alejandro Fuenmayor

Caula, Silvana. Fuenmayor Morillo, Alejandro (1887-1947). http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=fuenmayor- morillo-alejandro.
Fernández Heres, Rafael. (2003). Humanismo y educación en Venezuela (Siglo XX). Caracas: Biblioteca de la Academia Nacional de la Historia.
Mudarra, Miguel Ángel (1988). Alejandro Fuenmayor. En: Mudarra, Miguel Ángel (1988). Semblanza de educadores venezolanos (pp. 176-177). Caracas: Fondo Editorial IPASME.
Murió anteayer en EE. UU. Alejandro Fuenmayor. "El Universal", 2 de enero de 1948, pp. 1 y 3.
Páez Urdaneta, Iraset. (1983). Alejandro Fuenmayor. En: AA. VV. (1983). Nueve educadores venezolanos. (pp. 41-45). Caracas: La Casa de Bello.

Fotografías

Pág 6
Primera promoción de matemática IPN.
Foto: El Instituto Pedagógico. Fundación y trayectoria. Parodi Alister, Humberto. (1986)
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 8
Esquina Principal, Caracas.
Foto: Alí Rojas Olaya.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 9
Esquina de Carmelitas, Caracas.
Foto: http://mariafsigillo.blogspot.com/2011/07/notas-e-imagenes-de-la-a v-urdaneta-de.html.
Diseño gráfico Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 11
General Rafael Urdaneta.
Foto: http://derechodepalabra.wordpress.com Historia breve de Perijá Nº 6.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Avenida Urdaneta en 1957, Caracas.
Foto: http://1viejasfotosactuales.multiply.com/journal/item/47?&show_interstitial=1&u=%2 Fjournal %2Fitem.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 12
Gráfico Esquinas de Caracas.
Fotos: Himmaru Ledezma, Morely Rivas Fonseca. http://www.embavenehellas.com, http://www.psuv.org.ve/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 13
Casa Natal del Libertador Simón Bolívar.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Gráfico Esquinas de Caracas.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena, Morely Rivas Fonseca.
http://www.embavenehellas.com, http://www.psuv.org.ve/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 14
Esquina de Amadores.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Gráfico Esquinas de Caracas.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena, Morely Rivas Fonseca.
http://www.embavenehellas.com, http://www.psuv.org.ve/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 16
Gráfico Esquinas de Caracas. (2)
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena., Morely Rivas Fonseca.
http://www.embavenehellas.com, http://www.psuv.org.ve/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 16
Gráfico Esquinas de Caracas.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 19
Avenida Urdaneta, Caracas.
Foto: http://mariafsigillo.blogspot.com/2011/07/notas-e-imagenes-de-la-av-urdaneta-de.html.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 20
Casa Amarilla, Caracas.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 21
Esquina La Pelota.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 22
Esquinas de Caracas en película.
Fotos: Alí Rojas, Himmaru Ledezma Lucena y Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 23
Esquinas de Caracas.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena y Rafael Pacheco Rangel. (2012)

Mapa de la ciudad de Caracas del siglo XVIII.
Foto: http://caracas-antesahora.blogspot.com/2008/03/evolucin-histrica-de-caracas.html
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Págs 24 y 25
Infografía Una historia a la vuelta de la esquina.
Fuente: Harvey Herrera. Ciudad Caracas. 21 de Enero de 2011
Diseño: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 61
Antena de seguimiento satelital de la ABAE en la Estación de Luepa.
Foto: http://www.CIDA.gob.ve.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 90
A comer sano y sabroso.
Fotos: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 99
Niño tomando leche.
Fotos: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 130
Derecho a una vivienda.
Foto:
Diseño gráfico:David Davila. (2014)

Pág 134
Rectas paralelas, esquina Plaza España.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 144 y 145
Doblando y desdoblando.
Fotos: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 149
Barrio El Calvario, Caracas.
Foto: Gustavo Mata.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 170
¡Allá viene el tren!
Foto: http://www.avn.info.ve/node/89086.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 171
Estructura triangular para tren.
Foto: Instituto de Ferrocarriles del Estado.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 172
Equilibrio de cargas.
Foto: http://www.metrodecaracas.com.ve.
Diseño gráfico: Rafael Pacheco Rangel. (2012)

Pág 189
Construcción de triángulos.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 190
Tierras ociosas y baldías.
Foto: http://www.avn.info.ve/node/91770.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 205
Paralelogramos al viento.
Foto: Morely Rivas Fonseca.
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 206
Programa de Alimentación Escolar.
Foto: www.me.gob.ve/
Diseño gráfico: Morely Rivas Fonseca. (2012)

Pág 228
Centro Simón Bolívar, Caracas.
Foto: Himmaru Ledezma Lucena.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

Pág 232
Artesanía realizada con materiales de uso y provecho (diskettes).
Foto: http://callejonreciclo.wordpress.com/tag/aluminio/.
Diseño gráfico: Himmaru Ledezma Lucena. (2012)

COLECCIÓN BICENTENARIO

COLECCIÓN BICENTENARIO

Donde yo encuentro poesía mayor es en los libros de ciencia, en la vida del mundo, en el orden del mundo, en el fondo del mar, en la verdad y música del árbol, y su fuerza y amores, en lo alto del cielo, con sus familias de estrellas, -y en la unidad del universo, que encierra tantas cosas diferentes, y es todo uno, y reposa en la luz de la noche del trabajo productivo del día.

JOSÉ MARTÍ
Pensador cubano

DISTRIBUCIÓN GRATUITA

Gobierno **Bolivariano** de Venezuela | Ministerio del Poder Popular para la **Educación**